3.5 Integrazione

"Integrare" una funzione ha un significato duplice: da un lato significa "fare l'operazione inversa della derivata", ovvero trovare la famiglia di tutte le funzioni che, derivate, ci dànno la funzione di partenza; dall'altro significa "calcolare l'area della parte di piano cartesiano sottesa dal grafico della funzione". Normalmente, alla prima operazione si dà il nome di *integrazione indefinita*, ed alla seconda quello di *integrazione definita.* Apparentemente le due questioni sembrano senza relazione reciproca, ed all'inizio dello studio sembra dunque incomprensibile lo scegliere nomi (e, come vedremo, anche simboli) uguali per indicare cose così differenti: in realtà esse sono intimamente legate, come diventerà chiaro nel seguito.

3.5.1 Integrazione indefinita (calcolo delle antiderivate)

Come detto, si tratta di trovare la famiglia di tutte le *primitive*, o *antiderivate*, di una data funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (ove $A \subset \mathbb{R}$), ovvero la famiglia di tutte le funzioni derivabili $F : A \to \mathbb{R}$ tali che $F' = f$. Come si è visto, la derivazione porta ad una perdita di regolarità (la derivata di una funzione derivabile non è nemmeno detto che sia continua, ed in generale la derivata di una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^{k-1}$): dovremo dunque aspettarci, naturalmente, che l'integrazione indefinita porti ad un miglioramento della regolarità. Il dubbio, allo stato presente, è più che altro il seguente: *data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, si possono trovare sempre delle primitive di f ?* La risposta è sì *se f è una funzione continua* (ma per la dimostrazione completa dovremo pazientare ancora un poco) e, anzi, se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ la famiglia delle primitive di f ha una forma particolarmente semplice:

Proposizione 3.5.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$* (con $k \geq 0$) *allora esiste una primitiva $F : A \to \mathbb{R}$ di f di classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Inoltre, la famiglia di tutte le primitive di f è data da $\{F + k : k \in \mathbb{R}\}$, ove F è una qualsiasi primitiva di f.*

Dimostrazione. Se f è continua, ovvero se $k = 0$, mostreremo (vedi Corollario 3.5.13) che esiste una primitiva F di f di classe $\mathcal{C}^1$; per il momento, dunque, assumiamo che ciò sia vero. Se allora f è di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 0$, essa è in particolare continua e dunque ammette una primitiva F di classe $\mathcal{C}^1$, ma essendo $F' = f$ si ha $f^{(j)} = F^{(j+1)}$ per ogni $0 \leq j \leq k$, e dunque tale F è in realtà di classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Infine, se $G : A \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f, si ha $(G - F)' = f - f = 0$ e basta ricordare la Proposizione 3.3.9(ii). □

Se il dominio A di f è un pluriintervallo (ovvero un'unione disgiunta di intervalli), la conclusione della proposizione precedente vale per ciascun intervallo disgiunto dagli altri che compone A: ad esempio, se si ha una funzione continua $f : \mathbb{R}_{<\alpha_1} \cup \mathbb{R}_{>\alpha_2} \to \mathbb{R}$ per certi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 < \alpha_2$, una volta che si sono determinate una primitiva $F_1 : \mathbb{R}_{<\alpha_1} \to \mathbb{R}$

di $f|_{\mathbb{R}_{<\alpha_1}}$ ed una primitiva $F_2 : \mathbb{R}_{>\alpha_2} \to \mathbb{R}$ di $f|_{\mathbb{R}_{>\alpha_2}}$, tutte e sole le primitive di f sono le funzioni $F : \mathbb{R}_{<\alpha_1} \cup \mathbb{R}_{>\alpha_2} \to \mathbb{R}$ date da $F(x) = F_1(x) + k_1$ (per $x < \alpha_1$) e $F(x) = F_2(x) + k_2$ (per $x > \alpha_2$) al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Pertanto, non è restrittivo pensare da subito che A sia un intervallo. Denoteremo allora l'insieme (come visto, non vuoto) delle primitive di una funzione continua f col simbolo

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + k : \ F' = f,\ k \in \mathbb{R}\},$$

detto *integrale indefinito* di f.

Siamo ora di fronte al problema del *calcolo delle primitive* di una data funzione continua. Se derivare una funzione "quasi-elementare" (cioè, ottenuta operando e componendo funzioni elementari) è meramente una questione di conti, riuscire ad integrare una funzione quasi-elementare ottenendo un'espressione quasi-elementare delle primitive è, al contrario, una circostanza fortunata.[49] Dovremo dunque prepararci ad un problema di soluzione elementare "quasi sempre impossibile" e, in generale, abbastanza ostico da affrontare anche nei casi possibili. Tuttavia, almeno una cosa discende subito, per definizione, dalla Proposizione 3.5.1:

Proposizione 3.5.2. *Se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, vale*[50]

$$\int f'(x)\, dx = \{f(x) + k : k \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

$$\textbf{(1)} \int x^\alpha\, dx \ \ (\text{con } \alpha \neq -1);\ \ \textbf{(2)} \int \frac{1}{x}\, dx;\ \ \textbf{(3)} \int e^x\, dx;\ \ \textbf{(4)} \int \sin x\, dx;\ \ \textbf{(5)} \int \cos x\, dx;\ \ \textbf{(6)} \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx;$$

$$\textbf{(7)} \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx;\quad \textbf{(8)} \int \frac{1}{1+x^2}\, dx;\quad \textbf{(9)} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;\quad \textbf{(10)} \int \sinh x\, dx;\quad \textbf{(11)} \int \cosh x\, dx.$$

Risoluzione. Dalla Proposizione 3.5.2 si ricava subito **(1)** $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ (ad esempio $\int dx = x + k$, $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + k$, $\int x\, dx = \frac{x^3}{3} + k$, $\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + k$, $\int \frac{1}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2} + k$, etc.); **(2)** $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + k$; **(3)** $\int e^x\, dx = e^x + k$; **(4)** $\int \sin x\, dx = -\cos x + k$; **(5)** $\int \cos x\, dx = \sin x + k$; **(6)** $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + k$; **(7)** $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + k$; **(8)** $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + k$; **(9)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + k$; **(10)** $\int \sinh x\, dx = \cosh x + k$; **(11)** $\int \cosh x\, dx = \sinh x + k$.

Ricordando la tabella delle derivate delle funzioni elementari e la regola di derivazione delle funzioni quasi-elementari, desumiamo la *tabella degli integrali immediati* riportata nella Figura 3.20, ove si suppone che $k \in \mathbb{R}$, che le funzioni che appaiono abbiano senso (ad esempio, se si scrive $\arcsin \varphi(x)$ si intende che la funzione φ soddisfi $|\varphi(x)| \leq 1$ per ogni x del suo dominio) e che $\alpha \neq -1$.

[49]Un'analogia efficace per comprendere la differenza tra derivare ed integrare è visualizzare il derivare una funzione come l'operazione (pressoché meccanica) di sminuzzare una fotografia, e l'integrare una funzione come l'operazione (ben più complessa e faticosa, talvolta impossibile) di ricostruire la fotografia incollando i pezzetti nei quali essa è stata precedentemente tagliata, senza sapere nulla sul suo aspetto originario.

[50]Nell'analogia fotografica fatta poco fa, ciò equivale a dover ricostruire una fotografia sminuzzata avendo però a disposizione una copia fedele dell'originale da ricostruire!

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
\textbf{(a)} \displaystyle\int \varphi'(x)\varphi(x)^\alpha\,dx = \frac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, & \textbf{(b)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + k, \\
\textbf{(c)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\log^\alpha|\varphi(x)|\,dx = \frac{\log^{\alpha+1}|\varphi(x)|}{\alpha+1} + k, & \textbf{(d)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\log|\varphi(x)|}\,dx = \log\big|\log|\varphi(x)|\big| + k, \\
\textbf{(e)} \displaystyle\int \varphi'(x)e^{\varphi(x)}\,dx = e^{\varphi(x)} + k, & \textbf{(f)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{1-\varphi(x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)}\right| + k, \\
\textbf{(g)} \displaystyle\int \varphi'(x)\sin\varphi(x)\,dx = -\cos\varphi(x) + k, & \textbf{(h)} \displaystyle\int \varphi'(x)\cos\varphi(x)\,dx = \sin\varphi(x) + k, \\
\textbf{(i)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\,dx = \operatorname{tg}\varphi(x) + k, & \textbf{(j)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}\,dx = -\operatorname{cotg}\varphi(x) + k, \\
\textbf{(k)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}\,dx = \arcsin\varphi(x) + k, & \textbf{(l)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}\varphi(x) + k, \\
\textbf{(m)} \displaystyle\int \varphi'(x)\sinh\varphi(x)\,dx = \cosh\varphi(x) + k, & \textbf{(n)} \displaystyle\int \varphi'(x)\cosh\varphi(x)\,dx = \sinh\varphi(x) + k, \\
\textbf{(o)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2+1}}\,dx = \operatorname{sett}\sinh\varphi(x) + k, & \textbf{(p)} \displaystyle\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)^2-1}}\,dx = \operatorname{sett}\cosh\varphi(x) + k. \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 3.20: *Tabella degli integrali immediati.*

Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

$$\textbf{(1)}\int \operatorname{tg} x\,dx;\ \ \textbf{(2)}\int \operatorname{cotg} x\,dx;\ \ \textbf{(3)}\int \cos x\sin^7 x\,dx;\ \ \textbf{(4)}\int \frac{2x}{x^2-1}\log^3(x^2-1)\,dx;\ \ \textbf{(5)}\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx;$$

$$\textbf{(6)}\int \operatorname{tg} x\,\log^3(\cos x)\,dx;\quad \textbf{(7)}\int \frac{e^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}\,dx;\quad \textbf{(8)}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx;\quad \textbf{(9)}\int \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\,dx;$$

$$\textbf{(10)}\int x^2\sin(x^3-1)\,dx;\quad \textbf{(11)}\int \frac{e^x+1}{\sin^2(e^x+x)}\,dx;\quad \textbf{(12)}\int \frac{\sin x}{1+3\cos^2 x}\,dx;\quad \textbf{(13)}\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$$

Risoluzione. Si fa riferimento alla tabella degli integrali immediati nella Figura 3.20. **(1)** Da (b) si ottiene $\int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + k$. **(2)** Ancora da (b) si ottiene $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + k$. **(3)** Da (a) si ha $\int \cos x\sin^7 x\,dx = \frac{1}{8}\sin^8 + k$. **(4)** Da (c) si ha $\int \frac{2x}{x^2-1}\log^3(x^2-1)\,dx = \frac{1}{4}\log^4(x^2-1) + k$. **(5)** Da (b) si ricava $\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx = \log|e^x-4| + k$. **(6)** Da (c) si ha $\int \operatorname{tg} x\,\log^3(\cos x)\,dx = -\frac{1}{4}\log^4(\cos x) + k$. **(7)** Da (e) si ha $\int \frac{e^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}-2}\,dx = 2e^{\sqrt{x}-2} + c$. **(8)** Da (f) si ricava $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + k$. **(9)** Da (f) si ricava $\int \frac{1}{x(1-\log^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\frac{1}{(1-\log^2 x)}\,dx = \log\left|\frac{1+\log x}{1-\log x}\right| + k$. **(10)** Da (g) si ha $\int x^2\sin(x^3-1)\,dx = -\cos(x^3-1) + k$. **(11)** Da (j) si ha $\int \frac{e^x+1}{\sin^2(e^x+x)}\,dx = -\operatorname{cotg}(e^x+x) + k$. **(12)** Da (l) si ha $\int \frac{\sin x}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int (-\frac{1}{\sqrt{3}})\frac{-\sqrt{3}\sin x}{1+(\sqrt{3}\cos x)^2}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos x) + k$. **(13)** Da (p) si ricava $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sett}\cosh(x^2) + k$.

Per il resto dei casi, possiamo fare affidamento solo sugli integrali immediati, sulle proprietà e metodi (come quello del cambio di variabili o dell'"integrazione per parti") elencati nella Proposizione che segue e su alcuni metodi di risoluzione "ad hoc" di cui parleremo tra poco. Si noterà che, a differenza della derivazione, non c'è alcuna formula generale per l'integrale di un prodotto o di una composizione, ed in ultima analisi è proprio ciò che rende quasi sempre impossibile integrare con risultati quasi-elementari.

Proposizione 3.5.3. *Nel calcolo degli integrali indefiniti valgono le seguenti proprietà.*

(i) (Linearità dell'integrale) *Se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha*
$$\int \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx.$$

(ii) (Metodo di integrazione indefinita per sostituzione) *Se $A, B \subset \mathbb{R}$ sono intervalli, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\phi : B \to A$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, si ha*
$$\left(\int f(x)\, dx\right)(\phi(t)) = \int f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\, dt \qquad \text{per ogni } t \in B.$$

(iii) (Metodo di integrazione indefinita per parti) *Se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $F, G : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ con derivate $F' = f$ e $G' = g$, vale*
$$\int F(x)g(x)\, dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\, dx.$$
(In questa formula, $F(x)$ è detto *fattore finito* e $g(x)$ *fattore differenziale* dell'integrazione per parti.)

Dimostrazione. (i) Se F è una primitiva di f e G una primitiva di g, allora $\lambda F + \mu G$ è una primitiva di $\lambda f + \mu g$. (ii) Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora (usando la formula di derivazione delle funzioni composte) $F(\phi(t))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$, ovvero $F(\phi(t))$ è una primitiva di $f(\phi(t))\phi'(t)$. (iii) Essendo $(FG)' = fG + Fg$, se $H(x)$ è una primitiva di $f(x)G(x)$ allora $F(x)G(x) - H$ è una primitiva di $F(x)g(x)$. $\square$

Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti* (in cui $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$):

$$\textbf{(1)} \int (2x^2 - 4e^{-3x})\, dx; \;\; \textbf{(2)} \int (2\sin(3x-1) + \frac{3}{\sqrt[5]{x}})\, dx; \;\; \textbf{(3)} \int (\frac{3}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} - \sqrt{2x-3})\, dx; \;\; \textbf{(4)} \int x^2 e^{-x}\, dx;$$
$$\textbf{(5)} \int x\sin(2x-5)\, dx; \quad \textbf{(6)} \int x \arcsin x^2\, dx; \quad \textbf{(7)} \int \log x\, dx; \quad \textbf{(8)} \int \sin^2 x\, dx; \quad \textbf{(9)} \int \cos^2 \frac{x}{5}\, dx;$$
$$\textbf{(10)} \int e^{2x}\sin(x-3)\, dx; \quad \textbf{(11)} \int \frac{x^2}{x^3+1}\log^2(x^3+1)\, dx; \quad \textbf{(12)} \int \operatorname{arctg} 2x\, dx; \quad \textbf{(13)} \int \frac{1}{\sin x}\, dx;$$
$$\textbf{(14)} \int \operatorname{tg}^2(3x-1)\, dx; \quad \textbf{(15)} \int e^{\beta x}\sin\gamma x\, dx; \quad \textbf{(16)} \int x^n e^{\beta x}\, dx; \quad \textbf{(17)} \int x^n \sin\gamma x\, dx.$$

Risoluzione. **(1)** Ponendo $f(x) = 2x^2 - 4e^{-3x}$ si ottiene $\int f(x)\, dx = 2\int x^2 dx - 4\int e^{-3x} dx = 2\frac{x^3}{3} - 4(-\frac{1}{3})\int(-3)e^{-3x}dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}e^{-3x} + k$. **(2)** Ponendo $t = 3x-1$, si ha $\int (2\sin(3x-1) + \frac{3}{\sqrt[5]{x}})\, dx = 2\int \sin(3x-1)\, dx + 3\int x^{-\frac{1}{5}}\, dx = 2\int \sin t \frac{1}{3} dt + 3\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{3}\cos(3x-1) + \frac{15}{4}\sqrt[5]{x^4} + k$. **(3)** Se $f(x) = 3\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \sqrt{2x-3}$, ponendo $t=\sqrt{x}$ e $\tau=2x-3$ (da cui $dx=2t\,dt=\frac{1}{2}d\tau$) si ha $\int f(x)\,dx=3\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx-\int\sqrt{2x-3}\,dx=3\int\frac{\cos t}{t}2t\,dt-\int\sqrt{\tau}\frac{1}{2}d\tau=6\sin t-\frac{1}{3}\tau\sqrt{\tau}+k=6\sin\sqrt{x}-\frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}+k$. **(4)** Se $h(x)=x^2e^{-x}$, integrando per parti con fattore finito $F(x)=x^2$ (dunque $f(x)=2x$) e fattore differenziale $g(x)=e^{-x}$ (dunque $G(x)=-e^{-x}$) si ha $\int h(x)\,dx=x^2(-e^{-x})-\int 2x(-e^{-x})\,dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx$; integrando $\int xe^{-x}\,dx$ di nuovo per parti con fattore finito $F(x)=x$ (dunque $f(x)=1$) e fattore differenziale $g(x)=e^{-x}$ (dunque $G(x)=-e^{-x}$) si ottiene $\int xe^{-x}\,dx=x(-e^{-x})-\int 1(-e^{-x})\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}+k$, da cui, tornando al problema originale, si ha $\int h(x)\,dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx=-x^2e^{-x}+2(-(x+1)e^{-x})+k=-(x^2+2x+2)e^{-x}+k$. Giusto per esercizio, ripartiamo da capo usando stavolta il cambio di variabili $t=-x$, ovvero $x=\phi(t)=-t$: si ha (usando due volte l'integrazione per parti come prima) $(\int h(x)\,dx)(t)=\int(-t)^2e^t(-1)\,dt=-\int t^2e^t\,dt=-\big(t^2e^t-\int(2t)e^t\,dt\big)=-t^2e^t+2(te^t-\int e^t\,dt)=-(t^2-2t+2)e^t+k$ da cui, ricordando che $t=-x$ si trova nuovamente $\int h(x)\,dx=-(x^2+2x+2)e^{-x}+k$. **(5)** Se $h(x)=x\sin(2x-5)$, integrando per sostituzione con $2x-5=t$ (e dunque $x=\phi(t)=\frac{t+5}{2}$) si ha $(\int h(x)\,dx)(t)=\int\frac{t+5}{2}\sin t\,\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{4}\int t\sin t\,dt+\frac{5}{4}\sin t\,dt=-\frac{5}{4}\cos t+\frac{1}{4}\int t\sin t\,dt$; integrando poi $\int t\sin t\,dt$ per parti con fattore finito $F(t)=t$ (dunque $f(t)=1$) e fattore differenziale $g(t)=\sin t$ (dunque $G(t)=-\cos t$) si ricava $\int t\sin t\,dt=t(\cos t)-\int 1(-\cos t)\,dt=-t\cos t+\int\cos t\,dt=\sin t-t\cos t$, perciò ritornando al problema originale si ha $(\int h(x)\,dx)(t)=-\frac{5}{4}\cos t+\frac{1}{4}\int t\sin t\,dt=-\frac{5}{4}\cos t+\frac{1}{4}(\sin t-t\cos t)+k=\frac{1}{4}\big(\sin t-(t+1)\cos t\big)+k$, e perciò, ricordando che $t=2x-5$, si ha infine $\int h(x)\,dx=\frac{1}{4}\big(\sin(2x-5)-2(x-2)\cos(2x-5)\big)+k$. **(6)** Calcoliamo $\int x\arcsin x^2\,dx$. Usando il cambio di variabile $x^2=t$ (ovvero $x=\sqrt{t}$) si ha $(\int x\arcsin x^2\,dx)(t)=\int\sqrt{t}\arcsin t\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\int\arcsin t\,dt$. Ci resta dunque da calcolare $\int\arcsin t\,dt$. Usiamo un trucco: pensando $\arcsin t=1\arcsin t$, integriamo per parti con fattore finito (ovviamente) $F(t)=\arcsin t$ e fattore differenziale $g(t)=1$, ottenendo perciò $\int\arcsin t\,dt=t\arcsin t-\int t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=t\arcsin t-(-\frac{1}{2})\int(1-t^2)'(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=t\arcsin t+\frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{1/2}+k=t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+k$; dunque $(\int x\arcsin x^2\,dx)(t)=\frac{1}{2}\int\arcsin t\,dt=\frac{1}{2}(t\arcsin t+\sqrt{1-t^2})+k$ da cui, ricordando che $t=x^2$, si ricava $\int x\arcsin x^2\,dx=\frac{1}{2}(x^2\arcsin x^2+\sqrt{1-x^4})+k$. **(7)** Il trucco precedente funziona anche per $\int\log x\,dx$: pensando $\log x=1\log x$ e integrando per parti con $F(x)=\log x$ e $g(x)=1$ si ricava $\int\log x\,dx=x\log x-\int x(\frac{1}{x})\,dx=x\log x-\int 1\,dx=x\log x-x+k=x(\log x-1)+k$. **(8)** Calcoliamo $\int\sin^2x\,dx$. Dalle formule di bisezione ricaviamo $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, da cui $\int\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x=\frac{x-\sin x\cos x}{2}+k$. **(9)** Calcoliamo $\int\cos^2\frac{x}{5}\,dx$. Posto $t=\frac{x}{5}$, l'integrale diventa $5\int\cos^2t\,dt$; ragionando come prima si ha allora $\int\cos^2t\,dt=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{t+\sin t\cos t}{2}$, e risostituendo $t=\frac{x}{5}$ si ricava infine $\int\cos^2\frac{x}{5}\,dx=5\frac{\frac{x}{5}+\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}}{2}+k=\frac{x+5\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}}{2}+k$. **(10)** Calcoliamo $\int e^{2x}\sin(x-3)\,dx$. Sostituendo $t=x-3$ (ovvero $x=\phi(t)=t+3$) si ricava $(\int e^{2x}\sin(x-3)\,dx)(t)=\int e^{2(t+3)}\sin t\,1\,dt=e^6\int e^{2t}\sin t\,dt$. Ci siamo dunque ridotti a calcolare $\int e^{2t}\sin t\,dt$: integrando per parti due volte, si ha $\int e^{2t}\sin t\,dt=e^{2t}(-\cos t)-\int 2e^{2t}(-\cos t)\,dt=-e^{2t}\cos t+2\int e^{2t}\cos t\,dt=-e^{2t}\cos t+2(e^{2t}\sin t-\int 2e^{2t}\sin t\,dt)=e^{2t}(2\sin t-\cos t)-4\int e^{2t}\sin t\,dt$; confrontando il primo e l'ultimo membro si ha allora $\int e^{2t}\sin t\,dt=e^{2t}(2\sin t-\cos t)-4\int e^{2t}\sin t\,dt$, da cui $\int e^{2t}\sin t\,dt=\frac{1}{5}e^{2t}(2\sin t-\cos t)+k$. Ricordando infine che $t=x-3$, si ottiene $\int e^{2x}\sin(x-3)\,dx=\frac{e^6}{5}e^{2(x-3)}(2\sin(x-3)-\cos(x-3))+k=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin(x-3)-\cos(x-3))+k$. **(11)** Calcoliamo $\int\frac{x^2}{x^3+1}\log^2(x^3+1)\,dx$: si tratta di un integrale immediato, perché x^2 è "quasi" la derivata di x^3+1, e dunque $\int\frac{x^2}{x^3+1}\log^2(x^3+1)\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\log^2(x^3+1)\,dx=\frac{1}{3}\frac{\log^3(x^3+1)}{3}+k=\frac{1}{9}\log^3(x^3+1)+k$. **(12)** Ponendo $2x=t$, l'integrale diventa $\int\operatorname{arctg}2x\,dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}t\,dt$. Calcoliamo $\int\operatorname{arctg}t\,dt$ per parti usando ancora il trucco $\operatorname{arctg}t=1\operatorname{arctg}t$ e con $F(t)=\operatorname{arctg}t$ e $g(t)=1$: si ricava $\int\operatorname{arctg}t\,dt=t\operatorname{arctg}t-\int t\frac{1}{1+t^2}\,dt=t\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{1+t^2}\,dt=t\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\log(1+t^2)+k=t\operatorname{arctg}t-\log\sqrt{1+t^2}+k$: pertanto $\int\operatorname{arctg}2x\,dx=\frac{1}{2}(2x\operatorname{arctg}2x-\log\sqrt{1+(2x)^2})+k=x\operatorname{arctg}2x-\log\sqrt[4]{1+4x^2}+k$. **(13)** Calcoliamo $\int\frac{1}{\sin x}\,dx$. Conviene usare il cambio di variabile dato dalle formule parametriche $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (dunque $x=2\operatorname{arctg}t$), per cui $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; si ricava perciò $\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|+k=$

$\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+k$. **(14)** Posto $t = 3x-1$, si ha $\int \operatorname{tg}^2(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2 t\,dt = \frac{1}{3}\int(\frac{1}{\cos^2 t}-1)\,dt = \frac{1}{3}(\operatorname{tg} t - t)+k = \frac{1}{3}(\operatorname{tg}(3x-1)-3x+1)+k$. **(15)** L'integrale $\int e^{\beta x}\sin\gamma x\,dx$ generalizza quello proposto in (10), e si risolve in modo analogo. Integrando due volte per parti, si ha $\int e^{\beta x}\sin\gamma x\,dx = \frac{1}{\beta}e^{\beta x}\sin\gamma x - \frac{\gamma}{\beta}\int e^{\beta x}\cos\gamma x\,dx = \frac{1}{\beta}e^{\beta x}\sin\gamma x - \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}e^{\beta x}\cos\gamma x - \frac{\gamma}{\beta}\int e^{\beta x}(-\sin\gamma x)\,dx\right) = \frac{1}{\beta^2}e^{\beta x}(\beta\sin\gamma x - \gamma\cos\gamma x) - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\int e^{\beta x}\sin\gamma x\,dx$, da cui $\int e^{\beta x}\sin\gamma x\,dx = \frac{1}{\beta^2+\gamma^2}e^{\beta x}(\beta\sin\gamma x - \gamma\cos\gamma x)$. **(16)** $\int x^n e^{\beta x}\,dx$ generalizza (4); procedendo in modo analogo, si trova $\frac{e^{\beta x}}{\beta^{n+1}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{n!}{(n-j)!}(\beta x)^{n-j}$. **(17)** $I_n = \int x^n\sin\gamma x\,dx$ generalizza (5). Per parti, si ottiene $\int x^n\sin\gamma x\,dx = -\frac{1}{\gamma}x^n\cos\gamma x + \frac{n}{\gamma}\int x^{n-1}\cos\gamma x\,dx = -\frac{1}{\gamma}x^n\cos\gamma x + \frac{n}{\gamma^2}x^{n-1}\sin\gamma x - \frac{n(n-1)}{\gamma^2}\int x^{n-2}\sin\gamma x\,dx$, ovvero $I_n = \frac{x^{n-1}}{\gamma^2}(n\sin\gamma x - \gamma x\cos\gamma x) - \frac{n(n-1)}{\gamma^2}I_{n-2}$: in questo modo si può calcolare I_n se si conosce I_{n-2}. Basta dunque calcolare esplicitamente i casi $n=0$ (che dà $I_0 = -\frac{1}{\gamma}\cos\gamma x$, da cui $I_2 = \frac{x}{\gamma^2}(2\sin\gamma x - \gamma x\cos\gamma x) - \frac{2}{\gamma^2}(-\frac{1}{\gamma}\cos\gamma x) = \frac{1}{\gamma^3}(2\gamma x\sin\gamma x(2-\gamma^2x^2)\cos\gamma x)$, $I_4 = ...$) e $n = 1$ (che dà $I_1 = -\frac{x}{\gamma}\cos\gamma x + \frac{1}{\gamma^2}\sin\gamma x$, da cui $I_3 = ...$).

Integrali di funzioni razionali fratte (casi particolari) Per trovare le primitive di una *funzione razionale fratta* $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi a coefficienti reali (diciamo di grado rispettivamente m ed n), si procede come segue. Innanzitutto, se $f(x)$ è un polinomio (ovvero, se $A(x)$ è divisibile per $B(x)$) l'integrazione è immediata: infatti, se $f(x) = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ per la linearità si ha

$$\int (a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0)\,dx = \frac{a_d}{d+1}x^{d+1} + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + k.$$

Così, se $m \geq n$ si può dividere $A(x)$ per $B(x)$ ottenendo $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$ con $Q(x)$ polinomio quoziente di grado $m-n$ ed $R(x)$ polinomio di grado $< n$, e pertanto $\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx$: si è dunque ridotto il problema al calcolo di $\int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx$. Non è pertanto restrittivo supporre fin da subito che sia $m < n$, ovvero che si abbia a che fare con una funzione razionale fratta *propria*: iniziamo trattando alcuni casi particolari.

(1) Come si è visto, se $f(x) = \frac{a}{x-\alpha}$ allora

$$\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a\log|x-\alpha| + k;$$

(2) se $f(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^\gamma}$ con $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ allora

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^\gamma}\,dx = -\frac{a}{\gamma-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{\gamma-1}} + k;$$

(3) se $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ ove il denominatore x^2+cx+d abbia radici reali distinte α e β, si possono trovare due costanti reali A e B tali che $f(x) = \frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$ (dai conti si ricava facilmente $A = \frac{b+a\alpha}{\alpha-\beta}$ e $B = -\frac{b+a\beta}{\alpha-\beta}$): dunque

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + k;$$

(4) se invece $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$ ove il denominatore x^2+cx+d non abbia radici reali perché $c^2-4d<0$, scrivendo $x^2+cx+d=x^2+cx+\frac{c^2}{4}+(d-\frac{c^2}{4})=(x-u)^2+v^2$ (con $u=-\frac{c}{2}$ e $v=\sqrt{d-\frac{c^2}{4}}$) ci si è ridotti alla forma $f(x)=\frac{ax+b}{(x-u)^2+v^2}=a\frac{x-u}{(x-u)^2+v^2}+\frac{au+b}{(x-u)^2+v^2}=\frac{a}{2}\frac{2(x-u)}{(x-u)^2+v^2}+\frac{au+b}{v}\frac{\frac{1}{v}}{1+(\frac{x-u}{v})^2}$, da cui si ricava immediatamente

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx=\frac{a}{2}\log\big((x-u)^2+v^2\big)+\frac{au+b}{v}\operatorname{arctg}\frac{x-u}{v}+k.$$

Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

$$\textbf{(1)}\int \frac{4}{(3x+1)^5}\,dx;\qquad \textbf{(2)}\int \frac{3x^2+4x-8}{x^2+2x-3}\,dx;\qquad \textbf{(3)}\int \frac{2x-1}{x^2+x+3}\,dx;\qquad \textbf{(4)}\int \frac{x^3+1}{2x-3}\,dx.$$

Risoluzione. **(1)** Sia $f(x)=\frac{4}{(3x+1)^5}$. Col cambio di variabile $t=3x+1$ (da cui $dx=\frac{1}{3}\,dt$) si ricava $\int f(x)\,dx=4\int\frac{1}{t^5}\frac{1}{3}\,dt=\frac{4}{3}\frac{t^{-4}}{-4}=-\frac{1}{3}\frac{1}{t^4}+k=-\frac{1}{3(3x+1)^4}+k$. **(2)** Sia $f(x)=\frac{3x^2+4x-8}{x^2+2x-3}$. Dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene $3x^2+4x-8=3(x^2+2x-3)-2x+1$, e perciò $f(x)=3-\frac{2x-1}{x^2+2x-3}$: si ha allora $\int f(x)\,dx=3x-\int\frac{2x-1}{x^2+2x-3}\,dx$, e ci siamo ridotti al calcolo di $\int\frac{2x-1}{x^2+2x-3}\,dx$. Poiché $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, si può scrivere $\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=\frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2}{x+3}$ per opportune costanti $c_1,c_2\in\mathbb{R}$: facendo il denominatore comune a destra si ha $\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=\frac{c_1(x+3)+c_2(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{(c_1+c_2)x+(3c_1-c_2)}{x^2+2x-3}$ da cui si ricava $c_1+c_2=2$ e $3c_1-c_2=-1$, che dà $c_1=\frac{1}{4}$ e $c_2=\frac{7}{4}$. Pertanto $\frac{2x-1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}+7\frac{1}{x+3})$, da cui $\int\frac{2x-1}{x^2+2x-3}\,dx=\frac{1}{4}(\int\frac{1}{x-1}\,dx+7\int\frac{1}{x+3}\,dx)=\frac{1}{4}(\log|x-1|+7\log|x+3|)+k$ e, tornando al problema iniziale, $\int f(x)\,dx=3x-\frac{1}{4}(\log|x-1|+7\log|x+3|)+k$. **(3)** Sia $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x+3}$. Seguendo il procedimento suggerito in precedenza, si ha $\frac{2x-1}{x^2+2x+3}=\frac{2x-1}{(x+1)^2+2}=2\frac{x+1}{(x+1)^2+2}-\frac{3}{(x+1)^2+2}=\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1/\sqrt{2}}{1+(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2}$, da cui $\int f(x)\,dx=\log(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\big(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\big)+k$. **(4)** Sia $f(x)=\frac{x^3+1}{2x-3}$. Per i conti conviene far diventare il denominatore "monico" (ovvero, con coefficiente dominante 1). Si ha dunque $\frac{x^3+1}{2x-3}=\frac{1}{2}\frac{x^3+1}{x-\frac{3}{2}}$; dividendo x^3+1 per $x-\frac{3}{2}$ si ottiene $(x^3+1)=(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})(x-\frac{3}{2})+\frac{35}{8}$, e pertanto $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})+\frac{35/16}{x-\frac{3}{2}}$, da cui $\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\big(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{9}{4}x\big)+\frac{35}{16}\log|x-\frac{3}{2}|+k=\frac{1}{48}\big(8x^3+6x^2+6x+105\log|x-\frac{3}{2}|\big)+k$.

Integrali di funzioni razionali fratte (caso generale) **e integrali binomi.** Il motivo per cui si sono trattati prima alcuni casi particolari per integrare funzioni razionali fratte è che, per il caso generale, si può usare il seguente metodo (che non dimostriamo):

Proposizione 3.5.4. (Metodo di Hermite) *Se $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ è una frazione razionale propria reale con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi coprìmi di grado rispettivamente m ed n, col denominatore nella forma*

$$B(x)=(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_r)^{m_r}\big((x-u_1)^2+v_1^2\big)^{m_1'}\ldots\big((x-u_l)^2+v_1^2\big)^{m_l'}$$

(ove $m_1+\cdots+m_r+2(m_1'+\cdots+m_l')=n$), *esistono e sono unici $c_1,\ldots,c_r;d_1,\ldots,d_l;e_1,\ldots,e_l\in\mathbb{R}$ ed un polinomio $C(x)$ di grado $<n-r-2l$ tale, posto*

$$B_0(x)=(x-a_1)^{m_1-1}\cdots(x-a_r)^{m_r-1}\big((x-u_1)^2+v_1^2\big)^{m_1'-1}\ldots\big((x-u_l)^2+v_1^2\big)^{m_l'-1},$$

si abbia

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i}{x-a_i}+\sum_{j=1}^{l}\frac{d_jx+e_j}{(x-u_l)^2+v_l^2}+\left(\frac{C(x)}{B_0(x)}\right)';$$

di conseguenza

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{r}\int \frac{c_i}{x-a_i}\,dx+\sum_{j=1}^{l}\int \frac{d_jx+e_j}{(x-u_l)^2+v_l^2}\,dx+\frac{C(x)}{B_0(x)}+k\\ &= \sum_{i=1}^{r} c_i\log|x-a_i|+\sum_{j=1}^{l} d_j\log\sqrt{(x-u_j)^2+v_j^2}+\\ &\qquad\qquad +\sum_{j=1}^{l}\frac{d_ju_j+b_j}{v_j}\operatorname{arctg}\frac{x-u_j}{v_j}\;+\frac{C(x)}{B_0(x)}+k.\end{aligned}$$

Nella forma di integrali razionali possono essere ricondotti anche alcuni integrali *binomi*, ovvero di funzioni del tipo $f(x)=x^p(ax^q+b)^r$ con $a,b\in\mathbb{R}$ e $p,q,r\in\mathbb{Q}$: (1) se $\frac{p+1}{q}\in\mathbb{Z}$ si pone $ax^q+b=t^h$ con h il denominatore di r; (2) se $r\in\mathbb{Z}$ si pone $x^q=t^h$ con h il denominatore di $\frac{p+1}{q}$; (3) se $\frac{p+1}{q}+r\in\mathbb{Z}$, si pone $\frac{ax^q+b}{x^q}=t^h$ con h il denominatore di r.[51]

Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti:*

$$\textbf{(1)}\int\frac{5x}{(x-2)^3}\,dx;\qquad \textbf{(2)}\int -\frac{x^6-x^5-9x^4+40x^3-46x^2-7x+62}{7(x+1)^2(x-2)(x^2-3x+4)^2}\,dx;$$

$$\textbf{(3)}\int 5\sqrt{x}(2-\sqrt[3]{x})^2\,dx;\quad \textbf{(4)}\int\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1}}\,dx.$$

Risoluzione. **(1)** Sia $f(x)=\frac{5x}{(x-2)^3}$. Trascurando per un attimo la costante moltiplicativa 5 (ché tanto uscirà dall'integrale), il metodo di Hermite dice che $\frac{x}{(x-2)^3}=\frac{c}{x-2}+\big(\frac{ux+v}{(x-2)^2}\big)'$, con $c,u,v\in\mathbb{R}$ costanti reali da determinare. Calcolando la derivata, si ha perciò $\frac{x}{(x-2)^3}=\frac{c}{x-2}+\frac{-ux-2(u+v)}{(x-2)^3}=\frac{cx^2-(4c+u)x+2(2c-u-v)}{(x-2)^3}$ da cui, per il principio d'identità dei polinomi, si ha $c=0$, $-(4c+u)=1$ e $2(2c-u-v)=0$, ovvero $c=0$, $u=-1$ e $v=1$. Si ricava pertanto $\int f(x)\,dx=5\int\frac{x}{(x-2)^3}\,dx=5\int\big(\frac{-x+1}{(x-2)^2}\big)'\,dx$, da cui si ricava $\int f(x)\,dx=-5\frac{x-1}{(x-2)^2}+k$. **(2)** Sia $f(x)=-\frac{x^6-x^5-9x^4+40x^3-46x^2-7x+62}{7(x+1)^2(x-2)(x^2-3x+4)^2}$. Trascurando il fattore costante $-\frac{1}{7}$, il metodo di Hermite dice che si può scrivere $\frac{x^6-x^5-9x^4+40x^3-46x^2-7x+62}{(x+1)^2(x-2)(x^2-3x+4)^2}=\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x-2}+\frac{dx+e}{x^2-3x+4}+\big(\frac{ux^2+vx+w}{(x+1)(x^2-3x+4)}\big)'$ per costanti $c_1,c_2,d,e,u,v,w\in\mathbb{R}$ da determinare. Derivando a destra e dopo lunghi calcoli si determina che $c_1=-1$, $c_2=2$, $u=v=0$ e $w=-1$: dunque $\int f(x)\,dx=-\frac{1}{7}\big(-\int\frac{1}{x+1}\,dx+2\int\frac{1}{x-2}\,dx-\int\big(\frac{1}{(x+1)(x^2-3x+4)}\big)'\,dx\big)=\frac{1}{7}\big(\log|x+1|-2\log|x-2|+\frac{1}{(x+1)(x^2-3x+4)}\big)+k$. **(3)** Sia $f(x)=5\sqrt{x}(2-\sqrt[3]{x})^2$. A parte il fattore costante 5, si tratta di un integrale binomio $x^p(ax^q+b)^r$ con $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{3}$ e $r=2$. Essendo $r\in\mathbb{Z}$ e $\frac{p+1}{q}=\frac{9}{2}$, si era suggerito di porre $\sqrt[3]{x}=t^2$, ovvero $x=\phi(t)=t^6$: si ricava allora $\int f(x)\,dx=5\int t^3(2-t^2)^2\,6t^5\,dt=30\int t^8(2-t^2)^2\,dt=30\int(4t^8-4t^{10}+t^{12})\,dt=30(\frac{4}{9}t^9-\frac{4}{11}t^{11}+\frac{1}{13}t^{13})+k=30(\frac{4}{9}t^9-\frac{4}{11}t^{11}+\frac{1}{13}t^{13})+k$ da cui, essendo $t=x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{x}$, si ricava $\int f(x)\,dx=30x(\frac{4}{9}\sqrt{x}-\frac{4}{11}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{13}x\sqrt[6]{x})+k$. **(4)** Sia $f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1}}$. Anche qui si ha un integrale binomio, essendo $\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1}}=x^p(x^q-1)^r$ con $p=-2$, $q=\frac{3}{2}$ e $r=-\frac{1}{3}$. Poiché $\frac{p+1}{q}+r=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1\in\mathbb{Z}$, si porrà $\frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^{\frac{3}{2}}}=t^3$, ovvero $x=\phi(t)=(1-t^3)^{-\frac{2}{3}}$, ottenendo $\int f(x)\,dx=\int x^{-2}(x^{\frac{3}{2}}-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx=\int(1-t^3)^{\frac{4}{3}}t^{-1}(1-t^3)^{\frac{1}{3}}\big(-\frac{2}{3}(-3t^2)(1-t^3)^{-\frac{5}{3}}\big)\,dt=2\int t^{-1}t^2\,dt=2\int t\,dt=t^2+k$ da cui, ricordando che $t=\sqrt[3]{\frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$, si ottiene $\int f(x)\,dx=\frac{\sqrt[3]{(x\sqrt{x}-1)^2}}{x}+k$.

[51] Ad esempio, nell'ultimo caso, posto $r=\frac{u}{h}$ e $m:=\frac{p+1}{q}+r\in\mathbb{Z}$, da $\frac{ax^q+b}{x^q}=t^h$ si ricava $b=(t^h-a)x^q$ ovvero $x=\phi(t)=b^{\frac{1}{q}}(t^h-a)^{-\frac{1}{q}}$, e dunque si ricava $\int x^p(ax^q+b)^r\,dx=\int b^{\frac{p}{q}}(t^h-a)^{-\frac{p}{q}}t^ub^r(t^h-a)^{-r}b^{\frac{1}{q}}(-\frac{1}{q})(t^h-a)^{-\frac{1}{q}-1}\,dt=-\frac{1}{q}b^m\int t^u(t^h-a)^{-m-1}\,dt$, è l'integrale di una funzione razionale fratta.

3.5.2 Integrazione definita alla Riemann (calcolo delle aree)

Ci occupiamo ora del problema del calcolo dell'area di zone *finite* (cioè, limitate) del piano cartesiano.[52] Più precisamente, lo scopo è di sviluppare un metodo per calcolare in modo preciso l'area di quelle zone il cui bordo si possa decomporre come unione di grafici di funzioni continue di x definite su intervalli (ovvero, da curve della forma $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$ con $f : A \to \mathbb{R}$ funzione continua dell'intervallo $A \subset \mathbb{R}$) ed eventualmente da rette verticali della forma $x = k$ (vedi Figura 3.21(a)).

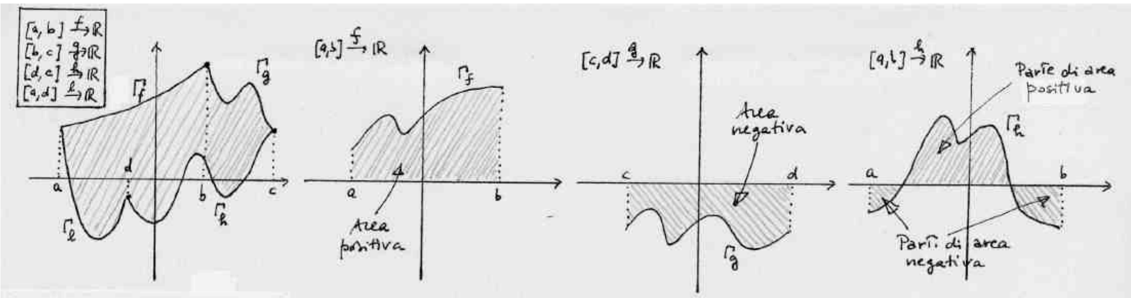

Figura 3.21: *Area di un insieme piano delimitato da grafici di funzioni; aree con segno.*

Iniziamo dunque a studiare l'*area con segno* (vedi Figura 3.21(b,c,d)) della zona del piano compresa tra il grafico di una funzione e l'asse delle ascisse. L'espressione "con segno" vuole indicare il fatto che, durante il calcolo dell'area di tale zona, le aree delle parti di essa che si trovano al di sopra (risp. al di sotto) dell'asse sono da considerarsi positive (risp. negative).

Funzioni integrabili su un intervallo (secondo Riemann) È opportuno decomporre il problema che vogliamo trattare, iniziando dalle funzioni che meglio di altre permettono questa operazione.

Consideriamo un intervallo compatto (cioè chiuso e limitato) $[a, b]$ della retta reale, e sia K un qualsiasi sottoinsieme di $[a, b]$. Definiamo la *funzione caratteristica* $\chi_K : [a, b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K, \\ 0 & \text{se } x \notin K : \end{cases}$$

si tratta della funzione che vale 1 su A e 0 altrove. Il grafico di χ_K si presenta dunque come uno "scalino alto 1" al di sopra di K (vedi Figura 3.22(a)).
Più generalmente, una funzione $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dirà *semplice* (o *a scalino*) se esiste una "suddivisione" di $[a, b]$ (ovvero una successione di numeri reali $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} <$

[52]in rapporto all'unità d'area determinata dalle unità di misura scelte nel dotare sia l'asse delle ascisse che quello delle ordinate di un sistema di coordinate (usualmente, come sappiamo, la lunghezza unitaria viene scelta uguale per entrambi gli assi).

$x_n = b$) tale che s sia costante quando ristretta ad ogni intervallo $]x_{j-1}, x_j[$ per $j = 1, \dots, n$ (vedi Figura 3.22(b)).[53] Qualsiasi suddivisione di $[a, b]$ tale che s abbia questa proprietà si dirà essere una *suddivisione associata* ad s. Denoteremo con $S([a, b])$ l'insieme delle funzioni semplici su $[a, b]$: è abbastanza facile mostrare che somme, prodotti e multipli scalari di funzioni semplici sono ancora funzioni semplici.

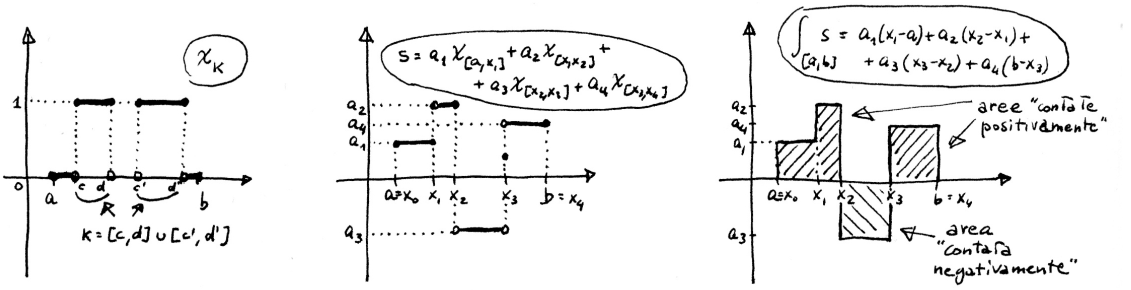

Figura 3.22: *Funzione caratteristica; funzione semplice; suo integrale.*

Le funzioni di $S([a, b])$ sono proprio quelle che cercavamo per iniziare a parlare di "area (con segno) della zona del piano cartesiano compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse": tale area sarà, in questo caso particolarmente eloquente, quella ottenuta sommando, con segno, le aree di una famiglia *finita* di rettangoli. Definiamo dunque la funzione *integrale* ponendo

$$\int_{[a,b]} : S([a, b]) \to \mathbb{R}, \qquad \int_{[a,b]} s = \sum\nolimits_{j=1}^{N} a_j (x_j - x_{j-1})$$

ove $(x_j)_{j=0,1,\dots,N}$ è una qualsiasi suddivisione di $\mathbb{R}$ associata ad f, e si suppone che $s|_{]x_{j-1},x_j[} \equiv a_j \in \mathbb{R}$ per ogni $j = 1, \dots, N$ (vedi Figura 3.22(c)).[54] Il numero reale $\int_{[a,b]} s$, detto *integrale di s esteso ad* $[a, b]$ si denota anche come $\int_{[a,b]} s(x)\, dx$. Dalla definizione si vede subito che la funzione $\int_{[a,b]} : S([a, b]) \to \mathbb{R}$ è lineare (ovvero $\int_{[a,b]} (\lambda s + \mu t) = \lambda \int_{[a,b]} s + \mu \int_{[a,b]} t$), isotona (ovvero se $s \le t$, cioè $s(x) \le t(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_{[a,b]} s \le \int_{[a,b]} t$) e soddisfa alla disuguaglianza fondamentale $\left| \int_{[a,b]} s \right| \le \int_{[a,b]} |s|$, con uguaglianza se e solo se $s \ge 0$.[55]

Esempio. Se $s = \chi_{[a,b]}$ si ha $\int_{[a,b]} s = b - a$ (la *lunghezza* dell'intervallo $[a, b]$). Lo stesso risultato si ottiene scegliendo $s = \chi_{]a,b[}$, oppure $s = \chi_{]a,b]}$, oppure $s = \chi_{[a,b[}$.

[53] Osserviamo che si richiede che s sia costante nell'*interno* degli intervalli, e che quello che accade nei punti di separazione non interessa per nulla: qualsiasi valore s assuma, per questa definizione s resta sempre a scalino.

[54] Si noti che la definizione è buona, ovvero se si prendono due suddivisioni di $\mathbb{R}$ associate a s il risultato dell'integrale non cambia (facile esercizio: "triangolando" sull'unione delle due suddivisioni si può supporre che una sia contenuta nell'altra...)

[55] Per le prime due affermazioni prendere, come già visto, due suddivisioni associate a f ed a g, e considerare la loro unione, che sarà associata ad entrambe. La disuguaglianza fondamentale è ovvia.

Torniamo ora al caso generale, che intendiamo trattare "approssimando con funzioni semplici". Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione qualsiasi e $s \in S([a, b])$ è una funzione semplice che maggiora (risp. minora) f, ovvero tale che $f \le s$ (risp. $f \ge s$)[56], l'integrale $\int_{[a,b]} s$ si dirà una *somma superiore* (risp. *inferiore*) di f sull'intervallo $[a, b]$ (vedi Figura 3.23).

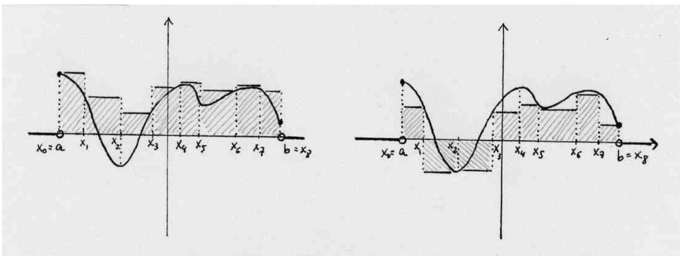

Figura 3.23: *Somme superiori ed inferiori.*

Se s^+ e s^- sono una somma superiore e inferiore di una medesima f si ha $s^- \le s^+$ e dunque, per isotonia, si ha $\int_{[a,b]} s^- \le \int_{[a,b]} s^+$. Diremo che f è *integrabile* su $[a, b]$ (secondo Riemann) se "l'area sottesa dal grafico di f si lascia approssimare a piacere da una somma superiore e da una inferiore", ovvero se

$$\begin{cases} \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esistono } s_\varepsilon^+, s_\varepsilon^- \in S([a, b]) \text{ tali che} \\ s_\varepsilon^- \le f \le s_\varepsilon^+ \quad \text{e} \quad \int_{[a,b]} s_\varepsilon^+ - \int_{[a,b]} s_\varepsilon^+ = \int_{[a,b]} (s_\varepsilon^+ - s_\varepsilon^+) < \varepsilon. \end{cases}$$

In tal caso, il valore comune di $\mathbb{R}$ al quale tendono le somme superiori e le somme inferiori di f viene detto *integrale* di f esteso a $[a, b]$, e si indica con i simboli[57]

$$\int_{[a,b]} f \qquad \text{oppure} \qquad \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

Si dimostra facilmente che:

Proposizione 3.5.5. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$, allora f è integrabile su ogni altro intervallo $[a', b']$ contenuto in $[a, b]$.*

Il significato geometrico dell' integrale di f esteso a $[a, b]$ è dunque chiaro: ottenuto tramite convergenza di aree a scalino superiori ed inferiori ad un medesimo valore $\int_{[a,b]} f$, esso rappresenta l'*area della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'intervallo $[a, b]$ dell'asse x, contata col segno*, ovvero in cui si considerano positive le aree al di sopra dell'asse x e negative quelle al di sotto. Appare dunque abbastanza ovvio che cambiare la funzione su un numero *finito* di punti non cambi il risultato:

[56] Naturalmente, data un f qualsiasi, siffatte funzioni semplici potrebbero non esistere!

[57] Detto in un modo più preciso: considerando i sottoinsiemi $U_f^+ = \{\int_{[a,b]} s^+ : s^+ \in S([a, b]),\ s^+ \ge f\}$ e $U_f^- = \{\int_{[a,b]} s^- : s^- \in S([a, b]),\ s^- \le f\}$ di $\mathbb{R}$ vale certamente $U_f^- \le U_f^+$. Ebbene, f è *integrabile* su $[a, b]$ (secondo Riemann) se U_f^- e U_f^+ sono classi contigue in $\mathbb{R}$; e, in tal caso, l'unico elemento separatore tra U_f^- e U_f^+ (vedi Proposizione 1.2.3) si dirà *integrale* di f esteso a $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.5.6. *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni che differiscono solo su un numero finito di punti, allora f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se lo è g, e vale*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g.$$

Notiamo la seguente

Proposizione 3.5.7. *Una funzione integrabile su $[a, b]$ è anche limitata su $[a, b]$, ma il viceversa non è sempre vero.*

Infatti, se f è integrabile su $[a, b]$ allora di certo esistono $s^\pm \in S([a, b])$ tali che $s^- \leq f \leq s^+$, dunque f è limitata (perché lo sono sia s^+ che s^-). Ma non è sempre vero che una funzione limitata su $[a, b]$ è anche integrabile su $[a, b]$. Ad esempio, dentro $[a, b]$ si consideri il sottoinsieme $K = \mathbb{Q} \cap [a, b]$: allora $f = \chi_K$ è ovviamente limitata in $[a, b]$ (vale $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [a, b]$) ma non è integrabile su $[a, b]$. Infatti, poiché K è denso in $[a, b]$, se $s \in S([a, b])$ soddisfa $s \leq f$ dev'essere $s(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (tranne alpiù un numero finito di punti); e, similmente se $t \in S([a, b])$ soddisfa $t \geq f$ dev'essere $t(x) \geq 1$ per ogni $x \in [a, b]$ (tranne alpiù un numero finito di punti). Dunque l'area sottesa dal grafico di f non potrà venire approssimata a piacere da una somma superiore e da una inferiore, perché la differenza tra una qualsiasi somma superiore di f e una qualsiasi somma inferiore di f è sempre ≥ 1.

Si osservi che l'esempio dato qui sopra di una funzione limitata ma non integrabile è particolarmente irregolare: la funzione, infatti, non è continua in nessun punto del suo dominio. Invece, fortunatamente, per le funzioni regolari (o perlomeno per quelle "non troppo irregolari", nel senso che diremo tra un attimo) tutto funziona bene:

Proposizione 3.5.8. *Una funzione continua su $[a, b]$ è integrabile su $[a, b]$.*[58]
Più generalmente, una funzione continua su $[a, b]$ tranne alpiù un numero finito di discontinuità di prima specie (ovvero punti nei quali esistono finiti, anche se diversi, sia il limite sinistro che il limite destro)[59] *è integrabile su $[a, b]$.*

L'integrale appena introdotto soddisfa le medesime tre proprietà che abbiamo visto per le funzioni semplici (omettiamo la dimostrazione).

Proposizione 3.5.9. (Proprietà dell'integrale) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni integrabili.*

(i) (Linearità) *$\lambda f + \mu g$ è integrabile per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e*

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

(ii) (Isotonia) *Se $f \leq g$* (ovvero, se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$) *allora $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.*

[58] Dunque è anche limitata su $[a, b]$ (ma lo sapevamo già dal Teorema di Weierstrass!).
[59] Una tale funzione è comunemente detta *bilanciata* su $[a, b]$.

(iii) (Disuguaglianza fondamentale) *Vale*

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

Esempio. Vediamo un esempio facile. Dati $m, q \in \mathbb{R}$ con $m > 0$, sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = mx + q$. Notiamo che tale f, che come sappiamo è crescente, è anche limitata (il suo grafico è un segmento chiuso e limitato della retta $y = mx + q$). Per un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la suddivisione di $[a,b]$ che "divide $[a,b]$ in n parti uguali" data da $x_j = a + j\frac{b-a}{n} = \frac{(n-j)a+jb}{n}$ con $j = 0, 1, \dots, n$ (si noti che $a = x_0 < \cdots < x_n = b$); poiché f è crescente, se si pone $s_n^- = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\chi_{[x_{j-1},x_j[}$ e $s_n^+ = \sum_{j=1}^n f(x_j)\chi_{[x_{j-1},x_j[}$ vale $s_n^\pm \in S([a,b])$ e $s_n^- \leq f \leq s_n^+$. Si calcola $\int_{[a,b]} s_n^- = \sum_{j=1}^n (mx_{j-1}+q)(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} + \sum_{j=1}^n (m\frac{(n-j+1)a+(j-1)b}{n} + q) = (b-a)(m\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n((n-j+1)a+(j-1)b)+q) = (b-a)(m\frac{1}{n^2}(\frac{n(n+1)}{2}a + \frac{n(n-1)}{2}b) + q) = (b-a)(\frac{m}{2}(\frac{n+1}{n}a + \frac{n-1}{n}b) + q)$, e analogamente $\int_{[a,b]} s_n^+ = \sum_{j=1}^n (mx_j + q)(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} + \sum_{j=1}^n (m\frac{(n-j)a+jb}{n} + q) = (b-a)(m\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n((n-j)a+jb)+q) = (b-a)(m\frac{1}{n^2}(\frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n(n+1)}{2}b)+q) = (b-a)(\frac{m}{2}(\frac{n-1}{n}a + \frac{n+1}{n}b)+q)$: poiché $\lim \int_{[a,b]} s_n^- = \lim \int_{[a,b]} s_n^+ = (b-a)(m\frac{b+a}{2}+q)$, abbiamo mostrato che f è integrabile su $\mathbb{R}$ e che $\int_{[a,b]} f = (b-a)(m\frac{b+a}{2}+q)$. Questa, come si verifica direttamente caso per caso con considerazioni di geometria piana elementare, non è altro che l'area contata con segno della parte di piano compresa tra la retta $y = mx + q$ e l'asse delle ascisse nel tratto $[a,b]$, come previsto. Notiamo piuttosto un fatto che per ora sembra solo una curiosa coincidenza: la funzione $F(x) = m\frac{x^2}{2} + qx$ è, come si è visto, una primitiva di f sull'intervallo $[a,b]$, e si verifica immediatamente che $\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$. Che non sia una mera coincidenza sarà chiaro nel seguito, quando avremo a disposizione il Teorema fondamentale del calcolo (Teorema 3.5.14).

$\boxed{\textbf{Funzioni localmente integrabili}}$ In generale, le funzioni hanno un dominio più complicato di un intervallo compatto: tale dominio potrebbe essere l'unione di più intervalli, alcuni dei quali, magari, non chiusi o non limitati. Cerchiamo dunque, per quanto possibile, di trattare il caso generale.

Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è detta *localmente integrabile* se è integrabile su ogni intervallo compatto $[a,b]$ contenuto in A.

Grazie alla Proposizione 3.5.8 si può subito notare che:

Proposizione 3.5.10. *Tutte le funzioni continue* (più in generale, tutte le funzioni continue tranne che in un numero finito di discontinuità di prima specie) *sono localmente integrabili.*

È immediato verificare (esercizio) che

Proposizione 3.5.11. (Additività rispetto al dominio d'integrazione) *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile, $[a,b]$ un intervallo compatto contenuto in A, e $a < c < b$. Allora vale*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Funzione integrale e Teorema fondamentale del calcolo Introduciamo ora una nuova notazione. Se f è una funzione integrabile su un intervallo compatto di estremi a e b (con $a < b$ oppure $b < a$), si definisce il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ come segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{se } a \le b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{se } a > b \end{cases}.$$

Si parlerà, in questo caso, di *integrale di f sull'intervallo orientato di estremi a e b*. In sostanza, con questa nuova convenzione, l'integrale orientato di una funzione d'ora in poi potrà cambiare segno (1) o cambiando il segno ad f, (2) o invertendo gli "estremi di integrazione": vogliamo dire che per ogni $a, b \in A$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Inoltre, vale[60]

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt \qquad \text{per ogni } a, b, c \in A.$$

Con l'introduzione della nozione di integrabilità locale, (che, come mostra la Proposizione 3.5.10, costituisce una generalizzazione della nozione di continuità), si è fatto un notevole progresso nella trattazione. In effetti, se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile in A, preso un *qualsiasi* $c \in A$ ha perfettamente senso definire la funzione $I_c f : A \to \mathbb{R}$ (detta *integrale di punto iniziale* c) in questo modo:

$$I_c f : A \to \mathbb{R}, \qquad (I_c f)(x) = \int_c^x f(t)\,dt = \begin{cases} \int_{[c,x]} f & \text{se } x \ge c \\ -\int_{[x,c]} f & \text{se } x < c \end{cases}.$$

In sostanza, la funzione $I_c f$ assegna ad ogni $x \in A$ il valore dell'integrale orientato di f da c a x. La proposizione che segue mostra, come preannunciato, che la regolarità della funzione integrale sarà maggiore di quella della funzione di partenza: nella prima parte si dice che l'integrale di una funzione localmente integrabile sarà continua, mentre nella seconda parte, vera chiave di volta della teoria, si prova che l'integrale di una funzione continua sarà derivabile, con derivata... la funzione stessa.

Proposizione 3.5.12. *Sia A un intervallo di $\mathbb{R}$, $c \in A$ e f una funzione localmente integrabile su A.*

(i) *La funzione integrale $I_c f : A \to \mathbb{R}$ è continua.*

[60] Basta considerare una ad una le sei possibili disposizioni dei punti a, b, c usando la Proposizione 3.5.11(iii): ad esempio, se $a < b < c$ vale $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f(t)\,dt + \int_{[b,c]} f(t)\,dt = \int_{[a,c]} f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$; se $c < a < b$ vale $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f(t)\,dt - \int_{[c,b]} f(t)\,dt = -\int_{[c,a]} f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$; e similmente negli altri quattro rimanenti casi.

(ii) (Teorema di Torricelli) *Se f è continua in $x \in A$ allora $I_c f$ è derivabile in x, e vale*

$$(I_c f)'(x) = f(x).$$

Come immediata conseguenza del Teorema di Torricelli, possiamo finalmente dimostrare quanto lasciato in sospeso nella dimostrazione della Proposizione 3.5.1:

Corollario 3.5.13. (Ogni funzione continua su un intervallo ammette primitiva) *Se A è intervallo di $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $c \in A$, la funzione integrale $I_c f : A \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f* (cioè $(I_c f)'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$)*.*

Ma la conseguenza di gran lunga più importante, che mostra il legame tra integrazione definita e indefinita e apre la strada a tutte le applicazioni del calcolo integrale, è senza dubbio il

Teorema 3.5.14. (Teorema fondamentale del calcolo) *Se A è un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed $F : A \to \mathbb{R}$ una qualsiasi primitiva di F, allora*

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) \qquad \text{per ogni } a, b \in A.$$

Dimostrazione. Se F è una primitiva di f su A, per la Proposizione 3.5.1 preso un qualsiasi $c \in A$ esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che $F = I_c f + k$: dunque $F(b) - F(a) = \int_c^b f(x)\, dx + k - \int_c^a f(x)\, dx - k = \int_a^b f(x)\, dx$. □

Talvolta in luogo di $F(b) - F(a)$ si usa scrivere anche $(F(x)|_a^b$.

Esempi. (0) Calcoliamo l'area con segno della zona compresa tra il grafico della funzione $f(x) = mx + q$ ed il segmento $[a, b]$ dell'asse delle ascisse (con $m, q \in \mathbb{R}$ e $a > 0$). Una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = m\frac{x^2}{2} + qx$, pertanto l'area cercata è $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = m\frac{b^2-a^2}{2} + q(b-a) = (b-a)(m\frac{b+a}{2} + q)$ (vedi anche pag. 116). Se $m = 0$ si ottiene semplicemente $q(b-a)$, l'area con segno del rettangolo di lati $b - a$ e $|q|$; se $a = q = 0$ si ottiene $\frac{mb^2}{2}$, l'area con segno del triangolo rettangolo di cateti b e $|m|b$. **(1)** Calcoliamo l'area del settore parabolico delimitato dal grafico della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x^2 - (a+b)x + ab)$ (una parabola con concavità rivolta verso il basso, passante per $(a, 0)$, $(b, 0)$ e con vertice $(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2})$). e dall'asse delle ascisse. Una primitiva di f è $F(x) = -\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} - abx$, e pertanto l'area cercata è uguale a $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = \frac{(b-a)^3}{6}$. **(2)** Per quanto abbiamo spiegato, dovrà essere di certo $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$ (le aree tra 0 e π e tra π e 2π sono uguali ma di segno opposto): infatti una primitiva di $f(x) = \sin x$ è $F(x) = -\cos x$, e $F(2\pi) - F(0) = -1 - (-1) = 0$. Invece vale $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos)(\pi) - (-\cos)(0) = -(-1) - (-1) = 2$. **(3)** Calcoliamo l'area (con segno) compresa tra il grafico di $f(x) = e^{-2x} - 1$ e l'asse delle ascisse sull'intervallo $[-3, 1]$ (la funzione, essendo continua, è anche localmente integrabile, e dunque tale richiesta ha senso). Una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} - x$ e dunque, essendo $F(-2) = -\frac{1}{2}e^4 + 2 \sim -25,3$ e $F(1) = -\frac{1}{2}e^{-2} - 1 \sim -1,1$, si ha $\int_{-2}^1 f(x)\, dx = F(1) - F(-2) = \frac{e^4 - e^{-2}}{2} - 3 \sim 24,2$. Si noti che la funzione è positiva se e solo se $x < 0$ e dunque, quest'area è la somma del contributo positivo $\int_{-2}^0 f(x)\, dx = F(0) - F(-2) = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}e^4 + 2)) = \frac{e^4-1}{2} - 2 \sim 24,8$ e del contributo negativo $\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{2}e^{-2} - 1 - (-\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1-e^{-2}}{2} \sim -0,6$.

Proposizione 3.5.15. *Nel calcolo degli integrali definiti valgono le seguenti proprietà.*

(i) (Metodo di integrazione definita per sostituzione) *Siano A, T intervalli di $\mathbb{R}$, $\phi : B \to A$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, $[t_1, t_2] \subset T$ un intervallo compatto, $a_j = \phi(t_j) \in A$ (per $j = 1, 2$) ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si ha allora*

$$\int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\, dt.$$

(ii) (Metodo di integrazione definita per parti) *Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $F, G : A \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ con derivate $F' = f$ e $G' = g$. Allora per ogni intervallo compatto $[a, b] \subset A$ vale*

$$\int_a^b F(x)g(x)\, dx = \big(F(x)G(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\, dx.$$

Dimostrazione. (i) Va innanzitutto ricordato che l'intervallo in A di estremi $\phi(t_1)$ e $\phi(t_2)$ è compatto (si ricordi la Proposizione 3.2.7(d)), e dunque il primo membro ha senso. Se F è una primitiva di f, $F \circ \phi$ è una primitiva di $(f \circ \phi)\phi'$ e dunque ambo i membri valgono $(F(\phi(t))|_{t_1}^{t_2}$. (ii) Basta calcolare $(\,\cdot\,|_a^b$ di ambo i membri della formula di integrazione indefinita per parti. $\square$

Esempi. **(1)** Si debba calcolare $\int_{-\frac{1}{3}}^{2} f(x)\, dx$, dove f è una qualsiasi funzione continua. Se (per fare un esempio) si vuole applicare a tale integrale il cambio di variabile $x = \phi(t) = t(t-2)$, si noti che $\phi(t) = 2$ per $t = \mp\sqrt{3} + 1$ (con $t_1' = \sqrt{3} + 1 \sim 2,7$ e $t_1'' = -\sqrt{3} + 1 \sim -0,7$) , e che $\phi(t) = -\frac{1}{3}$ per $t = 1 \mp \frac{\sqrt{6}}{3}$ (con $t_2' = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \sim 0,2$ e $t_2'' = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \sim 1,8$. Pertanto l'integrale di partenza è uguale ad uno qualsiasi dei quattro integrali $\int_{t_1}^{t_2} f(t(t-2))(2t-2)\, dt$, ove t_1 sia liberamente scelto tra t_1' e t_1'' e t_2 tra t_2' e t_2''. (Si noti che ϕ induce diffeomorfismi $\phi : [t_1', t_2'] \to [-\frac{1}{3}, 2]$ e $\phi : [t_1'', t_2''] \to [-\frac{1}{3}, 2]$.) **(2)** Si ha $\int_{-1}^{3} te^{2t}\, dt = \big(t\frac{e^{2t}}{2}\big|_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} 1\,\frac{e^{2t}}{2}\, dt = \frac{3e^6}{2} - \frac{-e^{-2}}{2} - \big(\frac{e^{2t}}{4}\big|_{-1}^{3} = \frac{3e^6+e^{-2}}{2} - \big(\frac{e^6}{4} - \frac{e^{-2}}{4}\big) = \frac{5e^6+3e^{-2}}{4}$. **(3)** Ricordiamo che la funzione potenza x^α con esponente razionale $\alpha = \frac{m}{n}$ a denominatore n dispari è definita per ogni x se $\alpha > 0$, e per ogni $x \neq 0$ se $\alpha \leq 0$ (vedi pag. 4): ad esempio, $(-8)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{8} = -2$ e $(-\frac{1}{2})^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{(-\sqrt[5]{\frac{1}{2}})^2} = \sqrt[5]{4}$. Pertanto, l'integrale definito $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}}$ ha senso, perché la funzione $\frac{1}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}} = (7x-1)^{-\frac{2}{3}}$ è definita e continua (dunque localmente integrabile) per $x \neq \frac{1}{7}$, e lo stesso vale per $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-2}}$, perché la funzione $\frac{1}{\sqrt[5]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{5}}$ è definita e continua (dunque localmente integrabile) per $x \neq 2$. Inoltre, nel primo caso il risultato sarà positivo (la funzione integranda $\frac{1}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}}$ è positiva su $[-1, 0]$) mentre nel secondo sarà negativo (la funzione integranda $\frac{1}{\sqrt[5]{x-2}}$ è negativa su $[-1, 1]$). Passiamo ora al calcolo preciso di questi integrali. Utilizzando rispettivamente il cambio di variabile $t = 7x - 1$ (dunque $x = \frac{t+1}{7}$) e $\tau = x - 2$ (dunque $x = \tau + 2$), si ottiene $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x-1)^2}} = \frac{1}{7}\int_{-8}^{-1} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \frac{3}{7}[t^{\frac{1}{3}}]_{-8}^{-1} = \frac{3}{7}((-1) - (-2)) = \frac{3}{7} > 0$ e $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x-2}} = \int_{-3}^{-1} \frac{d\tau}{\sqrt[5]{\tau}} = \frac{5}{4}[\tau^{\frac{4}{5}}]_{-3}^{-1} = \frac{5}{4}((-1)^{\frac{4}{5}} - (-3)^{\frac{4}{5}}) = \frac{5}{4}(1 - \sqrt[5]{81}) < 0$.

Esercizio. *Calcolare i seguenti integrali definiti:*

$$\textbf{(1)}\ \int_{-1}^{2} \frac{x^3 - 11x + 1}{x^2 - x - 12}\, dx, \qquad \textbf{(2)}\ \int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}\, dx, \qquad \textbf{(3)}\ \int_{0}^{\pi} \sin x(\sin 2x + \cos 2x)\, dx.$$

Risoluzione. **(1)** Dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene $x^3 - 11x + 1 = (x+1)(x^2 - x - 12) + 2x + 13$ da cui $\frac{x^3-11x+1}{x^2-x-12} = x + 1 + \frac{2x+13}{x^2-x-12}$. Poiché $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$, esistono due numeri $A, B \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{2x+13}{x^2-x-12} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4}$: dai calcoli risulta che $A = -1$ e $B = 3$. Si ha pertanto $\frac{x^3-11x+1}{x^2-x-12} = x + 1 + \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x+3}$, e perciò $\int \frac{x^3-11x+1}{x^2-x-12}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\log|x-4| - \log|x+3| + k$, da cui $\int_{-1}^{2} \frac{x^3-11x+1}{x^2-x-12}\,dx = (\frac{x^2}{2} + x + 3\log|x-4| - \log|x+3|]_{-1}^{2} = 2 + 2 + 3\log 2 - \log 5 - (\frac{1}{2} - 1 + 3\log 5 - \log 2) = \frac{9}{2} + 4\log 2 - 4\log 5 = \frac{9}{2} - 4\log\frac{5}{2} \sim 0,83$. **(2)** Sostituendo $x = \frac{1}{t}$ si ottiene $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, da cui $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}\,dx = \int t^5 e^t(-\frac{1}{t^2}dt) = -\int t^3 e^t\,dt$. Integrando ripetutamente per parti si ha poi $\int t^3 e^t\,dt = t^3e^t - \int 3t^2 e^t\,dt = t^3e^t - 3(t^2e^t - \int 2te^t\,dt) = t^3e^t - 3t^2e^t + 6\int te^t\,dt = t^3e^t - 3t^2e^t + 6(te^t - \int e^t\,dt) = t^3e^t - 3t^2e^t + 6te^t - 6e^t + k = (t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + k$, da cui finalmente $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}\,dx = -\int t^3e^t\,dt = -(t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + k = -(\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x} - 6)e^{\frac{1}{x}} + k = \frac{6x^3-6x^2+3x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + k$. L'integrale definito $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}\,dx$ vale perciò $(\frac{6x^3-6x^2+3x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}]_1^2 = \frac{48-24+6-1}{8}\sqrt{e} - \frac{6-6+3-1}{1}e = \frac{29}{8}\sqrt{e} - 2e \sim 0,54$. **(3)** Usando le formule trigonometriche di duplicazione si ha $\int_0^\pi \sin x(\sin 2x + \cos 2x)\,dx = \int_0^\pi \sin x(2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1)\,dx = \int_0^\pi (2\sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \sin x)\,dx = (2\frac{\sin^3 x}{3} - 2\frac{\cos^3(x)}{3} + \cos x]_0^\pi = (0 + \frac{2}{3} - 1) - (0 - \frac{2}{3} + 1) = -\frac{2}{3}$.

Misura nel piano, area di regioni piane Chiameremo *rettangoli* i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ del tipo $A \times B$ con A e B intervalli limitati di $\mathbb{R}$ e *plurirettangoli* i sottoinsiemi ottenuti unendo un numero finito (eventualmente anche molto grande, ma finito) di rettangoli. Di ogni rettangolo possiamo calcolare l'*area* nel modo usuale, e lo stesso potremo fare per ogni plurirettangolo spezzandolo come unione disgiunta di rettangoli di cui sommeremo le singole aree.[61]

In generale, dato un sottoinsieme *limitato* D di $\mathbb{R}^2$, consideriamo i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U_D^+ &= \{\text{Area}(P) : P \text{ plurirettangolo limitato, } D \subset P\}, \\ U_D^- &= \{\text{Area}(P) : P \text{ plurirettangolo limitato, } P \subset D\}. \end{aligned}$$

In altre parole, U_D^+ è l'insieme delle aree dei plurirettangoli limitati che approssimano D "dal di fuori", mentre U_D^- è l'insieme delle aree di quelli che approssimano D "dal di dentro": vale certamente $U_D^- \le U_D^+$. Il sottoinsieme D si dirà *quadrabile*, o *elementarmente misurabile* (con misura finita) se U_D^- e U_D^+ sono classi contigue in $\mathbb{R}$, ovvero se

$$\begin{cases} \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esistono due plurirettangoli limitati } P_\varepsilon^\pm \text{ tali che} \\ P_\varepsilon^- \le D \le P_\varepsilon^+ \quad \text{e} \quad \text{Area}(P_\varepsilon^+) - \text{Area}(P_\varepsilon^-) = \text{Area}(P_\varepsilon^+ \setminus P_\varepsilon^-) < \varepsilon. \end{cases}$$

In tal caso, l'unico elemento separatore tra U_D^- e U_D^+ si dirà *area* di D, e sarà denotato con $\text{Area}(D)$.

Siano ora $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Se $[a, b]$ è un intervallo compatto contenuto in A, abbiamo detto più volte cosa significa geometricamente l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$: esso è l'area con segno della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse nel tratto $[a, b]$. Poiché abbiamo introdotto una nozione

[61]Questi discorsi, che facciamo con gran velocità, richiederebbero in realtà una certa attenzione: ad esempio, dovremmo dimostrare (verifica laboriosa) che di un plurirettangolo si calcola la stessa area in qualunque modo lo si suddivida come unione disgiunta di rettangoli.

di "area" per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, dobbiamo mostrare che questa è compatibile con la nostra costruzione precedente. Se $u : A \to \mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile *positiva* (ovvero $u \geq 0$) e $[a, b] \subset A$ è compatto, definiamo il *trapezoide* $T_{[a,b]}(u)$ *di* u su $[a, b]$ (vedi Figura 3.24(a)) proprio come

$$T_{[a,b]}(u) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq u(x)\}.$$

La seguente proposizione mostra il legame tra l'integrale definito di f e le aree di trapezoidi naturalmente associati ad f (Ricordiamo che la funzione *parte positiva* $f^+ : A \to \mathbb{R}$ è definita come $f^+(x) = f(x)$ se $f(x) \geq 0$ e $f^+(x) = 0$ se $f(x) < 0$, mentre la funzione *parte negativa* $f^- : A \to \mathbb{R}$ è definita come $f^-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$ e $f^+(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$. Si noti che $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.)

Proposizione 3.5.16. *Siano* $A \subset \mathbb{R}$*,* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione localmente integrabile e* $[a, b] \subset A$ *un intervallo limitato. Allora i trapezoidi* $T_{[a,b]}(f^{\pm})$ *sono quadrabili e vale*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathrm{Area}(T_{[a,b]}(f^+)) - \mathrm{Area}(T_{[a,b]}(f^-)).$$

Dimostrazione. Iniziamo dal caso in cui $f \geq 0$. Se $f|_{[a,b]}$ è semplice, si può suddividere $[a, b]$ in intervalli disgiunti (eventualmente degenerati ad un punto) $I_1 < \cdots < I_m$ di modo che $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{I_i}$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per $i = 1, \ldots, m$: ne risulta $T_{[a,b]}(f) = \bigsqcup_{i=1}^m (I_i \times [0, \alpha_i])$, e pertanto $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^m \alpha_i\, \lambda_1(I_i) = \mathrm{Area}(T_{[a,b]}(f))$. Tornando al caso generale, se f è localmente integrabile tali sono anche $f^{\pm}$ e dunque, per quanto appena visto, $T_{[a,b]}(f^{\pm})$ sono quadrabili e vale $\int_a^b f^{\pm}(x)\, dx = \mathrm{Area}(T_{[a,b]}(f^{\pm}))$; essendo $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f^+(x)\, dx - \int_a^b f^-(x)\, dx$, si ottiene quanto voluto. $\square$

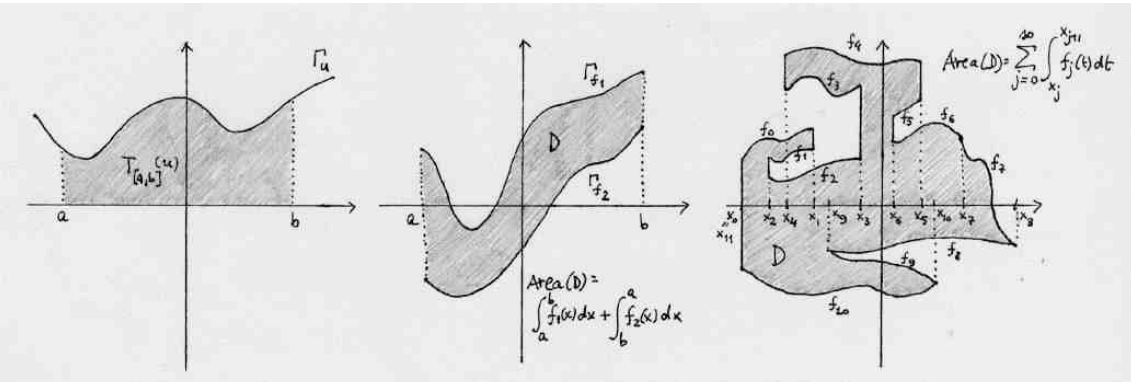

Figura 3.24: *Trapezoide; aree di piano delimitate da grafici di funzioni*

Dopo questa doverosa precisazione, terminiamo la trattazione dell'integrazione precisando come calcolare l'area di una vasta classe di sottoinsiemi quadrabili di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo di avere un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ il cui bordo si possa decomporre in tratti descrivibili come grafici di funzioni $f_1(x), \dots, f_m(x)$ a due a due privi di intersezioni, eventualmente intercalati da tratti verticali (ovvero, giacenti su rette del tipo $x \equiv k \in \mathbb{R}$). Il caso più semplice è il seguente:

Proposizione 3.5.17. *Sia $[a, b]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili tali che $f_1 > f_2$: allora* (vedi Figura 3.24(b))

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ f_2(x) \le y \le f_1(x)\}$$

è quadrabile, e vale

$$\text{Area}(D) = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_b^a f_2(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Sia $k \in \mathbb{R}$ una qualsiasi costante; se cambiamo f_1 e f_2 con $f_1 + k$ e $f_2 + k$, l'effetto è quello di traslare i grafici di f_1 e f_2 (e dunque anche D) verticalmente di k; agli effetti dell'uguaglianza da dimostrare non cambia nulla (si noti che infatti nessuno dei due membri risente del cambiamento). Possiamo dunque supporre che sia $f_1 > f_2 > 0$. Ma allora si ha ovviamente $\text{Area}(D) = \text{Area}(T_{[a,b]}(f_1)) - \text{Area}(T_{[a,b]}(f_2))$; usando allora la Proposizione 3.5.16, si ha $\text{Area}(D) = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx$, come voluto. □

L'idea è dunque quella di partire dal punto $(a, f_1(a))$ e, percorrendo il grafico di $f_1(x)$ in senso orario (ovvero positivo, da sinistra a destra), integrare f_1 da a a b; indi, portandosi dal punto $(b, f_1(b))$ al punto $(b, f_2(b))$ (eventualmente spostandosi lungo la retta verticale $x = b$ verso il basso; in ogni caso, questa operazione è "innocua" dal punto di vista dell'area), percorrere a ritroso il grafico di $f_2(x)$ integrando perciò f_2 da b ad a; infine, portarsi dal punto $(a, f_2(a))$ al punto $(a, f_1(a))$ (sempre spostandosi lungo la retta verticale $x = a$, altra operazione "innocua") da cui eravamo partiti, chiudendo così il circuito dato dal bordo di di D. Ma anche se fossimo partiti ad esempio dal punto $(b, f_2(b))$ percorrendo il bordo di D sempre in senso orario (che stavolta dunque è negativo, da destra a sinistra) seguendo le stesse tappe fino a tornare allo stesso punto $(b, f_2(b))$, il risultato al secondo membro non sarebbe cambiato; anzi, è facile vedere che, prendendo un qualsiasi $c \in [a, b]$ e facendo la stessa operazione (cioè, partendo da $(c, f_1(c))$ oppure da $(c, f_2(c))$, integrare muovendosi in senso orario sul bordo di D fino a tornare al punto di partenza) il risultato continua a non cambiare, dando sempre l'area di D. Insomma, *per calcolare l'area di D basta prendere un punto qualsiasi del bordo di D e percorrere il bordo in verso orario integrando, nel verso scelto, la funzione sul grafico della quale ci si sta muovendo, fino a chiudere il circuito tornando nel punto da cui si era partiti.*

Questa idea funziona esattamente allo stesso modo anche nel caso più generale delineato all'inizio, in cui il bordo di D si possa decomporre in tratti descrivibili come grafici di più funzioni a due a due privi di intersezioni, eventualmente intercalati da tratti verticali (vedi Figura 3.24(c)). Data una famiglia (senza alcun ordine) di $m + 1$ punti distinti $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ di $\mathbb{R}$ con $x_0 = x_{m+1}$, per $j = 1, \dots, m$ si denoti con I_j l'intervallo compatto di estremi x_j e x_{j+1} (dunque I_j e I_{j+1} hanno l'estremo x_{j+1} in comune) e si considerino delle funzioni continue $f_j : I_j \to \mathbb{R}$ i cui grafici non abbiano intersezioni né tra di loro né con i segmenti verticali ℓ_j da $(x_{j+1}, f_j(x_{j+1}))$ e $(x_{j+1}, f_{j+1}(x_{j+1}))$, e si consideri il sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dai grafici delle f_j e dai segmenti ℓ_j: allora[62]

$$\text{Area}(D) = \sum_{j=1}^{m} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(t)\, dt.$$

Esercizio. *Si calcoli l'area della regione piana limitata D racchiusa inferiormente dal grafico della funzione $f(x) = x^2 - 3$ e, superiormente, dai grafici di $g(x) = \frac{x}{2} + 2$ per $x < 0$ e di $h(x) = 2\frac{4x-3}{2x-3}$ per $x > 0$.*

Risoluzione. I grafici di f e g si intersecano in $A = (-2, 1)$ e $A' = (\frac{5}{2}, \frac{13}{4})$; quelli di g e h in $B = (0, 2)$ e $B' = (\frac{11}{2}, \frac{17}{4})$; quelli di f e h in $C = (-\frac{5}{2}, \frac{13}{4})$, $C' = (1, -2)$ e $C'' = (3, 6)$. La regione D (vedi Figura 3.25(i)) risulta delimitata inferiormente dal grafico di $f(x)$ per $-2 \le x \le 1$ e superiormente dal grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 0$ e di $h(x)$ per $0 \le x \le 1$; si ha dunque $\text{Area}(D) = \int_{-2}^{0} g(x)\, dx + \int_0^1 h(x)\, dx + \int_1^{-2} f(x)\, dx$. Delle primitive di f, g, h sono rispettivamente $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$, $G(x) = \frac{x^2}{4} + 2x$ e (essendo $h(x) = 4 + \frac{6}{2x-3} = 4 + 3\frac{2}{2x-3}$), $H(x) = 4x + 3\log|2x - 3|$: pertanto $\text{Area}(D) = G(0) - G(-2) + H(1) - H(0) + F(-2) - F(1) = 0 - (1 - 4) + 4 - (3\log 3) + (-\frac{8}{3} + 6) - (\frac{1}{3} - 3) = 13 - 3\log 3 \sim 9,7$.

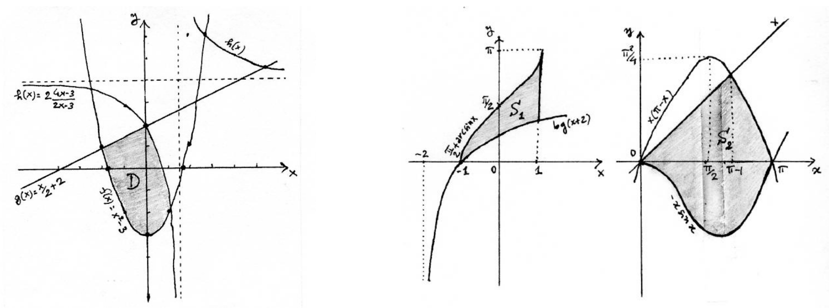

Figura 3.25: *Le regioni piane D, S_1 e S_2 degli esercizi.*

Esercizio. *Disegnare le seguenti regioni del piano cartesiano e calcolarne l'area:*

$$\textbf{(1)} \quad S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ \log(x + 2) \le y \le \frac{\pi}{2} + \arcsin x\},$$
$$\textbf{(2)} \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ y \le x,\ -x \sin x \le y \le x(\pi - x)\}.$$

Risoluzione. **(1)** L'area di $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1,\ \log(x+2) \le y \le \frac{\pi}{2} + \arcsin x\}$ (vedi Figura 3.25(ii)) è $\int_{-1}^{1} (\frac{\pi}{2} + \arcsin x)\, dx + \int_1^{-1} \log(x + 2)\, dx$. Si ha (per parti) $\int \arcsin x\, dx = \int (1 \cdot \arcsin x)\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (-2x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + k$, e (ponendo $t = x + 2$) $\int \log(x + 2)\, dx = \int \log t\, dt = \int (1 \cdot \log t)\, dt = t \log t - \int t \frac{1}{t}\, dt = t(\log t - 1) + k =$

[62] La dimostrazione, che non scriviamo in dettaglio, si può ottenere riducendosi a ciò che accade sopra un singolo intervallo I_k ed applicando il caso base della Proposizione 3.5.17. Menzioniamo solamente il fatto che questa espressione è un caso particolare della *formula di Green nel piano*: se U è un sottoinsieme aperto del piano $\mathbb{R}^2$, $\phi : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che il chiuso $D = \phi^{-1}(\mathbb{R}_{\le 0})$ di U sia compatto con bordo $\partial D = \phi^{-1}(0) \subset U$ curva regolare, allora si ha $\text{Area}(D) = \int_{\partial D} \phi\, ds$, ove il secondo membro denota l'"integrale curvilineo" della funzione $\phi(x, y)$ lungo la curva ∂D.

$(x+2)(\log(x+2)-1)+k$, da cui l'area risulta $(\frac{\pi}{2}x+x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}]_{-1}^{1}+((x+2)(\log(x+2)-1)]_{1}^{-1}=\pi+2-3\log 3\sim 1,85$. **(2)** Le due funzioni x e $x(\pi-x)$ si intersecano in $x=0$ e $x=\pi-1$, dunque l'area di $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le\pi,\ y\le x,\ -x\sin x\le y\le x(\pi-x)\}$ (vedi Figura 3.25(iii)) è $\int_0^{\pi-1}x\,dx+\int_{\pi-1}^{\pi}x(\pi-x)\,dx+\int_{\pi}^{0}(-x\sin x)\,dx$. Essendo (per parti) $\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx=\sin x-x\cos x+k$, l'area è $(\frac{x^2}{2}]_0^{\pi-1}+(\pi\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_{\pi-1}^{\pi}+(-\sin x+x\cos x]_{\pi}^{0}=(\frac{(\pi-1)^2}{2}-0)+(\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}-\pi\frac{(\pi-1)^2}{2}+\frac{(\pi-1)^3}{3})+(0+\pi)=\frac{3\pi^2+3\pi+1}{6}\sim 6,7$.

Integrazione definita generalizzata. Nella trattazione appena terminata, l'integrale (alla Riemann) di una funzione si è considerato sempre e solo su un intervallo compatto (infatti gli integrali delle funzioni "localmente integrabili" vengono sempre effettuati su intervalli compatti contenuti nel loro dominio).

Ci occupiamo ora di studiare il problema seguente: se A è un intervallo *non compatto* (ovvero aperto oppure illimitato) di $\mathbb{R}$ e $f: A\to\mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile (dunque l'integrale di f ha senso su tutti i compatti contenuti in A), *cosa accade se volessimo considerare l'integrale di f esteso a tutto A*, nel senso di "limite dell'integrale di f esteso ad un intervallo compatto di A quando il compatto tende ad A" ? In altre parole: l'area con segno compresa tra il grafico di f e l'asse x tenderà ad un valore finito, oppure no?

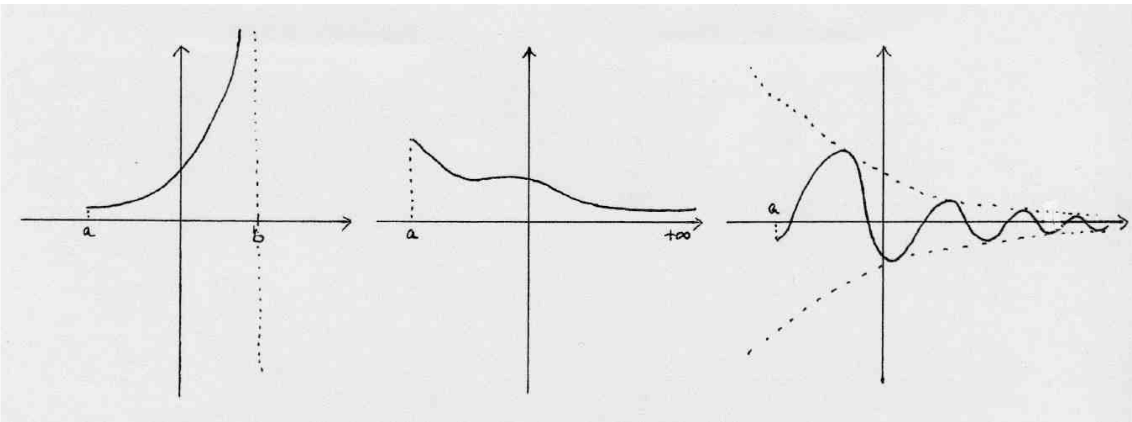

Figura 3.26: *Lo studio degli integrali generalizzati si chiede se integrali definiti come questi convergono o no.*

Diamo qualche esempio per renderci conto dell'interesse della questione.

Esempi. **(0)** Iniziamo con alcune ovvietà. Se $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ (con $a,b\in\mathbb{R}$) è una funzione continua tale che $\lim_{x\to b^-}f(x)\,dx$ esiste *finito*, allora il suddetto limite d'area su $A=[a,b[$ esiste finito (perché f si può estendere per continuità ad una funzione $\widetilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ con $\widetilde{f}(1)=\lim_{x\to b^-}f(x)\,dx\in\mathbb{R}$, e $\lim_{\xi\to b^-}\int_{[0,\xi]}f(x)\,dx=\int_{[a,b]}\widetilde{f}(x)\,dx\in\mathbb{R}$). Se invece $g:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty}g(x)\,dx$ esiste *diverso da zero*, allora il suddetto limite d'area su $A=[a,+\infty[$ diverge a ∞ (perché la zona di piano compresa tra il grafico di g e l'asse delle ascisse da un certo punto in poi contiene un rettangolo illimitato a destra, e dunque la sua area con segno deve per forza divergere a ∞). **(1)** Sia $A=]0,1]$ (che è limitato ma non chiuso, dunque non compatto), e siano $f,g,h:]0,1]\to\mathbb{R}$ date da $f(x)=\frac{\sin x}{2x}$, $g(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$ e $h(x)=\log x$. Che ne è dei loro integrali su intervalli compatti dentro $]0,1]$, quando questi intervalli "tendono a $]0,1]$"? Si tratterà, in sostanza, di prendere $\xi\in]0,1[$, considerare $\int_{[\xi,1]}f(x)\,dx$

e poi considerare il limite di questo integrale per $\xi \to 0^+$. Per f non ci sarà problema: infatti essa è prolungabile per continuità a tutto $[0,1]$ ponendo $f(0) = \frac{1}{2}$, ed una funzione continua è sempre integrabile su un compatto. Più intrigante invece il problema per g e per h: tali funzioni divergono rispettivamente a $+\infty$ e $-\infty$, ma *divergeranno anche le loro aree oppure no*? Per g, abbiamo $\lim_{\xi\to 0^+} \int_\xi^1 g(x)\,dx = \lim_{\xi\to 0^+}(-\frac{1}{2\sqrt{x}}]_\xi^1 = \lim_{\xi\to 0^+}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\xi}}) = +\infty$ (dunque anche l'area diverge), mentre per h abbiamo $\lim_{\xi\to 0^+} \int_\xi^1 h(x)\,dx = \lim_{\xi\to 0^+}(x(\log x - 1)]_\xi^1 = \lim_{\xi\to 0^+}(-1 - \xi(\log \xi - 1)) = -1$ (dunque l'area converge a -1). Può dunque accadere che una funzione diverga, ma la sua area no. **(2)** Sia $A = [\sqrt{3}, +\infty[$ (che è chiuso ma non limitato, dunque non compatto), e siano $f, g, h : [\sqrt{3}, +\infty[\to \mathbb{R}$ date da $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ e $h(x) = \frac{1}{x \log x}$. Stavolta si tratterà di studiare il limite per $\xi \to +\infty$ dell'integrale della funzione su $[\sqrt{3}, \xi]$. Per f tale limite sarà di certo $+\infty$ (basta pensare che, essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, la parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse conterrà il rettangolo illimitato di altezza $\frac{\pi}{4}$ da un certo punto in poi), ma comunque, calcolando, si ha $\lim_{\xi\to+\infty} \int_{\sqrt{3}}^\xi f(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty}(x \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{x^2+1}]_{\sqrt{3}}^\xi = \lim_{\xi\to+\infty}(\xi \operatorname{arctg} \xi - \log\sqrt{\xi^2+1} - \sqrt{3}\frac{\pi}{3} + \log 2) = \lim_{\xi\to+\infty}(\xi \operatorname{arctg} \xi) = +\infty$. D'altra parte, per g, si ha $\lim_{\xi\to+\infty} \int_{\sqrt{3}}^\xi g(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty}(-\frac{1}{x}]_{\sqrt{3}}^\xi = \lim_{\xi\to+\infty}(-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre per h si ha $\lim_{\xi\to+\infty} \int_{\sqrt{3}}^\xi h(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty}(\log|\log|x||)]_{\sqrt{3}}^\xi = \lim_{\xi\to+\infty}(\log(\log \xi) - \log(\log \sqrt{3})) = +\infty$: sia g che h sono infinitesime in $+\infty$, ma l'area sotto il grafico di g converge al valore finito $\frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre quella di h diverge.

Motivati da questi esempi, definiamo il problema in modo generale. Sia $[a, b[$ un intervallo di $\mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_{>a} \cup \{+\infty\}$ (si tratta dunque di un intervallo limitato oppure illimitato, ma in ogni caso senza massimo), e sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile: pertanto, per ogni $\xi \in [a, b[$ l'integrale $\int_{[a,\xi]} f(x)\,dx = \int_a^\xi f(x)\,dx$ ha senso. Diremo che la funzione f è *integrabile in senso generalizzato in* $[a, b[$ se il limite $\lim_{\xi\to b^-} \int_a^\xi f(x)\,dx$ esiste finito; in tal caso tale limite si denoterà $\int_a^b f(x)\,dx$, e sarà chiamato *integrale generalizzato* (oppure *integrale improprio*) su $[a, b[$. In realtà, in tale problema il solo punto che conta è b^-, perché se si prende un altro punto $c \in [a, b[$ allora, essendo $\lim_{\xi\to b^-} \int_c^\xi f(x)\,dx = \lim_{\xi\to b^-} \int_a^\xi f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$, la funzione f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ se e solo lo è in $[c, b[$: dunque si usa dire, più semplicemente, che f è *integrabile* (in senso generalizzato) *in* b^-. Analoga definizione si dà nel caso in cui f sia definita in $]a, b]$ con $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}_{<b} \cup \{-\infty\}$: si dirà che f è integrabile (in senso generalizzato) in a^+ se se il limite $\lim_{\xi\to a^+} \int_\xi^b f(x)\,dx$ esiste finito. (Nel seguito, per brevità, scriveremo spesso "in s.g. " in luogo di "in senso generalizzato".)

L'esempio fondamentale è quello della *potenza* $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Essa è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ (dunque continua, dunque localmente integrabile) in $]0, +\infty[$, perciò l'integrabilità generalizzata va esaminata in 0^+ e in $+\infty$.

- Studiamo prima l'integrabilità in 0^+, cioè $\lim_{\xi\to 0^+} \int_\xi^1 x^\alpha\,dx$. Se $\alpha \neq -1$ si ha $\lim_{\xi\to 0^+} \int_\xi^1 x^\alpha\,dx = \lim_{\xi\to 0^+}(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_\xi^1 = \lim_{\xi\to 0^+}(\frac{1-\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1})$ che è finito se e solo se $\alpha + 1 > 0$ (ed in tal caso vale $\frac{1}{\alpha+1}$); nel caso $\alpha = -1$ il limite è $\lim_{\xi\to 0^+} \int_\xi^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\xi\to 0^+}(\log|x|]_\xi^1 = \lim_{\xi\to 0^+}(-\log \xi) = +\infty$. Ricapitolando, la funzione x^α è integrabile (in s.g.) in 0^+ se e solo se $\alpha > -1$, ed in tal caso vale $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} > 0$. Lo stesso ragionamento vale per un qualsiasi altro $c \in \mathbb{R}$: la funzione $|x - c|^\alpha$ è integrabile (in s.g.) in $c^\pm$ se e solo se $\alpha > -1$.

- Passiamo all'integrabilità in $+\infty$, cioè $\lim_{\xi\to+\infty} \int_1^\xi x^\alpha\,dx$. Se se $\alpha \neq -1$ si ha $\lim_{\xi\to+\infty} \int_1^\xi x^\alpha\,dx = \lim_{\xi\to+\infty}(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_1^\xi = \lim_{\xi\to+\infty}(\frac{\xi^{\alpha+1}-1}{\alpha+1})$ che è finito se e solo se $\alpha + 1 < 0$, ovvero $\alpha < -1$ (ed in tal caso vale $-\frac{1}{\alpha+1}$); nel caso $\alpha = -1$ il limite è $\lim_{\xi\to+\infty} \int_\xi^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\xi\to+\infty}(\log|x|]_1^\xi = \lim_{\xi\to+\infty}(\log \xi) = +\infty$. Pertanto x^α è integrabile (in s.g.) in $+\infty$ se e solo se $\alpha+1 < 0$, ed in tal caso vale $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = -\frac{1}{\alpha+1} > 0$. Lo stesso ragionamento vale per $-\infty$: la funzione $|x|^\alpha$ è integrabile (in s.g.) in $\pm\infty$ se e solo se $\alpha < -1$.

Torniamo al caso generale. Se la funzione è definita e localmente integrabile su un intervallo *aperto* $]a, b[$ (con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}_{>a} \cup \{+\infty\}$), bisognerà controllare *separatamente* l'integrabilità generalizzata prima in a^+ e poi in b^-: la funzione si dirà "integrabile (in senso generalizzato) in $]a, b[$" se e solo se lo

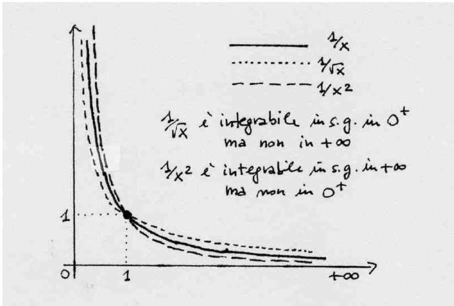

Figura 3.27: *Per le potenze reali x^α ad esponente negativo, la funzione $\frac{1}{x}$ rappresenta un "confine di integrabilità generalizzata" in 0^+ e in $+\infty$.*

è *sia in a^+ che in b^-*. Ad esempio, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile, l'espressione "f è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$" significa "f è integrabile in s.g. sia in $-\infty$ che in $+\infty$" (si ha dunque un concetto ben più generale di "integrabilità su $\mathbb{R}$ alla Riemann": nell'integrabilità generalizzata non si richiede affatto che f abbia supporto compatto, anzi!)

Esempi. (1) x^α *non è mai* integrabile in $]0, +\infty[$: infatti, per nessun α essa lo è contemporaneamente sia in $a^+ = 0^+$ che in $b^- = +\infty$. **(2)** Ribadiamo che i controlli vanno fatti in modo *indipendente* in a^+ ed in b^-. Ad esempio, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione localmente integrabile, vedere se f è integrabile in s.g. su $\mathbb{R}$ non equivale a controllare se esiste $\lim_{\xi \to +\infty} \int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx$: infatti, quest'ultima condizione è necessaria ma non sufficiente (ovvero, questo integrale potrebbe esistere senza che f sia integrabile in s.g. su $\mathbb{R}$). Ad esempio, se f è una qualsiasi funzione dispari si ha $\int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx \equiv 0$ e dunque anche $\lim_{\xi \to +\infty} \int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx = 0$, ma ovviamente la gran parte delle funzioni dispari è lungi dall'essere integrabile in s.g. su $\mathbb{R}$ (esempio: $f(x) = x$ non è integrabile né in $-\infty$ né in $+\infty$). Viceversa, se f sia integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ (con integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$) allora anche $\lim_{\xi \to +\infty} \int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,dx$ esiste e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. **(3)** $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ è integrabile in s.g. su $\mathbb{R}$: infatti lo è sia in $-\infty$ che in $+\infty$, essendo $\lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{0} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx + \lim_{\eta \to +\infty} \int_{0}^{\eta} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \lim_{\xi \to -\infty} (\operatorname{arctg}(x+1)|_{\xi}^{0} + \lim_{\eta \to +\infty} (\operatorname{arctg}(x+1)|_{0}^{\eta} = 0 - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$: e si è anche calcolato che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \pi$.

Quando si riesce a calcolare una primitiva F della funzione localmente integrabile f, il problema dell'integrabilità generalizzata di f in un punto $a^\pm$ viene ridotto al calcolo di $\lim_{x \to a^\pm} F(x)$: tutti gli esempi che abbiamo visto fino ad ora (ad esempio x^α, $\frac{1}{x^2+2x+2}$, $\log x$...) sono stati risolti in questo modo. Tuttavia, come sappiamo, il calcolo della primitiva di una funzione risulta spesso impossibile, e dunque dobbiamo prepararci all'eventualità di non poterne disporre. In questo caso, in realtà il più frequente, si dovrà essere comunque in grado di dire *se f sia o no integrabile in s.g. in $a^\pm$, senza ambire,* in caso positivo*, a calcolare l'esatto valore dell'integrale generalizzato*: per quest'ultima operazione, sarebbe indispensabile la presenza di una primitiva e ciò, come detto, è spesso impossibile. D'ora in poi ci preoccuperemo dunque di stabilire criteri per determinare il *carattere* di integrabilità generalizzata di f in $a^\pm$, ovvero se essa sia integrabile in senso generalizzato, o se l'integrale diverga a $\pm\infty$ in $a^\pm$, o se non converga.

Se $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ è localmente integrabile, tale è naturalmente anche $|f|$; diremo che f è *assolutamente integrabile in senso generalizzato in b^-* se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato in b^-. Che relazione c'è tra le due nozioni?

Proposizione 3.5.18. *Se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in b^-, allora essa è anche integrabile in senso generalizzato in b^-; il viceversa non è sempre vero.*

Dimostrazione. La prima affermazione verrà mostrata tra un attimo (Teorema del confronto). Viceversa, la funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x}$ non è assolutamente integrabile in $+\infty$ (infatti $|f|(x) = \frac{1}{x}$

che, come sappiamo, non è integrabile in $+\infty$) ma è integrabile in $+\infty$ (come vedremo col Teorema di Abel-Dirichlet) $\square$

Dunque le due nozioni di integrabilità in senso generalizzato ed assoluta integrabilità in senso generalizzato non sono equivalenti. Ma sono davvero così distanti? *Niente affatto*: si noti che per trovare un controesempio (cioè una funzione che sia integrabile senza esserlo assolutamente) abbiamo dovuto cercare una funzione *oscillante* (ovvero, che continui a cambiare segno all'intorno del punto nel quale si sta studiando l'integrabilità). Il motivo è che se la funzione ha segno costante all'intorno del punto (cosa che accade quasi sempre) le due nozioni coincidono:

Proposizione 3.5.19. *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile che abbia segno costante all'intorno di b* (ovvero, tale che esista un intorno di b nel quale f abbia segno costante)*: allora f è integrabile in senso generalizzato in b^- se e solo se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in b^-.*

Dimostrazione. Sia $c \in]a, b[$ tale che $f|_{[c,b[}$ abbia segno costante (supponiamo, ad esempio, positivo): sappiamo che f (risp. $|f|$) è integrabile in s.g. in $[a, b[$ se e solo se f (risp. $|f|$) è integrabile in s.g. in $[c, b[$, ma $f = |f|$ su $[c, b[$. $\square$

Dopo questa fondamentale osservazione, trattiamo nel seguito dei criteri di integrabilità generalizzata per funzioni *positive*, tenendo bene a mente che essi valgono sempre come criteri di assoluta integrabilità generalizzata per funzioni qualunque (usando $|f|$). Torneremo a considerare le funzioni oscillanti (vere sole eccezioni all'identità tra integrabilità ed assoluta integrabilità) parlando del Teorema di Abel-Dirichlet.

Proposizione 3.5.20. (Criteri di integrabilità generalizzata per funzioni positive)

(i) (Criterio del confronto) *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni ≥ 0 localmente integrabili.*

  (a) *Se $0 \leq f \leq g$ all'intorno di b^-* (ad esempio, se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$) *e g è integrabile in b^-, allora tale è anche f;*

  (b) *Se $0 \leq g \leq f$ all'intorno di b^-* (ad esempio, se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$) *e g non è integrabile in b^-, allora non lo è nemmeno f.*

(ii) (Criterio di asintoticità) *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni ≥ 0 localmente integrabili dello stesso ordine in b^-* (ovvero, $f \sim^*_{b^-} g$)*. Allora f è integrabile in b^- se e solo se lo è g.*

Dimostrazione. (i) Poiché f e g sono positive, gli integrali $\int_a^\xi f(x)\,dx$ e $\int_a^\xi g(x)\,dx$ sono funzioni crescenti di ξ. Le conclusioni discendono allora dal Teorema del Confronto per i limiti. (ii) "Essere dello stesso ordine" significa che esiste $\lambda > 0$ tale che $f - \lambda g = o_{b^-}(g)$, ovvero $f = (\lambda + \sigma)g$ con σ infinitesimo in b^-: pertanto esiste $c \in]a, b[$ tale che $\frac{\lambda}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3\lambda}{2} g(x)$ per ogni $c < x < b$. Basta allora applicare l'appena dimostrato criterio del confronto. $\square$

Pertanto, per l'integrabilità generalizzata delle funzioni localmente integrabili positive (e dunque, come osservato, di tutte le funzioni di segno costante all'intorno del punto in questione), grazie al Criterio di asintoticità basterà ragionare a meno dell'ordine nel punto in questione (fondamentale appare, a questo punto, avere già studiato il comportamento della scala di potenze reali x^α, e più generalmente di $|x - c|^\alpha$ all'intorno di un qualsiasi $c \in \mathbb{R}$). Vediamo ancora qualche conseguenza elementare del Teorema del confronto:

Corollario 3.5.21. *Per funzioni positive valgono i seguenti fatti.*

(1) (Integrabilità delle funzioni limitate in punti di $\mathbb{R}$) *Siano $a < b \neq +\infty$, e sia $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione ≥ 0 localmente integrabile. Se esiste $\ell > 0$ tale che $0 \leq \varphi < \ell$ all'intorno di b^-, ovvero se φ è limitata all'intorno di b^-* (ad esempio, se $\lim_{x\to b^-} \varphi(x)$ esiste ed è finito)*, allora φ è integrabile in b^-.*

(2) (Non integrabilità delle funzioni lontane da zero in $\pm\infty$) *Sia $\varphi : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione ≥ 0 localmente integrabile. Se esiste $\ell > 0$ tale che $\varphi > \ell$ all'intorno di $+\infty$* (ad esempio, se $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$

esiste ed è $\neq 0$, ovvero, se φ diverge o ammette asintoto orizzontale $y = k > 0$), *allora φ non è integrabile in $+\infty$.*

Dimostrazione. Per (1) basta applicare il Criterio del confronto (a) con $f = \varphi$ e $g \equiv \ell$ (che è ovviamente integrabile in b^-); per (2), ancora una volta il Criterio del confronto (b) con $g \equiv \ell$ (che è ovviamente non integrabile a $+\infty$) e $f = \varphi$. □

Queste osservazioni ci fanno capire che, data una funzione localmente integrabile e positiva $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, gli unici casi la cui integrabilità in senso generalizzato di f in b^- può non essere di comprensibilità immediata sono quelli in cui

(1) $b \in \mathbb{R}$ e f non è limitata all'intorno di b^- (in particolare, se $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$);

(2) $b = +\infty$ e f "non si mantiene lontana da 0 all'intorno di $+\infty$"[63] (ad esempio, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$).[64]

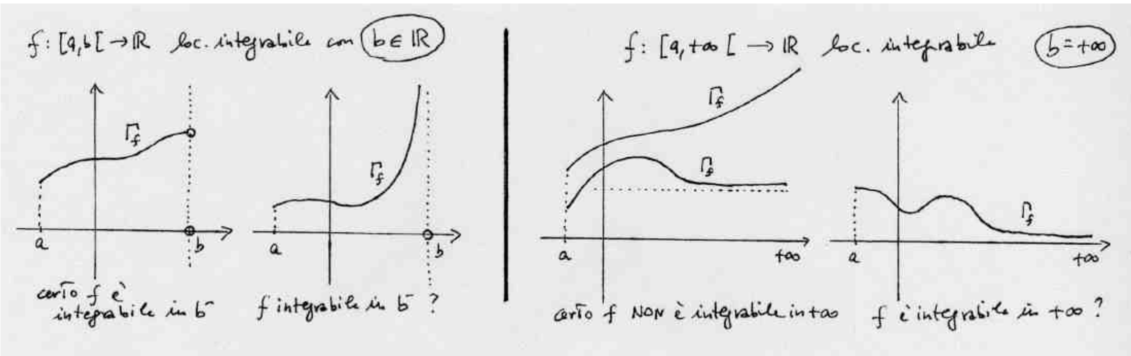

Figura 3.28: *Integrabilità generalizzata: casi chiari e casi dubbi.*

Esercizio. *Discutere l'esistenza dei seguenti integrali generalizzati e, se possibile, calcolarli :*

$$(\mathbf{1}) \int_0^{+\infty} \log x\, dx; \quad (\mathbf{2}) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}\, dx; \quad (\mathbf{3}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx; \quad (\mathbf{4}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\, dx;$$

$$(\mathbf{5}) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\, dx; \quad (\mathbf{6}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx; \quad (\mathbf{7}) \int_1^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^{1-3\alpha}\cos^\alpha x\, dx.$$

Risoluzione. Si noti che, in tutti gli esercizi proposti che seguono, le funzioni di cui si vuole studiare l'integrabilità in s.g. in un certo punto hanno segno costante all'intorno di quel punto. **(1)** $f(x) = \log x$ è integrabile in s.g. in 0^+: infatti essa è negativa all'intorno di 0^+, e dunque per essa l'integrabilità in s.g. equivale all'assoluta integrabilità in s.g. ; poi, come noto, si ha $\lim_{x\to0^+} \frac{|\log x|}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}|\log x| = 0$

[63] cioè per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $M > 0$ esiste $x > 0$ tale che $|x| > M$ e $f(x) < \varepsilon$.

[64] Va notato un fatto: se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è una funzione positiva, sappiamo bene che anche se $\lim_{x\to+\infty} f(x)\, dx = 0^+$ non è detto che f sia integrabile in senso generalizzato a $+\infty$ (l'ovvio controesempio è $f(x) = \frac{1}{x}$). Ma non è vero neanche il viceversa: ovvero, se f e' integrabile in senso generalizzato a $+\infty$ non è detto che sia $\lim_{x\to+\infty} f(x)\, dx = 0^+$. Tutto quello che si può dire è, come visto sopra, che di certo f non si mantiene lontana da 0 all'intorno di $+\infty$. Ad esempio, $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ che vale 1 sugli intervallini $[n, n + \frac{1}{n^2}]$ (per $n = 1, 2, 3, \dots$) e 0 altrove è ≥ 0, localmente integrabile, non infinitesima ($\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste) ma è integrabile in $+\infty$: infatti $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\, dt = \lim_{N\in\mathbf{N},\, N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right)$, e tale limite è finito (infatti, com'è noto, la somma infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$).

ed allora, essendo $1/\sqrt{x}$ integrabile in s.g. in 0^+, per il criterio del confronto lo sarà anche $|\log x|$. D'altra parte $f(x)$ non è integrabile in s.g. in $+\infty$, perché $\lim_{x\to+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è diverso da zero (vale $+\infty$). **(2)** Studiamo l'integrabilità in s.g. di $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ in $]0,+\infty[$. Si noti che f è definita e localmente integrabile (oltreché positiva) in $]0,+\infty[$, dunque vanno controllate l'integrabilità in 0^+ e in $+\infty$. Per 0^+, si ha $f(x) \sim^*_{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$, ed essendo $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ integrabile in s.g. in 0^+ (infatti $-\frac{1}{2} > -1$) anche f lo sarà. Per $+\infty$, si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x})^2} = x^{-\frac{5}{4}}$, ed essendo $x^{-\frac{5}{4}}$ integrabile in s.g. in $+\infty$ (perché $-\frac{5}{4} < -1$) anche f lo sarà. Dunque l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ ha senso, e sarà un numero reale *certamente* > 0 (perché $f > 0$). In questo caso è anche possibile calcolarlo, perché si trova[65] che una primitiva di f è $F(x) = -2(\frac{\sqrt[4]{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x})$, e dunque, preso un qualsiasi $a \in]0,+\infty[$ si ha $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(a) - \lim_{\xi\to0^+} F(\xi) + \lim_{\eta\to+\infty} F(\eta) - F(a) = \lim_{\eta\to+\infty} F(\eta) - \lim_{\xi\to0^+} F(\xi) = -2(0 - \frac{\pi}{2}) - \big(-2(2-0)\big) = 4+\pi$. **(3)** Esaminiamo l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(x) = \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. L'integrabilità va controllata solo in $+\infty$: poiché $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^3}$, essendo $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ integrabile in $+\infty$ tale sarà anche f. Per il calcolo scriviamo f nella forma binomiale $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$: converrà dunque porre $t = \frac{x}{x+1}$, da cui $x = \phi(t) = \frac{t}{1-t}$, e l'integrale generalizzato di partenza diventa l'integrale generalizzato (convergente per $t \to 1^-$) dato da $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^3}{t^3}\sqrt{t}\frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (t^{-\frac{5}{2}} - t^{-\frac{3}{2}})\,dt = (\frac{2(3t-1)}{3t\sqrt{t}}\big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{4}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$. **(4)** Poiché la funzione integranda è pari, l'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,dx$ esiste se e solo se esiste $\int_0^{+\infty} \frac{x\log x}{1+x^2}\,dx$, e sarà il doppio di questo. Ora $f(x) = \frac{x\log x}{1+x^2}$ è infinitesima (e dunque integrabile) in 0^+, ma in $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x\log x}{x^2} = \frac{\log x}{x} > \frac{1}{x}$; ma allora, poiché $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $+\infty$, per il criterio del confronto non lo sarà nemmeno $f(x)$. Pertanto l'integrale proposto è privo di significato. **(5)** Sia $f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$, e studiamo $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. La funzione f è infinitesima, e dunque integrabile, in 0^+, mentre in $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$, integrabile: dunque l'integrale proposto ha senso. Esso è anche calcolabile elementarmente, perché $f(x) = (e^{-1/x})'$ e dunque $F(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ è una primitiva di f: si ottiene $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to+\infty} e^{-\frac{1}{\xi}} - \lim_{\eta\to0^+} e^{-\frac{1}{\eta}} = 1 - 0 = 1$. **(6)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ è integrabile in $]0,+\infty[$ perché $f(x) \sim_{0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$. Anche qui è possibile il conto poiché (ad esempio, usando il metodo binomiale) si trova la primitiva $F(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ di f, da cui $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \pi$. **(7)** Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ ha senso l'integrale generalizzato $\int_1^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^{1-3\alpha}\cos^\alpha x\,dx$? La funzione $f_\alpha(x) = (x-1)^{1-3\alpha}\cos^\alpha x$ è continua (dunque localmente integrabile) in $]1,\frac{\pi}{2}[$, e bisogna dunque controllare l'integrabilità in s.g. nei due estremi. Per 1^+, si ha $\cos x \sim_{1^+} 1$ e dunque $f_\alpha \sim_{1^+} (x-1)^{1-3\alpha}$, da cui la condizione $1-3\alpha > -1$, ovvero $\alpha < \frac{2}{3}$. Poiché $x - 1 \sim^*_{\frac{\pi}{2}^-} 1$ e $\cos x \sim_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - x)$, si ricava che $f_\alpha(x) \sim_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2}-x)^\alpha$, dunque deve essere $\alpha > -1$. In definitiva, l'integrale ha senso se e solo se $-1 < \alpha < \frac{2}{3}$.

$\boxed{\textbf{Funzioni euleriane}}$ Le funzioni più importanti dopo quelle elementari sono probabilmente le *funzioni euleriane*, definite tramite integrali impropri. Iniziamo dall'integrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ (ove la variabile di integrazione è t, mentre x è un parametro reale). Poiché $t^{x-1}e^{-t} \sim_{0^+} t^{x-1}$, l'integrabilità in 0^+ richiede che sia $x-1 > -1$, ovvero $x > 0$; d'altra parte a causa della decrescenza rapidissima di e^{-t}, l'integrabilità in $+\infty$ è assicurata per ogni $x \in \mathbb{R}$ (più formalmente, poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^\alpha} = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, basta scegliere ad esempio $\alpha = -2$, per cui t^{-2} è integrabile in $+\infty$, ed applicare il criterio del confronto). In sostanza, resta definita una funzione

$$\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

detta *funzione Gamma di Eulero*. Essa ha una proprietà fondamentale: per un qualsiasi $x > 0$ si ha (integrando per parti) $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = (-t^x e^{-t}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-e^{-t})\,dt = 0 - 0 +$

[65] Ad esempio, col cambio di variabile $x = t^4$ si ottiene (usando anche l'integrazione per parti) che $\int f(x)\,dx = 4\int \frac{t(t+2)}{(t^2+1)^2}\,dt = -2\int \frac{-2t}{(t^2+1)^2}(t+2)\,dt = -2(\frac{t+2}{t^2+1} - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt) = -2(\frac{t+2}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t) + k$, da cui il risultato si ottiene risostituendo $t = \sqrt[4]{x}$.

$x\int_0^{+\infty} t^{x-1}(-e^{-t})\,dt = x\Gamma(x)$, ovvero

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Pertanto, essendo $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = (-e^{-t}|_{+\infty}^0 = 1$, si ricava $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$: in altre parole, *la funzione Gamma è un'interpolazione reale del fattoriale*. Un'altra funzione (di due variabili reali) di grande interesse si ha studiando l'integrale improprio $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, ove la variabile di integrazione è t ed x, y sono parametri reali: esso converge se e e solo se $x, y > 0$, ottenendo così la funzione

$$B : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

detta *funzione Beta di Eulero*. Menzioniamo solamente le seguenti identità, valide per ogni $x, y > 0$:[66]

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad B(x,y) = B(y,x), \\ B(x,y) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\,d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{x-1}}{(\xi+1)^{x+y}}d\xi. \end{aligned}$$

Integrali oscillanti Come promesso, terminiamo la trattazione dell'integrazione parlando degli *integrali oscillanti*, in pratica gli unici esempi significativi di integrali impropri che si sottraggono allo studio del caso particolare delle funzioni positive. Ad esempio, sia $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$: man mano che x tende verso $+\infty$, la funzione f continua ad oscillare tra le funzioni $\frac{1}{x}$ e $-\frac{1}{x}$: pertanto, l'area è una somma di contributi alternativamente positivi e negativi, e sempre più piccoli. Che ne sarà dell'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ (detto *integrale di Dirichlet*)? Convergerà oppure no? Stessa questione, sempre a $+\infty$, per $g(x) = \sin(x^2)$, o a 0^+ con $h(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Il problema è trattato nel *Teorema di Abel-Dirichlet*, di cui non diamo la dimostrazione. In esso, il prototipo da seguire è quello di $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, (con $a > 0$), in cui la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è il prodotto di un "fattore oscillante " $\varphi(x) = \sin x$ (che possiamo caratterizzare dicendo che ha una "primitiva limitata": vorrà dire che l'area sottesa dal grafico non potrà mai aumentare più di tanto quando $x \to +\infty$, indizio evidente del fatto che φ cambia segno in continuazione) e di un "fattore decrescente e infinitesimo" $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

Proposizione 3.5.22. (Teorema di Abel-Dirichlet sugli integrali oscillanti) *Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_{>a} \cup \{+\infty\}$ e $\varphi, \psi : [a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni localmente integrabili. Supponiamo che:*

(1) *φ abbia* (almeno a tratti) *una primitiva limitata;*

(2) *ψ sia di classe $\mathcal{C}^1$, decrescente e infinitesima in b^-.*

Allora $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ è integrabile in senso generalizzato su $[a,b[$.

Esempi. **(1)** Come si era detto, la funzione $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x}$ è integrabile in s.g. in $+\infty$: basta applicare il Teorema di Abel-Dirichlet con $\varphi(x) = (-1)^{[x]}$ (che ha primitiva continua e limitata $\Phi(x) = x - 2n$ sui tratti $]2n, 2n+1[$ e $\Phi(x) = -x + 2(n+1)$ sui tratti $]2n+1, 2(n+1)[$ con $n \in \mathbb{Z}$, il cui grafico è una "sega con denti alti 1") e $\psi(x) = \frac{1}{x}$. **(2)** L'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge: in 0^+ la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tende a 1 e dunque è integrabile, e a $+\infty$ basta applicare il Teorema di Abel-Dirichlet con $\varphi(x) = \sin x$ (che ha primitiva continua e limitata $\Phi(x) = -\cos x$) e $\psi(x) = \frac{1}{x}$. Ma $f(x)$ non è assolutamente integrabile: infatti se $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ si ha $\int_0^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{j=2}^k \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{j=2}^k \frac{1}{j\pi}\int_{(j-1)\pi}^{j\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{j=2}^k \frac{1}{j}$, e quando $k \to +\infty$ la serie numerica $\sum_{j=2}^k \frac{1}{j}$ tende come sappiamo a $+\infty$. **(3)** Alcuni integrali oscillanti con ampiezza non decrescente o persino

[66] Le ultime tre formule discendono dai cambi di variabile $t = 1 - \tau$, $t = \cos^2\theta$ e $t = \frac{\xi}{\xi+1}$, che sono diffeomorfismi rispettivamente di $]0,1[$, $]0,\frac{\pi}{2}[$ e $]0,+\infty[$ con $]0,1[$ (vedi Proposizione 3.5.15). La prima formula, invece, richiede l'uso di un risultato (Teorema di Fubini) sull'integrazione multipla, che va oltre i limiti del corso.

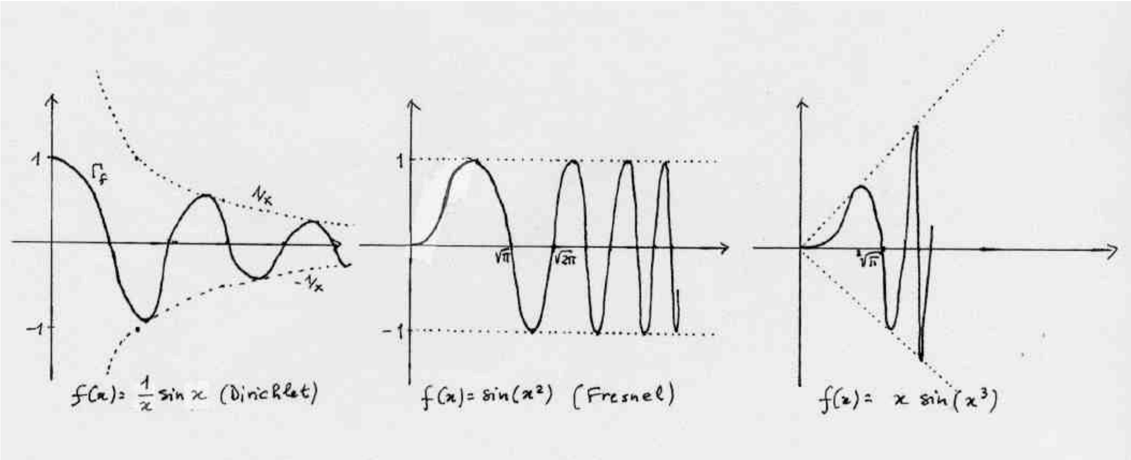

Figura 3.29: *Per il Teorema di Abel-Dirichlet, questi integrali oscillanti convergono.*

divergente possono risultare convergenti a causa di una sufficiente "rapidità di oscillazione": Ad esempio, l'*integrale di Fresnel* $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx$ con $\alpha > 1$ (un seno con oscillazioni sempre più frequenti all'aumentare di x) si può trasformare, col cambio di variabile $x = t^{\frac{1}{\alpha}}$, nell'integrale generalizzato $\frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} t^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \sin t \, dt$ che è un integrale di Abel-Dirichlet non appena $-(1-\frac{1}{\alpha}) < 0$, ovvero $\alpha > 1$; stesso discorso per $\int_0^{+\infty} x \sin x^\alpha \, dx$ con $\alpha > 2$. **(4)** Si può studiare il caso generale $I_{\alpha\beta} = \int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^\beta \, dx$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se $\beta > 0$, l'ordine della funzione integranda in 0^+ è quello di $x^{\alpha+\beta}$, da cui la condizione $\alpha + \beta > -1$; in $+\infty$, scrivendo $I_{\alpha\beta} = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-\beta+1} x^{\beta-1} \sin x^\beta \, dx$ ci accorgiamo che, poiché $\varphi(x) = x^{\beta-1} \sin x^\beta$ ha primitiva limitata $\Phi(x) = -\cos x^\beta$, se $\alpha - \beta + 1 < 0$ possiamo applicare il Teorema di Abel-Dirichlet, mentre se $\alpha - \beta + 1 \geq 0$ si dimostra che l'integrale non può convergere. Dunque, se $\beta > 0$ l'integrale converge se e solo se $\beta > |\alpha+1|$. Se $\beta = 0$ il termine col seno sparisce, e l'integrale converge in 0^+ (risp. in $+\infty$) se e solo se $\alpha > -1$ (risp. $\alpha < -1$); in particolare, l'integrale $I_{\alpha,0}$ non converge su $]0, +\infty[$ per nessun α. Infine, se $\beta < 0$ ci si riconduce facilmente al caso iniziale col cambio $x = \frac{1}{t}$, ottenendo integrabilità in 0^+ (risp. in $+\infty$) se e solo se $\beta < \alpha + 1$ (risp. $\beta < -\alpha - 1$); dunque, se $\beta < 0$ l'integrale converge se e solo se $-\beta > |\alpha + 1|$. Unendo il tutto, possiamo affermare che l'integrale generalizzato $I_{\alpha\beta}$ converge se e solo se $|\beta| > |\alpha + 1|$ (ad esempio, come visto, se $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$, $(0, r)$ e $(1, r + 1)$ con $r > 1$).