

# Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 1

Numeri reali - Geometria affine - Funzioni di una variabile reale - Limiti - Derivazione - Studio di funzione

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

Martedì 2 dicembre 2008

---

Questi esercizi verranno svolti, nel limite del possibile, durante la lezione del 05/12/2008 in preparazione della prima prova parziale di martedì 09/12/2008.

---

- (1) **Retta reale.** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ ; dire se sono superiormente/inferiormente limitati; calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i loro punti di accumulazione in  $\tilde{\mathbb{R}}$ ; dire di quali loro punti essi sono intorni.

$$A_1 = ] - 1, 1[ \cup \{1 + \frac{3}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}; \quad A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 - 4n - 1 > 0\} \cap \mathbb{Q}_{\leq 3};$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : \log(|x+1| - 1) \leq 1\} \cup \mathbb{R}_{>2}; \quad A_4 = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg} \frac{1}{x+1} = 0\} \cup [\frac{1}{2}, 3[.$$

- (2) **Geometria affine bi- e tridimensionale.**

- (a) Trovare le forme parametrica e cartesiana della retta  $r$  passante per  $P_{\vec{a}} = (1, 0)$  e parallela al vettore  $\vec{v} = (-1, 3)$ , della retta  $s$  passante per  $Q_{\vec{b}} = (-1, -1)$  e ortogonale al vettore  $\vec{w} = (2, -1)$  e della retta  $t$  passante per  $P$  e  $Q$ . Calcolare le coordinate del punto  $R_{\vec{c}} = r \cap s$ , e la distanza di  $R$  dalla retta  $t$ .
- (b) Nello spazio cartesiano si disegnino i tre punti  $P_{\vec{a}} = (1, 0, -2)$ ,  $Q_{\vec{b}} = (-2, -1, 1)$  e  $R_{\vec{c}} = (3, 1, 0)$ , ed i due vettori  $\vec{v} = (-1, 3, 0)$  e  $\vec{w} = (1, 1, 2)$ . Calcolare e disegnare  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ . Determinare l'area del parallelogramma individuato da  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  ed il volume del parallelepipedo individuato dai vettori  $\vec{u} = (0, 1, -1)$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{a} + \vec{b}$ . Trovare le forme parametrica e cartesiana del piano  $\Pi$  passante per  $P$  e parallelo a  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ; del piano  $\Pi'$  passante per  $Q$  e ortogonale a  $\vec{w}$ ; del piano  $\Pi''$  passante per  $P$ ,  $Q$  e  $R$ ; del piano  $\Pi'''$  passante per  $Q$  e  $R$  e parallelo a  $\vec{u} + 2\vec{w}$ ; della retta  $r$  passante per  $R$  e parallela a  $2\vec{w} - \vec{v}$ ; e la distanza di  $Q$  da  $\Pi$ . Trovare infine la proiezione del vettore  $\vec{v} + \vec{w}$  lungo il vettore  $\vec{u}$ .

- (3) **Funzioni di una variabile reale.**

- (a) Dire se  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$  è iniettiva e se è suriettiva, e calcolare (eventualmente, restringendo e corestringendo opportunamente dominio e condominio) la funzione inversa. Dire se  $f$  è superiormente e/o inferiormente limitata. Calcolare l'antimmagine  $f^{-1}(]-2, 2])$ .
- (b) Stesse domande per  $g(x) = e^{\frac{x}{x^2-2}}$ .

#### (4) Limiti e continuità.

(a) Calcolare i seguenti limiti nei casi  $\alpha = 1$  e  $\alpha = -1$ . (Facoltativo: discutere  $\alpha \in \mathbb{R}$ .)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + x^\alpha}, & \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{\alpha}{x+1}} \log|x|, & \text{(c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctg(x^\alpha) + \alpha), \\ \text{(d)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\alpha x} - 3x}{|x|^\alpha - 1}, & \text{(e)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} (x^{2\alpha} - 1) \log|x+1|, & \text{(f)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1 + \cos x}, \\ \text{(g)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10 - x^2} - 1}{\sin(\pi(x + \alpha))}, & \text{(h)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cotg(\alpha x)}{\log 2x}, & \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \cos x - 3\sqrt[3]{1+x} + x}{x^\alpha}. \end{aligned}$$

(b) Si consideri la funzione  $h_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$h_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha x - 1 & (\text{se } x < -1) \\ x^2 - 4 & (\text{se } -1 \leq x < 3) \\ \frac{x^\beta - 4x}{x^2 - 6} & (\text{se } x \geq 3) \end{cases}.$$

Si dica:

- (i) per quali  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  la funzione  $h_{\alpha,\beta}$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$ ;
- (ii) per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_{\alpha,\beta}(x) = -1$ ;
- (iii) per quali  $\beta \in \mathbb{R}$  si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_{\alpha,\beta}(x) \in \mathbb{R}$ .

#### (5) Derivazione.

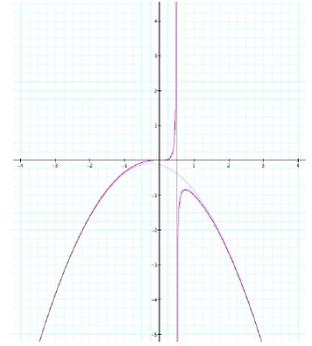
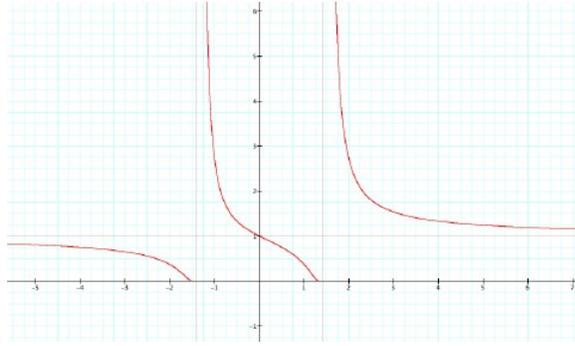
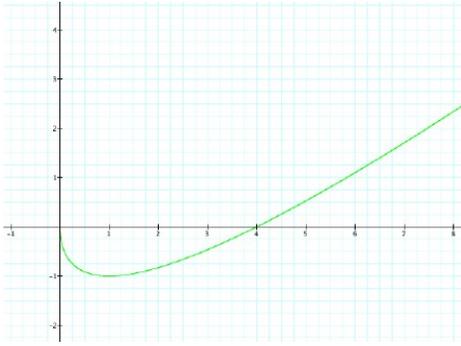
- (a) Studiare la funzione  $f(x) = \frac{x^3}{1 - 2x}$  e disegnarne il grafico (determinando se possibile anche la parabola asintoto di  $f$  a  $\pm\infty$ ). Dire in quali punti del dominio la retta tangente al grafico ha pendenza  $-1$ , e in quali altri la retta tangente al grafico passa per il punto  $(2, 0)$ . Calcolare infine l'equazione cartesiana di tali rette.
- (b) Sia  $f(x) = \sqrt{|\cos x| - x}$ . Dire qual'è il dominio di  $f$ , e in quali punti del dominio essa è derivabile; calcolare la derivata in tali punti.
- (c) Tra tutti i coni retti a base circolare con assegnata superficie laterale  $S$ , determinare il raggio di base di quello avente il volume massimo.
- (d) Per quale  $\alpha > 0$  l'area della regione di piano racchiusa tra le spezzate  $y = \alpha^2(|x| - 1)$  e  $y = \frac{1}{\alpha}(1 - |x|)$  (che, si noti, si incontrano sempre nei punti  $(\pm 1, 0)$ ) è minima?
- (e) Studiare gli estremi locali di  $f(x) = |x + 3| - 4 \arctg x$  e  $g(x) = \log|2 \cos x + 1| + x$ .
- (f) Disegnare il grafico di  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$ , e determinarne i punti più vicini alla retta  $x - 3y + 5 = 0$ . Stessa domanda per il tratto del grafico di  $g(x) = \cos x$  con  $|x| \leq \pi$ .

(6) **Studio di funzione.** Si studi l'andamento delle seguenti funzioni e se ne tracci il grafico.

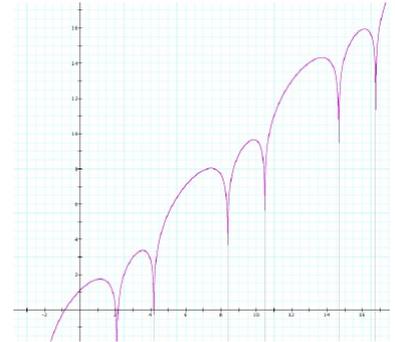
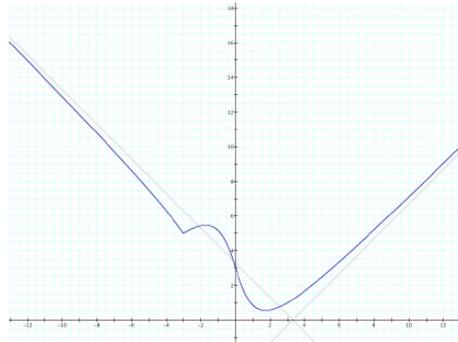
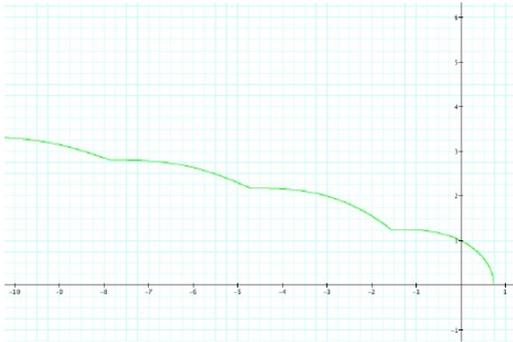
$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = |x - 1|e^x, & \text{(b)} \quad & f(x) = \arctg \frac{x^2 - x}{|x| - 2}, & \text{(c)} \quad & f(x) = \sin 2x - 2 \cos x, \\ \text{(d)} \quad & f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} - 1, & \text{(e)} \quad & f(x) = \log(\sqrt{|x+2|} - x) + 1, & \text{(f)} \quad & f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x - 2}}. \end{aligned}$$

## Risultati.

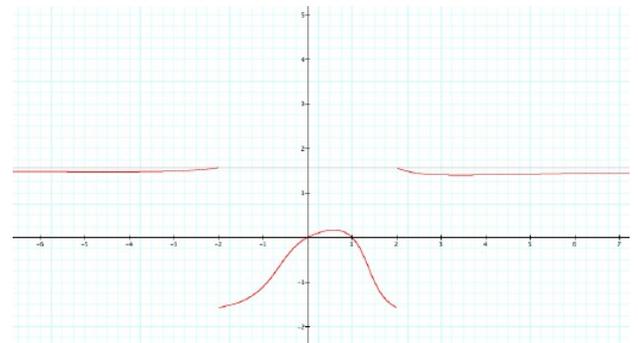
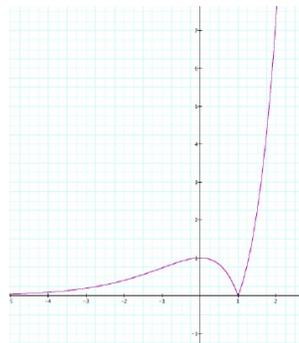
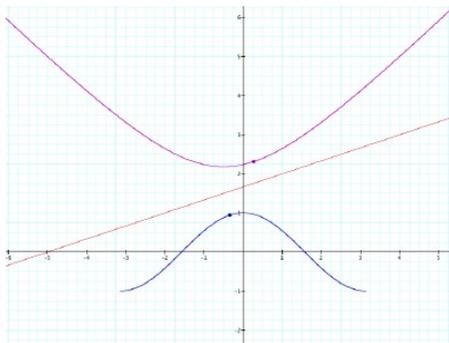
- (1) •  $A_1$  è limitato;  $\max = 4$ ,  $\inf = -1$ ; accumulazioni sono i punti di  $[-1, 1]$ ; è intorno dei punti di  $] -1, 1[$ .  
 •  $A_2 = \mathbb{Z}_{\leq -1}$ , dunque è superiormente limitato;  $\max = -1$ ; accumulazione è  $-\infty$ ; è intorno di nessun punto.  
 •  $A_3 = \mathbb{R}_{\geq -e-2}$ , dunque è inferiormente limitato;  $\min = -e - 2$ ; accumulazioni sono tutti i suoi punti e  $+\infty$ ; è intorno di  $+\infty$  e di tutti i suoi punti tranne  $-e - 2$ .  
 •  $A_4$  è limitato;  $\sup = 3$ ,  $\min = -1 - \frac{1}{\pi}$ ; accumulazioni sono  $-1$  e i punti di  $[\frac{1}{2}, 3]$ ; è intorno dei punti di  $]\frac{1}{2}, 3[$ .
- (2) •  $r = \{(1 - \alpha, 3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : 3x + y - 3 = 0\}$ ;  $s = \{(-1 + \alpha, -1 + 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : 2x - y + 1 = 0\}$ ;  
 $t = \{(1 + 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x - 2y - 1 = 0\}$ ;  $R(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$ ;  $\text{dist}_t(R) = \frac{21}{25}\sqrt{5}$ .  
 •  $\vec{v} \wedge \vec{w} = 2(3, 1, -2)$ ;  $\text{area } 2\sqrt{14}$ ,  $\text{volume } 1$ ;  $\Pi = \{(1 - \alpha + \beta, 3\alpha + \beta, -2 + 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 3x + y - 2z - 7 = 0\}$ ;  
 $\Pi' = \{(-2 + \alpha + 2\beta, -1 - \alpha, 1 - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x + y + 2z + 1 = 0\}$ ;  
 $\Pi'' = \{(1 + 3\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, -2 - 3\alpha + 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 5x - 12y + z - 3 = 0\}$ ;  
 $\Pi''' = \{(-2 + 2\alpha + 5\beta, -1 + 3\alpha + 2\beta, 1 + 3\alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 9x - 17y + 11z - 10 = 0\}$ ;  
 $r = \{(3 + 3\alpha, 1 - \alpha, 4\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x + 3y - 6 = 0, 4y + z - 4 = 0\}$ ;  
 $\text{dist}_{\Pi}(Q) = \frac{8}{7}\sqrt{14}$ ;  $p_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}$ .
- (3) I risultati si comprendono meglio osservando le Figure 1 e 2.  
 • Il dominio di  $f$  è  $A = [0, +\infty[$ . Preso  $y \in \mathbb{R}$ , la fibra  $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$  è vuota se  $y < -1$ , è formata dal solo punto  $\{x = 1\}$  se  $y = -1$ , dai due punti distinti  $\{x_1 = (1 - \sqrt{y+1})^2, x_2 = (1 + \sqrt{y+1})^2\}$  se  $-1 < y < 0$  e dal solo punto  $\{x = (1 + \sqrt{y+1})^2\}$  se  $y > 0$ : dunque  $f$  non è né iniettiva né suriettiva, ed ha immagine  $B = f(A) = [-1, +\infty[$ . Ad esempio, restringendo il dominio di  $f$  a  $A' = [1, +\infty[$  ed il codominio a  $B$ , la funzione  $f : A' \rightarrow B$  diventa biiettiva, con inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A'$  data da  $x = f^{-1}(y) = (1 + \sqrt{y+1})^2$ . La funzione è inferiormente limitata con minimo  $-1$ . Vale  $f^{-1}(]-2, 2]) = [0, 2(2 + \sqrt{3})]$ .  
 • Il dominio di  $g$  è  $A = \mathbb{R} \setminus \{\mp\sqrt{2}\}$ . Preso  $y \in \mathbb{R}$ , la fibra  $g^{-1}(y) = \{x \in A : g(x) = y\}$  è vuota se  $y \leq 0$ , è formata dal solo punto  $\{0\}$  se  $y = 1$ , e dai due punti distinti  $\{x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+8\log^2 y}}{2\log y}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+8\log^2 y}}{2\log y}\}$  se  $y > 0$  con  $y \neq 1$ : dunque  $g$  non è né iniettiva né suriettiva, ed ha immagine  $B = f(A) = ]0, +\infty[$ . Se  $y > 1$  si ha  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 0$ ; poiché ad esempio per  $y = e$  si ottiene  $x_2 = 2$  e per  $y = e^2$  si ottiene  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{4} \sim 1,7 < 2$ , restringendo il dominio di  $g$  a  $A' = [\frac{1 + \sqrt{33}}{4}, 2]$  e il codominio a  $B' = [e, e^2]$ , la funzione  $g : A' \rightarrow B'$  diventa biiettiva con inversa  $g^{-1} : B' \rightarrow A'$  data da  $x = g^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{1+8\log^2 y}}{2\log y}$ . Anche  $g$  è inferiormente limitata con estremo inferiore (non minimo)  $0$ . Vale  $g^{-1}(]-2, 2]) = [-\infty, -\sqrt{2}[ \cup [\frac{1 - \sqrt{1+8\log^2 2}}{2\log 2}, \sqrt{2}[ \cup [\frac{1 + \sqrt{1+8\log^2 2}}{2\log 2}, +\infty[$ .
- (4) Ecco le risposte già nel caso di  $\alpha$  qualsiasi, che comprendono in particolare i casi  $\alpha = -1$  e  $\alpha = 1$ .  
 • (a) Per  $\alpha < \frac{1}{2}$  il limite vale  $-3$ . Per  $\alpha = \frac{1}{2}$  vale  $-\frac{3}{2}$ . Per  $\alpha > \frac{1}{2}$  vale  $0^-$ .  
 • (b) Per  $\alpha \leq 0$  il limite vale  $0^-$ . Per  $\alpha > 0$  vale  $-\infty$ .  
 • (c) Per  $\alpha < 0$  il limite vale  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ . Per  $\alpha = 0$  vale  $\frac{\pi}{4}$ . Per  $\alpha > 0$  vale  $\alpha$ .  
 • (d) Per  $\alpha < 1$  il limite vale  $+\infty$ . Per  $\alpha = 1$  vale  $3$ . Per  $\alpha > 1$  vale  $0^+$ .  
 • (e) Per  $\alpha < 0$  il  $\lim_{x \rightarrow -1^{\mp}}$  vale  $0^{\pm}$ . Per  $\alpha = 0$  la funzione è nulla. Per  $\alpha > 0$  il  $\lim_{x \rightarrow -1^{\mp}}$  vale  $0^{\mp}$ .  
 • (f) Per  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  il limite vale  $+\infty$ . Per  $\alpha \in \mathbb{Z}$  vale  $2\alpha^2$ .  
 • (g) Per  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  il limite vale  $0$ . Per  $\alpha \in \mathbb{Z}$  vale  $(-1)^{\alpha} \frac{3}{\pi}$ .  
 • (h) La funzione esiste solo per  $\alpha \neq 0$ , e il limite vale  $-(\text{sign } \alpha)\infty$ .  
 • (i) Per  $\alpha < 2$  il limite vale  $0^-$ . Per  $\alpha = 2$  vale  $-\frac{1}{6}$ . Per  $\alpha > 2$  vale  $-\infty$ .
- (5) • (a) (Vedi Figura 3) La parabola asintotica è  $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$ . Pendenza  $-1$  solo in  $c = 1$ , e passante per il punto  $(2, 0)$  in  $c = 0, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ . Le tangenti si calcolano con la formula  $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ .  
 • (b) (Vedi Figura 4) Il confronto grafico dice che esiste un solo  $c \in ]0, 1[$  tale che  $|\cos c| = c$ , e il dominio è  $] -\infty, c]$ ; la funzione è ivi continua, e derivabile ovunque tranne che in  $c$  e in  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ . La derivata è  $\frac{-(\text{sign } \cos x) \sin x - 1}{2\sqrt{|\cos x| - x}}$ : si noti che è sempre  $\leq 0$ , dunque  $f$  è sempre decrescente.  
 • (c) Il raggio di base per cui il volume è massimo è  $\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ .  
 • (d) L'area è minima per  $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ .  
 • (e) (Vedi Figure 5 e 6)  $f(x)$  ha due punti di minimo locale in  $x = -3$  (singolare, perché angoloso) e  $x = \sqrt{3}$ , e un punto di massimo locale in  $x = -\sqrt{3}$ .  $g(x)$  ha infiniti punti di massimo locale nei punti  $x = -\arccos(\frac{-1 - \sqrt{7}}{4}) + 2k\pi$  e  $x = \arccos(\frac{-1 + \sqrt{7}}{4}) + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 • (f) (Vedi Figura 7) Il punto di minima distanza del grafico di  $f(x)$  è quello con  $x = \frac{-4 + \sqrt{38}}{8} \sim 0,27$ . Il punto di minima distanza del grafico di  $g(x)$  con  $|x| \leq \pi$  è quello con  $x = -\arcsin \frac{1}{3} \sim -0,34$ .
- (6) I grafici delle sei funzioni proposte sono riportati nelle Figure 8-9-10-11-12-13.



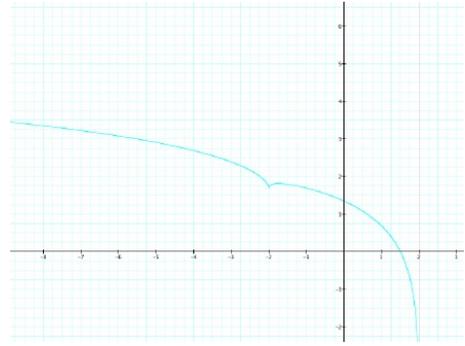
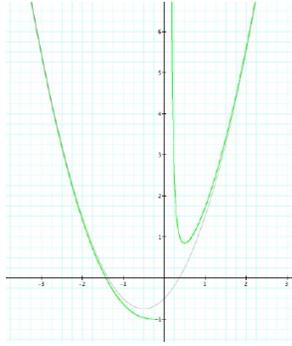
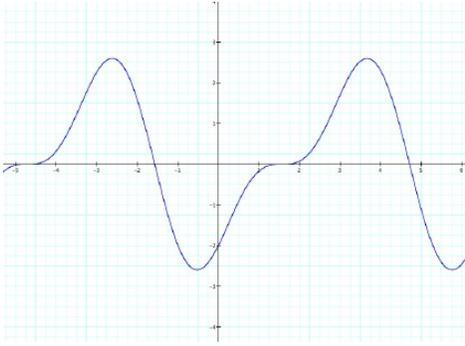
(1) Grafico di  $x - 2\sqrt{x}$ ; (2) Grafico di  $e^{\frac{x}{x^2-2}}$ ; (3) Grafico di  $\frac{x^3}{1-2x}$ .



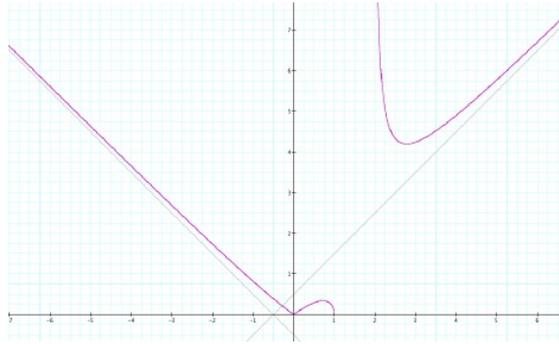
(4) Grafico di  $\sqrt{|\cos x| - x}$ ; (5) Grafico di  $|x+3| - 4 \operatorname{arctg} x$ ; (6) Grafico di  $\log |2 \cos x + 1| + x$ .



(7) Grafici di  $\sqrt{x^2 + x + 5}$  e  $\cos x$  (con  $|x| \leq \pi$ ), e punti di minima distanza dalla retta  $x - 3y + 5 = 0$ ; (8) Grafico di  $|x-1|e^x$ ; (9) Grafico di  $\operatorname{arctg} \frac{x^2-x}{x-2}$ .



(10) Grafico di  $\sin 2x - 2 \cos x$ ; (11) Grafico di  $x^2 e^{\frac{1}{x}} - 1$ ; (12) Grafico di  $\log(\sqrt{|x+2|} - x) + 1$ .



(13) Grafico di  $\sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x-2}}$ .