Matematica - 2a Prova parziale e Preappello straord. (27/01/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie AI - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ ☐ 2pp ☐ Pre

IN STAMPATELLO

Tema A

(1) Pre Nello spazio tridimensionale sono dati i punti $A(1,0,1)$ e $B(0,1,2)$ e i vettori $\vec{v} = (1,2,0)$ e $\vec{w} = (2,0,-3)$. Determinare (in forma parametrica e cartesiana) il piano Π passante per A e B e parallelo a $\vec{v}$, e la retta r passante per l'origine O e ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$. Detta poi $\mathcal{P}$ la parabola $y = x^2 + 1$ sul piano orizzontale, trovare il punto di $\mathcal{P}$ più vicino a Π.

(2) Pre Studiare $f(x) = \log\left(\dfrac{|x|-1}{2x^2-x-1}\right)$, e tracciarne il grafico (non è richiesta la convessità).

(3) (a) Pre 2pp Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^1 (e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x+1})\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2 x\ \sin 2x}{1-\sin x}\,dx.$

(b) 2pp Disegnare $S = \{(x,y) : 2 \le (x+1)y \le 4x,\ |x| + y \le 3\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Pre 2pp Determinare dominio, zeri, segno e limiti interessanti di $f(x,y) = \dfrac{2x-y+3}{x+y^2}$, disegnando i risultati. Calcolare il piano tangente al grafico di f sopra $(-2,1)$. Dire quali sono i punti stazionari di f, e ricercarne eventuali punti di massimo o minimo locale.

(b) 2pp Disegnare l'insieme $K = \{(x,y) : y^2 - 5y + 4 \le x \le 0\}$, e calcolare massimo e minimo assoluti di f su di esso (perché esistono?). (Facoltativo: dopo aver descritto come sono fatte le curve di livello $f(x,y) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, interpretare geometricamente quanto trovato.)

(5) (a) Pre 2pp Studiare a priori la crescenza delle soluzioni $y(x)$ di $2(x+1)yy' = 1 - y^2$; calcolarne poi la soluzione tale che $y(0) = -2$, confrontandola con quanto trovato prima. Stesse domande per $y' + x = 2xy$.

(b) 2pp Quali sono le soluzioni dell' equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 4x + 5\sin x + 3e^{-x}$ il cui grafico taglia l'asse y con pendenza 1?

(1) • Il piano Π passante per $A(1,0,1)$ e $B(0,1,2)$ e parallelo a $\vec{v}=(1,2,0)$ dovrà essere parallelo anche al vettore $(1,0,1)-(0,1,2)=(1,-1,-1)$, dunque avrà forma parametrica $\Pi=\{(1,0,1)+\alpha(1,2,0)+\beta(1,-1,-1):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(1+\alpha+\beta,2\alpha-\beta,1-\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$; da $z=1-\beta$ e $y=2\alpha-\beta$ si ricava $\beta=1-z$ e $\alpha=\frac{1}{2}(y-z+1)$, che messe in $x=1+\alpha+\beta$ danno la forma cartesiana $2x-y+3z-5=0$. • La retta r sarà parallela al prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{w}=(-6,3,-4)$, dunque una forma parametrica sarà $r=\{(0,0,0)+\alpha(-6,3,-4):\alpha\in\mathbb{R}\}=\{(6\alpha,-3\alpha,4\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$: mettendo ad esempio $\alpha=\frac{1}{4}z$ in $(x,y)=(6\alpha,-3\alpha)$ si ottiene la forma cartesiana $\begin{cases} x=\frac{3}{2}z \\ y=-\frac{3}{4}z\end{cases}$. • Il punto generico della parabola $\mathcal{P}$ è della forma $(t,t^2+1,0)$,[(1)] la cui distanza dal piano Π è data da $d(t)=\frac{|2(t)-(t^2+1)+3(0)-5|}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(t^2-2t+6)$; essendo $d'(t)=\frac{2}{\sqrt{14}}(t-1)\geq 0$ per $t\geq 1$, ricaviamo che il punto di $\mathcal{P}$ più vicino a Π è quello con $t=1$, ovvero $(1,2,0)$.

(2) (Vedi Figura 1) Il dominio A di $f(x)=\log(\frac{|x|-1}{2x^2-x-1})$ è dato da $\frac{|x|-1}{2x^2-x-1}>0$: poiché il numeratore è positivo per $x<-1$ o $x>1$ e il denominatore per $x<-\frac{1}{2}$ o $x>1$, si ottiene $A=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]-\frac{1}{2},1[\,\cup\,]1,+\infty[$. In A la funzione è derivabile infinite volte, tranne che in $x=0$ in cui (a causa del modulo) è probabile si abbia un punto angoloso. I limiti interessanti sono determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=-\infty$ (con andamento logaritmico, dunque senza asintoti lineari), $\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\log(\frac{1}{2x+1})=\log(\frac{1}{3})=-\log 3\sim -1{,}1$. Gli zeri si hanno quando $\frac{|x|-1}{2x^2-x-1}=1$, ovvero $|x|-1=2x^2-x-1$: per $x\geq 0$ si ottiene $x-1=2x^2-x-1$, da cui $x=0$, mentre per $x\leq 0$ si ha $-x-1=2x^2-x-1$, da cui nuovamente $x=0$. Si ha poi $f(x)>0$ quando $\frac{|x|-1}{2x^2-x-1}>1$, ovvero $\frac{2x^2-|x|-x}{2x^2-x-1}<0$: se $x\geq 0$ si ottiene $\frac{2x(x-1)}{2x^2-x-1}=\frac{2x}{2x+1}<0$, sempre falsa; se invece $x<0$ si ha $\frac{2x^2}{2x^2-x-1}<0$, verificata per $-\frac{1}{2}<x<0$. Derivando per $x>0$ si trova $f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1}\,\frac{(2x^2-x-1)-(4x-1)(x-1)}{(2x^2-x-1)^2}=\frac{-2}{2x+1}$, che è sempre negativa, dunque f è strettamente decrescente; invece per $x<0$ si trova $f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{-x-1}\,\frac{-(2x^2-x-1)-(4x-1)(-x-1)}{(2x^2-x-1)^2}=-\frac{2x(x+2)}{(x+1)(2x^2-x-1)}$, che nel dominio si annulla per $x=-2$ ed è positiva per $x<-2$, dunque $x=-2$ è punto di massimo relativo con $f(-2)=\log\frac{1}{9}=-2\log 3\sim -2{,}2$. Si noti infine che $f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}f'(x)=0$ mentre $f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=-2$, dunque in $x=0$ si ha effettivamente un punto angoloso, come era da attendersi.

(3) (a) Si ha $\int_0^1(e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x+1})\,dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx-\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx$; posto $u=\sqrt{x}$ (ovvero $x=u^2$) e $v=x+1$ si ottiene $\int_0^1 e^u\,2u\,du-\int_1^2\sqrt{v}\,dv=(2(u-1)e^u]_0^1-(\frac{2}{3}v\sqrt{v}]_1^2=(0)-(-2)-((\frac{4\sqrt{2}}{3})-(\frac{2}{3}))=\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\sim 0{,}8$. • Ponendo $t=\sin x$ (dunque $dt=\cos x\,dx$) e ricordando che $\sin 2x=2\sin x\cos x$ si ottiene $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^2 x\,\sin 2x}{1-\sin x}\,dx=-2\int_{-1}^0\frac{t^3}{t-1}\,dt=-2\int_{-1}^0(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})\,dt=-2(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+\log|t-1|]_{-1}^0=-2((0)-(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\log 2))=-(\frac{5}{3}-2\log 2)\sim -0{,}3$.
(b) (Vedi Figura 2) L'insieme $S=\{(x,y):2\leq(x+1)y\leq 4x,\ |x|+y\leq 3\}$ è rappresentato in figura. Poiché vale $\frac{2}{x+1}=\frac{4x}{x+1}$ solo per $x=\frac{1}{2}$, vale $\frac{4x}{x+1}=3-|x|$ solo per $x=1$ e vale $\frac{2}{x+1}=3-|x|$ per $x=\sqrt{2}+1$, $-2-\sqrt{3}$ e $-2+\sqrt{3}$ (ma in realtà ci interessa solo $x=\sqrt{2}+1$), si ricava che l'area di S è $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{4x}{x+1}\,dx+\int_1^{\sqrt{2}+1}(3-x)\,dx+\int_{\sqrt{2}+1}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x+1}\,dx=4(x-\log|x+1|]_{\frac{1}{2}}^1+(3x-\frac{1}{2}x^2]_1^{\sqrt{2}+1}+2(\log|x+1|]_{\sqrt{2}+1}^{\frac{1}{2}}=4(1-\log 2)-4(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2})+(3\sqrt{2}+3-\frac{1}{2}(2+1+2\sqrt{2}))-(\frac{5}{2})+2\log\frac{3}{2}-2\log(2+\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}-10\log 2+6\log 3-2\log(2+\sqrt{2})\sim 1$.

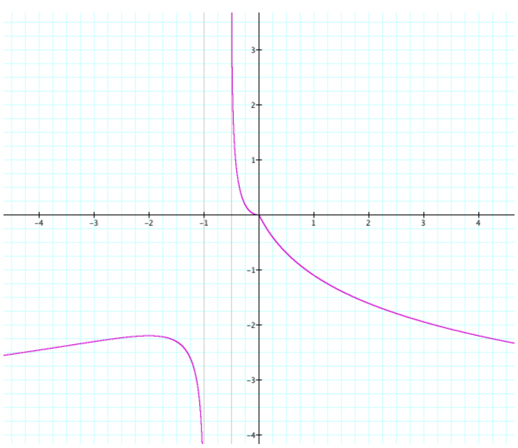
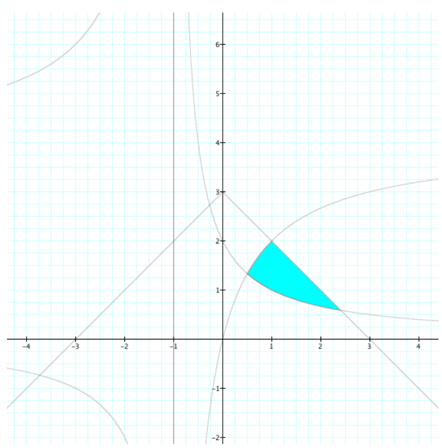
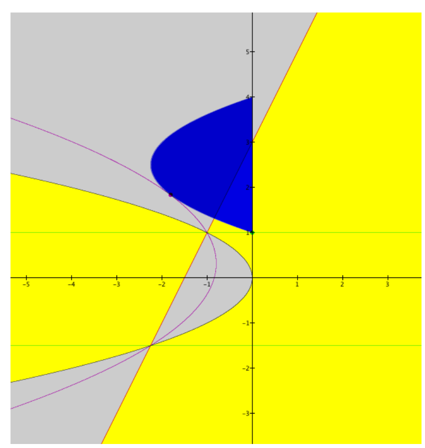
(4) (a) (Vedi Figura 3) I soli punti che non fanno parte del dominio di $f(x,y)=\frac{2x-y+3}{x+y^2}$ sono quelli della parabola $x=-y^2$; gli zeri sono i punti della retta $2x-y+3=0$ (esclusi ovviamente $A(-1,1)$ e $B(-\frac{9}{4},-\frac{3}{2})$, intersezioni con la parabola che dunque non appartengono al dominio); il numeratore è positivo sotto la retta, il denominatore lo è a destra della parabola, e il segno di f ne segue per quoziente. I limiti interessanti sono nei punti della parabola e in ∞_2 (punto all'infinito del dominio): nei punti della parabola diversi da A e B il limite è ∞ (col segno $+$ o $-$ a seconda del lato da cui si tende, come si può vedere dal segno di f); in A, B e ∞_2 invece il limite non esiste (tendendovi lungo la retta $2x-y+3=0$ esso è 0, ma in ogni intorno di ciascuno dei tre punti vi sono altri punti della parabola, avvicinandosi ai quali la funzione diverge a ∞). Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2(x+y^2)-1(2x-y+3)}{(x+y^2)^2}=\frac{2y^2+y-3}{(x+y^2)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1(x+y^2)-2y(2x-y+3)}{(x+y^2)^2}=\frac{y^2-4xy-x-6y}{(x+y^2)^2}$ sono continue in tutto il dominio, dunque la funzione è differenziabile ovunque; il piano tangente al grafico di f sopra $(-2,1)$ è allora $z=2+0(x-(-2))+5(y-1)$, ovvero ha forma cartesiana $5y-z-3=0$. Infine, il sistema $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ è privo di soluzioni (si trovano solo A e B, che però non sono accettabili) e dunque non ci sono punti stazionari, in particolare nemmeno punti di estremo locale.
(b) (Vedi Figura 3) Gli estremi assoluti di f su $K=\{(x,y):y^2-5y+4\leq x\leq 0\}$ esistono per il teorema di Weierstrass, perché K è un insieme compatto (cioè chiuso e limitato) tutto contenuto nel dominio di f, che è continua. Nei punti interni di K tali estremi assoluti non potranno di certo essere assunti: infatti, se in uno di questi punti fosse ad esempio assunto il minimo assoluto, esso dovrebbe essere in particolare un punto di minimo locale, e allora l'avremmo individuato

[(1)] in altre parole, $\mathcal{P}$ è parametrizzata da $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))=(t,t^2+1,0)$.

tra i punti stazionari: ma, come visto, non ce ne sono. Pertanto gli estremi assoluti di f su K saranno assunti in qualche punto del bordo di K. Nei punti particolari $P(0,1)$ e $Q(0,4)$ vale $f(P)=2$ e $f(Q)=-\frac{1}{16}$. Sul tratto di parabola $x=y^2-5y+4$, descritto dalla variabile y con $1\le y\le 4$, la funzione vale $f(y^2-5y+4,y)=\frac{2y^2-11y+11}{2y^2-5y+4}$: derivando rispetto a y si ottiene $\frac{(4y-11)(2y^2-5y+4)-(4y-5)(2y^2-11y+11)}{(2y^2-5y+4)^2}=\frac{12y^2-28y+11}{(2y^2-5y+4)^2}$, che si annulla in $y=\frac{11}{6}$ (accettabile) e $y=-\frac{1}{2}$ (non accettabile). Otteniamo così un altro punto di bordo in cui può essere assunto uno dei due estremi, ovvero $R(-\frac{65}{36},\frac{11}{6})$ in cui vale $f(R)=-\frac{11}{7}$. Infine, sul segmento verticale dell'asse y, pure esso descritto dalla variabile y con $1\le y\le 4$, la funzione vale $f(0,y)=-\frac{y-3}{y^2}$: derivando rispetto a y si ottiene $\frac{y-6}{y^3}$, che si annulla in $y=6$ (non accettabile). Gli estremi di f su K possono essere dunque assunti solo nei punti P, Q e R: e basta confrontare i valori di f in essi per concludere che il massimo assoluto è 2 (assunto in P) e il minimo è $-\frac{11}{7}$ (assunto in R). • Le curve di livello $f(x,y)=\frac{2x-y+3}{x+y^2}=\alpha$, ovvero $2x-y+3=\alpha(x+y^2)$, passano tutte per i punti A e B (che sono però fuori dal dominio di f): per $\alpha\ne 0$ e $\alpha\ne 2$ esse sono delle parabole $x=\frac{1}{2-\alpha}(\alpha y^2+y-3)$, mentre per $\alpha=0$ si ottiene la retta $2x-y+3=0$ (già nota, infatti, come luogo degli zeri di f) e per $\alpha=2$ si ottiene $(y-1)(2y+3)=0$, ovvero l'unione delle rette $y=1$ (passante per P) e $y=-\frac{3}{2}$. La figura dà allora l'interpretazione geometrica cercata: la curva di livello più bassa, con $\alpha=-\frac{11}{7}$, incontra K in R; mentre quella più alta, con $\alpha=2$, incontra K in P.

(5) (a) L'equazione $2(x+1)yy'=1-y^2$ è a variabili separabili. Se $x=-1$ si ricava $0=1-y(-1)^2$, ovvero $y(-1)=\mp 1$: in altre parole, un'eventuale soluzione definita in $x=-1$ dovrà valere ivi -1 oppure $+1$ (in effetti, per di lì passano le uniche soluzioni costanti $y=\mp 1$). Per $x\ne -1$ si ha invece $y'=\frac{1-y^2}{2y(x+1)}$, dunque se $x>-1$ le soluzioni saranno crescenti per $y<-1$ e per $0<y<1$, e se $x<-1$ per $-1<y<0$ e per $y>1$. Nel nostro caso, separando le variabili si ha $\frac{2y}{1-y^2}\,dy=\frac{1}{x+1}\,dx$, da cui (supponendo già che $x>-1$) si ha $-\log|1-y^2|=\log(x+1)+k$, e imponendo che $y(0)=-2$ si ottiene $k=-\log 3$, da cui $-\log|1-y^2|=\log(x+1)-\log 3$, da cui $\log|1-y^2|=\log\frac{3}{x+1}$, da cui $|1-y^2|=\frac{3}{x+1}$ ovvero $1-y^2=\mp\frac{3}{x+1}$ (e sceglieremo il meno), ovvero $y^2-1=\frac{3}{x+1}$, da cui $y^2=\frac{x+4}{x+1}$, da cui (scegliendo ancora il meno) $y(x)=-\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}$, che è effettivamente crescente all'intorno di $x=0$. • L'equazione $y'+x=2xy$ è invece lineare; da $y'=x(2y-1)$ si ha che per $x>0$ le soluzioni sono crescenti quando $y>\frac{1}{2}$, e per $x<0$ quando $y<\frac{1}{2}$: pertanto la soluzione da noi cercata avrà un punto di massimo. La forma $y'+p(x)y=q(x)$ è data da $p(x)=-2x$ e $q(x)=-x$: essendo $P(x)=\int p(x)\,dx=-x^2$ e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=-\int xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{-x^2}$ si ricava $y(x)=e^{x^2}(\frac{1}{2}e^{-x^2}+k)=\frac{1}{2}+ke^{x^2}$, e imponendo che $y(0)=-2$ si trova $-2=\frac{1}{2}+k$, ovvero $k=-\frac{5}{2}$, da cui $y(x)=\frac{1}{2}(1-5e^{x^2})$, che come previsto ha massimo assoluto in $x=0$.

(b) L'equazione $y''-y'-2y=4x+5\sin x+3e^{-x}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2-\lambda-2=0$ ha radici semplici -1 e 2, pertanto lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è dato da $y=Ae^{-x}+Be^{2x}$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. Per la soluzione particolare, sfruttando il principio di sovrapposizione per $b_1(x)=4x$, $b_2(x)=5\sin x$ e $b_3(x)=3e^{-x}$ si trova $\tilde y_1(x)=-2x+1$, $\tilde y_2(x)=\frac{1}{2}(\cos x-3\sin x)$ e $\tilde y_3(x)=-xe^{-x}$, da cui l'integrale generale $y(x)=Ae^{-x}+Be^{2x}-2x+1+\frac{1}{2}(\cos x-3\sin x)-xe^{-x}$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. La condizione proposta equivale a imporre $y'(0)=1$: essendo $y'(x)=-Ae^{-x}+2Be^{2x}-2+\frac{1}{2}(-\sin x-3\cos x)+(x-1)e^{-x}$ si ricava $1=-A+2B-2-\frac{3}{2}-1$, ovvero $B=\frac{1}{4}(2A+11)$, dunque le soluzioni cercate sono quelle del tipo $y(x)=Ae^{-x}+\frac{1}{4}(2A+11)e^{2x}-2x+1+\frac{1}{2}(\cos x-3\sin x)-xe^{-x}$, con $A\in\mathbb{R}$ qualsiasi.

1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Dominio (parte colorata), zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione f dell'ex. 4; l'insieme K (blu), con evidenziati i punti e le curve di livello in cui f raggiunge gli estremi assoluti su K.

Matematica - 2a Prova parziale e Preappello straord. (27/01/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie AI - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ ☐ 2pp ☐ Pre

IN STAMPATELLO

Tema B

(1) $\boxed{\text{Pre}}$ Nello spazio tridimensionale sono dati i punti $A(0,1,-2)$ e $B(1,0,-1)$ e i vettori $\vec{v} = (2,0,3)$ e $\vec{w} = (1,2,0)$. Determinare (in forma parametrica e cartesiana) il piano Π passante per A e B e parallelo a $\vec{w}$, e la retta r passante per l'origine O e ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$. Detta poi $\mathcal{P}$ la parabola $y = x^2 + 1$ sul piano orizzontale, trovare il punto di $\mathcal{P}$ più vicino a Π.

(2) $\boxed{\text{Pre}}$ Studiare $f(x) = \log\left(\dfrac{2x^2 + x - 1}{|x| - 1}\right)$, e tracciarne il grafico (non è richiesta la convessità).

(3) (a) $\boxed{\text{Pre}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\ \sin 2x}{1 - \cos x}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x+1} - e^{\sqrt{x}})\, dx$.

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Disegnare $S = \{(x,y) :\ 3 - |x| \geq y,\ 2 \leq (x+1)y \leq 4x\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) $\boxed{\text{Pre}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Determinare dominio, zeri, segno e limiti interessanti di $f(x,y) = \dfrac{2x + y + 3}{x + y^2}$, disegnando i risultati. Calcolare il piano tangente al grafico di f sopra $(-2,-1)$. Dire quali sono i punti stazionari di f, e ricercarne eventuali punti di massimo o minimo locale.

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Disegnare l'insieme $K = \{(x,y) : y^2 + 5y + 4 \leq x \leq 0\}$, e calcolare massimo e minimo assoluti di f su di esso (perché esistono?). (Facoltativo: dopo aver descritto come sono fatte le curve di livello $f(x,y) = \alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, interpretare geometricamente quanto trovato.)

(5) (a) $\boxed{\text{Pre}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Studiare a priori la crescenza delle soluzioni $y(x)$ di $x + y' = 2xy$; calcolarne poi la soluzione tale che $y(0) = -2$, confrontandola con quanto trovato prima. Stesse domande per $2(x+1)yy' = 1 - y^2$.

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Quali sono le soluzioni dell' equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 3e^{-x} + 5\sin x + 4x$ il cui grafico taglia l'asse y con pendenza -1?

Matematica - 2a prova parziale e Preappello straordinario del 27/01/2009 - $\boxed{\text{Tema B}}$ - Soluzioni

(1) • Il piano Π passante per $A(0,1,-2)$ e $B(1,0,-1)$ e parallelo a $\vec{w}=(1,2,0)$ dovrà essere parallelo anche al vettore $(1,0,-1)-(0,1,-2)=(1,-1,1)$, dunque avrà forma parametrica $\Pi=\{(0,1,-2)+\alpha(1,2,0)+\beta(1,-1,1):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(\alpha+\beta,1+2\alpha-\beta,-2+\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$; da $z=-2+\beta$ e $y=1+2\alpha-\beta$ si ricava $\beta=z+2$ e $\alpha=\frac{1}{2}(y+z+1)$, che messe in $x=\alpha+\beta$ danno la forma cartesiana $2x-y-3z-5=0$. • La retta r sarà parallela al prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{w}=(-6,3,4)$, dunque una forma parametrica sarà $r=\{(0,0,0)+\alpha(-6,3,4):\alpha\in\mathbb{R}\}=\{(6\alpha,-3\alpha,-4\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$: mettendo ad esempio $\alpha=-\frac{1}{4}z$ in $(x,y)=(6\alpha,-3\alpha)$ si ottiene la forma cartesiana $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}z \\ y=\frac{3}{4}z\end{cases}$. • Il punto generico della parabola $\mathcal{P}$ è della forma $(t,t^2+1,0)$,[(1)] la cui distanza dal piano Π è data da $d(t)=\frac{|2(t)-(t^2+1)-3(0)-5|}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(t^2-2t+6)$; essendo $d'(t)=\frac{2}{\sqrt{14}}(t-1)\geq 0$ per $t\geq 1$, ricaviamo che il punto di $\mathcal{P}$ più vicino a Π è quello con $t=1$, ovvero $(1,2,0)$.

(2) (Vedi Figura 1) Il dominio A di $f(x)=\log(\frac{2x^2+x-1}{|x|-1})$ è dato da $\frac{|x|-1}{2x^2-x-1}>0$: poiché il numeratore è positivo per $x<-1$ o $x>\frac{1}{2}$ e il denominatore per $x<-1$ o $x>1$, si ottiene $A=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,\frac{1}{2}[\,\cup\,]1,+\infty[$. In A la funzione è derivabile infinite volte, tranne che in $x=0$ in cui (a causa del modulo) è probabile si abbia un punto angoloso. I limiti interessanti sono determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=+\infty$ (con andamento logaritmico, dunque senza asintoti lineari), $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to 1}\log(1-2x)=\log 3\sim 1{,}1$, $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$. Gli zeri si hanno quando $\frac{2x^2+x-1}{|x|-1}=1$, ovvero $2x^2+x-1=|x|-1$: per $x\geq 0$ si ottiene $2x^2+x-1=x-1$, da cui $x=0$ mentre per $x\leq 0$ si ha $2x^2+x-1=-x-1$, da cui nuovamente $x=0$. Si ha poi $f(x)>0$ quando $\frac{2x^2+x-1}{|x|-1}>1$, ovvero $\frac{2x^2-|x|+x}{|x|-1}>0$: se $x\geq 0$ si ottiene $\frac{2x^2}{|x|-1}>0$, verificata per $x>1$; se invece $x<0$ si ha $\frac{2x(x+1)}{-x-1}=-2x>0$, sempre vera. Derivando per $x<0$ si trova $f'(x)=\frac{-x-1}{2x^2+x-1}\,\frac{(4x+1)(-x-1)-(-1)(2x^2+x-1)}{(-x-1)^2}=\frac{2}{2x-1}$, che è sempre negativa, dunque f è strettamente decrescente; invece per $x>0$ si trova $f'(x)=\frac{x-1}{2x^2+x-1}\,\frac{(4x+1)(x-1)-(2x^2-x-1)}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-2)}{(x-1)(2x^2+x-1)}$, che nel dominio si annulla per $x=2$ ed è positiva per $x>2$, dunque $x=2$ è punto di minimo relativo con $f(2)=\log 9=2\log 3\sim 2{,}2$. Si noti infine che $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-2$ mentre $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0$, dunque in $x=0$ si ha effettivamente un punto angoloso, come era da attendersi.

(3) (a) Ponendo $t=\cos x$ (dunque $dt=-\sin x\,dx$) e ricordando che $\sin 2x=2\sin x\cos x$ si ottiene $\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,\sin 2x}{1-\cos x}\,dx=2\int_{-1}^0\frac{t^3}{t-1}\,dt=2\int_{-1}^0(t^2+t+1+\frac{1}{t-1})\,dt=2(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t+\log|t-1|]_{-1}^0=2((0)-(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\log 2))=\frac{5}{3}-2\log 2\sim 0{,}3$. • Si ha $\int_0^1(\sqrt{x+1}-e^{\sqrt{x}})\,dx=\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx-\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$; posto $u=\sqrt{x}$ (ovvero $x=u^2$) e $v=x+1$ si ottiene $\int_1^2\sqrt{v}\,dv-\int_0^1 e^u\,2u\,du=(\frac{2}{3}v\sqrt{v}]_1^2-(2(u-1)e^u]_0^1=(\frac{4\sqrt{2}}{3})-(\frac{2}{3})-((0)-(-2))=-\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\sim -0{,}8$.

(b) (Vedi Figura 2) L'insieme $S=\{(x,y):\,3-|x|\geq y,\ 2\leq(x+1)y\leq 4x\}$ è rappresentato in figura. Poiché vale $\frac{2}{x+1}=\frac{4x}{x+1}$ solo per $x=\frac{1}{2}$, vale $\frac{4x}{x+1}=3-|x|$ solo per $x=1$ e vale $\frac{2}{x+1}=3-|x|$ per $x=\sqrt{2}+1$, $-2-\sqrt{3}$ e $-2+\sqrt{3}$ (ma in realtà ci interessa solo $x=\sqrt{2}+1$), si ricava che l'area di S è $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{4x}{x+1}\,dx+\int_1^{\sqrt{2}+1}(3-x)\,dx+\int_{\sqrt{2}+1}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{x+1}\,dx=4(x-\log|x+1|]_{\frac{1}{2}}^1+(3x-\frac{1}{2}x^2]_1^{\sqrt{2}+1}+2(\log|x+1|]_{\sqrt{2}+1}^{\frac{1}{2}}=4(1-\log 2)-4(\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2})+(3\sqrt{2}+3-\frac{1}{2}(2+1+2\sqrt{2}))-(\frac{5}{2})+2\log\frac{3}{2}-2\log(2+\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}-10\log 2+6\log 3-2\log(2+\sqrt{2})\sim 1$.

(4) (a) (Vedi Figura 3) I soli punti che non fanno parte del dominio di $f(x,y)=\frac{2x+y+3}{x+y^2}$ sono quelli della parabola $x=-y^2$; gli zeri sono i punti della retta $2x+y+3=0$ (esclusi ovviamente $A(-1,-1)$ e $B(-\frac{9}{4},\frac{3}{2})$, intersezioni con la parabola che dunque non appartengono al dominio); il numeratore è positivo sopra la retta, il denominatore lo è a destra della parabola, e il segno di f ne segue per quoziente. I limiti interessanti sono nei punti della parabola e in ∞_2 (punto all'infinito del dominio): nei punti della parabola diversi da A e B il limite è ∞ (col segno $+$ o $-$ a seconda del lato da cui si tende, come si può vedere dal segno di f); in A, B e ∞_2 invece il limite non esiste (tendendovi lungo la retta $2x+y+3=0$ esso è 0, ma in ogni intorno di ciascuno dei tre punti vi sono altri punti della parabola, avvicinandosi ai quali la funzione diverge a ∞). Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2(x+y^2)-1(2x+y+3)}{(x+y^2)^2}=\frac{2y^2-y-3}{(x+y^2)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1(x+y^2)-2y(2x+y+3)}{(x+y^2)^2}=\frac{x+y^2-4xy-2y^2-6y}{(x+y^2)^2}$ sono continue in tutto il dominio, dunque la funzione è differenziabile ovunque; il piano tangente al grafico di f sopra $(-2,-1)$ è allora $z=2+0(x-(-2))+(-5)(y-(-1))$, ovvero ha forma cartesiana $5y+z+3=0$. Infine, il sistema $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ è privo di soluzioni (si trovano solo A e B, che però non sono accettabili) e dunque non ci sono punti stazionari, in particolare nemmeno punti di estremo locale.

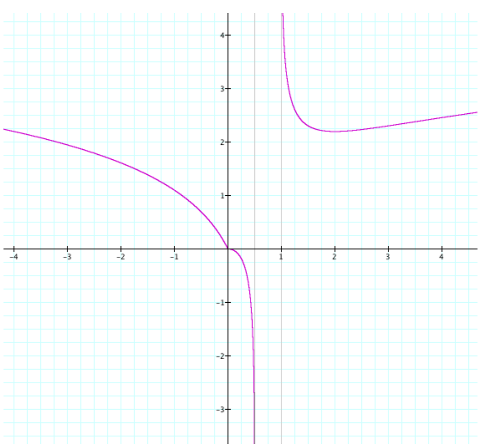
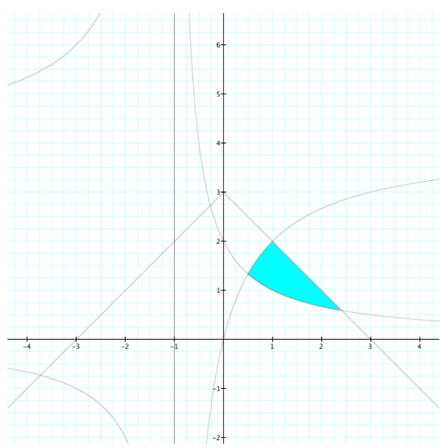
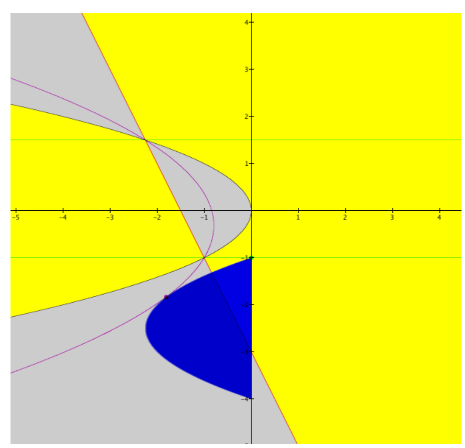
(b) (Vedi Figura 3) Gli estremi assoluti di f su $K=\{(x,y):y^2+5y+4\leq x\leq 0\}$ esistono per il teorema di Weierstrass, perché K è un insieme compatto (cioè chiuso e limitato) tutto contenuto nel dominio di f, che è continua. Nei punti interni di K tali estremi assoluti non potranno di certo essere assunti: infatti, se in uno di questi punti fosse ad esempio

[(1)] in altre parole, $\mathcal{P}$ è parametrizzata da $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))=(t,t^2+1,0)$.

assunto il minimo assoluto, esso dovrebbe essere in particolare un punto di minimo locale, e allora l'avremmo individuato tra i punti stazionari: ma, come visto, non ce ne sono. Pertanto gli estremi assoluti di f su K saranno assunti in qualche punto del bordo di K. Nei punti particolari $P(0,-1)$ e $Q(0,-4)$ vale $f(P)=2$ e $f(Q)=-\frac{1}{16}$. Sul tratto di parabola $x=y^2+5y+4$, descritto dalla variabile y con $-4\le y\le -1$, la funzione vale $f(y^2+5y+4,y)=\frac{2y^2+11y+11}{2y^2+5y+4}$: derivando rispetto a y si ottiene $\frac{(4y+11)(2y^2+5y+4)-(4y+5)(2y^2+11y+11)}{(2y^2+5y+4)^2}=-\frac{12y^2+28y+11}{(2y^2-5y+4)^2}$, che si annulla in $y=-\frac{11}{6}$ (accettabile) e $y=\frac{1}{2}$ (non accettabile). Otteniamo così un altro punto di bordo in cui può essere assunto uno dei due estremi, ovvero $R(-\frac{65}{36},-\frac{11}{6})$ in cui vale $f(R)=-\frac{11}{7}$. Infine, sul segmento verticale dell'asse y, pure esso descritto dalla variabile y con $-4\le y\le -1$, la funzione vale $f(0,y)=\frac{y+3}{y^2}$: derivando rispetto a y si ottiene $-\frac{y+6}{y^3}$, che si annulla in $y=-6$ (non accettabile). Gli estremi di f su K possono essere dunque assunti solo nei punti P, Q e R: e basta confrontare i valori di f in essi per concludere che il massimo assoluto è 2 (assunto in P) e il minimo è $-\frac{11}{7}$ (assunto in R). • Le curve di livello $f(x,y)=\frac{2x+y+3}{x+y^2}=\alpha$, ovvero $2x+y+3=\alpha(x+y^2)$, passano tutte per i punti A e B (che sono però fuori dal dominio di f): per $\alpha\ne 0$ e $\alpha\ne 2$ esse sono delle parabole $x=\frac{1}{2-\alpha}(\alpha y^2-y-3)$, mentre per $\alpha=0$ si ottiene la retta $2x+y+3=0$ (già nota, infatti, come luogo degli zeri di f) e per $\alpha=2$ si ottiene $(y+1)(2y-3)=0$, ovvero l'unione delle rette $y=-1$ (passante per P) e $y=\frac{3}{2}$. La figura dà allora l'interpretazione geometrica cercata: la curva di livello più bassa, con $\alpha=-\frac{11}{7}$, incontra K in R; mentre quella più alta, con $\alpha=2$, incontra K in P.

(5) (a) L'equazione $x+y'=2xy$ è lineare; da $y'=x(2y-1)$ si ha che per $x>0$ le soluzioni sono crescenti quando $y>\frac{1}{2}$, e per $x<0$ quando $y<\frac{1}{2}$: pertanto la soluzione da noi cercata avrà un punto di massimo. La forma $y'+p(x)y=q(x)$ è data da $p(x)=-2x$ e $q(x)=-x$: essendo $P(x)=\int p(x)\,dx=-x^2$ e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=-\int xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{-x^2}$ si ricava $y(x)=e^{x^2}(\frac{1}{2}e^{-x^2}+k)=\frac{1}{2}+ke^{x^2}$, e imponendo che $y(0)=-2$ si trova $-2=\frac{1}{2}+k$, ovvero $k=-\frac{5}{2}$, da cui $y(x)=\frac{1}{2}(1-5e^{x^2})$, che come previsto ha massimo assoluto in $x=0$. • L'equazione $2(x+1)yy'=1-y^2$ è invece a variabili separabili. Se $x=-1$ si ricava $0=1-y(-1)^2$, ovvero $y(-1)=\mp 1$: in altre parole, un'eventuale soluzione definita in $x=-1$ dovrà valere ivi -1 oppure $+1$ (in effetti, per di lì passano le uniche soluzioni costanti $y=\mp 1$). Per $x\ne -1$ si ha invece $y'=\frac{1-y^2}{2y(x+1)}$, dunque se $x>-1$ le soluzioni saranno crescenti per $y<-1$ e per $0<y<1$, e se $x<-1$ per $-1<y<0$ e per $y>1$. Nel nostro caso, separando le variabili si ha $\frac{2y}{1-y^2}\,dy=\frac{1}{x+1}\,dx$, da cui (supponendo già che $x>-1$) si ha $-\log|1-y^2|=\log(x+1)+k$, e imponendo che $y(0)=-2$ si ottiene $k=-\log 3$, da cui $-\log|1-y^2|=\log(x+1)-\log 3$, da cui $\log|1-y^2|=\log\frac{3}{x+1}$, da cui $|1-y^2|=\frac{3}{x+1}$ ovvero $1-y^2=\mp\frac{3}{x+1}$ (e sceglieremo il meno), ovvero $y^2-1=\frac{3}{x+1}$, da cui $y^2=\frac{x+4}{x+1}$, da cui (scegliendo ancora il meno) $y(x)=-\sqrt{\frac{x+4}{x+1}}$, che è effettivamente crescente all'intorno di $x=0$.

(b) L'equazione $y''-y'-2y=4x+5\sin x+3e^{-x}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2-\lambda-2=0$ ha radici semplici -1 e 2, pertanto lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è dato da $y=Ae^{-x}+Be^{2x}$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. Per la soluzione particolare, sfruttando il principio di sovrapposizione per $b_1(x)=3e^{-x}$, $b_2(x)=5\sin x$ e $b_3(x)=4x$ si trova $\tilde{y}_1(x)=-xe^{-x}$, $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{2}(\cos x-3\sin x)$ e $\tilde{y}_3(x)=-2x+1$, da cui l'integrale generale $y(x)=Ae^{-x}+Be^{2x}-xe^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x-3\sin x)-2x+1$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. La condizione proposta equivale a imporre $y'(0)=-1$: essendo $y'(x)=-Ae^{-x}+2Be^{2x}+(x-1)e^{-x}+\frac{1}{2}(-\sin x-3\cos x)-2$ si ricava $-1=-A+2B-1-\frac{3}{2}-2$, ovvero $B=\frac{1}{4}(2A+7)$, dunque le soluzioni cercate sono quelle del tipo $y(x)=Ae^{-x}+\frac{1}{4}(2A+7)e^{2x}-xe^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x-3\sin x)-2x+1$, con $A\in\mathbb{R}$ qualsiasi.

1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Dominio (parte colorata), zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione f dell'ex. 4; l'insieme K (blu), con evidenziati i punti e le curve di livello in cui f raggiunge gli estremi assoluti su K.