

# Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 2

Integrazione - Curve parametriche - Funzioni di due o più variabili reali - Equazioni differenziali

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

Martedì 20 gennaio 2009

---

Questi esercizi vengono proposti in preparazione alla prova d'esame (seconda prova parziale e preappello straordinario) di martedì 27/01/2009, e alcuni di essi verranno trattati in aula venerdì 23 p.v. .

**N.B.:** degli esercizi indicati con (\*) verrà messa in rete la risoluzione dettagliata.

---

## (1) Integrazione.

Si calcolino i seguenti integrali definiti:

$$\begin{aligned} \text{(1.a)} \quad & \int_0^4 \sqrt{x} e^{1+\sqrt{x}} dx, & \text{(1.b)} \quad & \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 5} dx, & \text{(1.c)} \quad & \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2 - 6x + 9} dx, \\ \text{(1.d)*} \quad & \int_0^1 e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx, & \text{(1.e)*} \quad & \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} \text{ (porre } x = \operatorname{tg} t), & \text{(1.f)} \quad & \int_{-1}^0 \frac{e^{3t}}{e^t+1} dt, \\ \text{(1.g)*} \quad & \int_1^2 \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3} dt, & \text{(1.h)} \quad & \int_0^1 x^3 \log(x^2 + 3) dx, & \text{(1.i)*} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x} dx, \\ \text{(1.j)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos u} - u) \sin u du, & \text{(1.k)} \quad & \int_1^9 \frac{\log(2\sqrt{x}-1)}{2x-\sqrt{x}} dx, & \text{(1.l)} \quad & \int_1^e \frac{\operatorname{arctg}(1-2\log x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Studiare l'andamento di  $f(x)$ , dire per quali  $a, b \in \mathbb{R}$  è definito  $\int_a^b f(x) dx$  e calcolarne il valore.

$$\text{(1.m)} \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}, \quad \text{(1.n)*} \quad f(x) = 2 \log|x| + \sqrt{x+2}, \quad \text{(1.p)} \quad f(x) = x(e^x - 1) - 1.$$

Si disegnino le seguenti regioni finite del piano cartesiano  $(x, y)$  e si calcolino le loro aree.

$$\begin{aligned} \text{(1.q)} \quad & S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x - \pi) \leq y \leq x \sin x, y \geq 1 - \pi\}; \\ \text{(1.r)} \quad & S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + x)y \leq 2, |y| \leq 1, |x| \leq 3\}; \\ \text{(1.s)*} \quad & S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(1 - xy) \leq 0, |y - 2x| \leq 1\}; \\ \text{(1.t)} \quad & S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2y - 3 \leq x \leq 1 + \cos 2y, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

## (2) Curve parametriche.

**(2.a)** Tracciare il grafico della funzione  $x = y - \log y$ , ed esprimerlo come curva parametrica  $\gamma(t)$ ; detti poi  $A$  e  $B$  i punti del grafico con  $y = 1$  e  $y = 4$  determinare in forma parametrica e

cartesiana le rette tangenti al grafico in  $A$  e in  $B$ . Scrivere infine in modo corretto l'integrale che esprime la lunghezza del tratto di grafico tra  $A$  e  $B$ .

**(2.b)\*** Si tracci<sup>1</sup> la curva parametrica  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\gamma(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$ ; eliminando il parametro  $t$  si trovi poi un'equazione cartesiana, riconoscendo di che tipo di curva si tratta. Trovare poi in forma parametrica e cartesiana la retta  $r$  ortogonale alla curva nel suo punto dato da  $t = \frac{\pi}{3}$ , e scrivere infine in modo corretto l'integrale che esprime la lunghezza della curva.

**(2.c)** Disegnare la curva polare<sup>2</sup> data da  $r(t) = \frac{4}{t+1}$  con  $0 \leq t \leq \pi$ ; trovare poi in forma parametrica e cartesiana la retta tangente alla curva nel suo punto dato da  $t = \frac{\pi}{2}$ , e scrivere infine in modo corretto l'integrale che esprime la lunghezza della curva.

### (3) Funzioni di due o più variabili reali.

**(3.a)** Data la funzione  $f(x, y) = 1 + \log |y(x^2 - 2)|$ , si determinino il dominio naturale, i punti nei quali si annulla e quelli in cui è positiva, disegnando tali insiemi sul piano cartesiano. Si ragioni sui limiti notevoli di  $f$ .  $f$  è limitata? Dove è differenziabile? Calcolare il differenziale totale  $df$ , la funzione lineare tangente di  $f$  (il cui grafico è il piano tangente al grafico di  $f$ ) e la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di  $f$  nei punti  $A = (1, 1)$  e  $B = (-1, 2)$ . Calcolare le derivate parziali seconde di  $f$ , verificando il teorema di Schwarz.

**(3.b)** Stesse domande per  $g(x, y) = \frac{\sqrt{x-y^2-x}}{x+2}$ , con  $A = (2, -1)$  e  $B = (4, 0)$ .

**(3.c)\*** Stesse domande per  $h(x, y) = x \operatorname{tg}(xy^3)$ , con  $A = (0, 0)$  e  $B = (\frac{\pi}{4}, 1)$ .

**(3.d)\*** Stesse domande per  $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}(|2x + y - 1| - y)$ , con  $A = (1, 1)$  e  $B = (-1, \frac{3}{2})$ .

**(3.e)** Stesse domande per  $m(x, y) = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2-2y^2|}}$  con  $A = (0, 0)$  e  $B = (-3, 2)$ .

**(3.f)** In quali punti  $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  il piano tangente al grafico di  $f(x, y) = x^4 - 4x^3 - 4xy - y^2 + x$  in  $P_0$  è parallelo al piano di equazione cartesiana  $z = 5x + 2y + 1$ ? Calcolare il differenziale totale  $df$  e la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di  $f$  in ognuno dei punti trovati.

**(3.g)** Data  $f(x, y) = x \log y$  descriverne il dominio, gli zeri, il segno, i limiti notevoli. Come sono fatte le sue curve di livello  $f(x, y) = k$ ? Disegnare la curva di livello passante per  $A(0, 1)$  e quella passante per  $B(-1, e)$ . Calcolare i vettori gradienti  $\nabla f(A)$  e  $\nabla f(B)$ , e notare come sono diretti rispetto alle suddette curve di livello. Infine, supponendo di spostarsi, nel dominio, di un piccolo incremento  $(dx, dy)$  dal punto  $B$ , qual'è la stima lineare della variazione di  $f$  dal valore che essa aveva in  $B$ ?

**(3.h)\*** Determinare la funzione  $f(x, y)$  sapendo che ha derivate parziali  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$ , e che vale  $f(0, 2) = -1$ . Stesso problema per  $g(x, y)$ , sapendo che  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2y \sin xy - 3y^2 + 8$  e  $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$ , e che vale  $g(-1, 0) = -3$ .

**(3.i)\*** Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da

<sup>1</sup>Intuire l'andamento della curva disegnandone alcuni punti con i valori notevoli  $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \dots$

<sup>2</sup>Si ricorda che, in un curva polare  $r = r(t)$ , il parametro  $t$  esprime l'angolo del raggio vettore che ruota in senso antiorario, e  $r(t)$  è la distanza dall'origine del punto della curva in funzione dell'angolo; pertanto la curva è espressa parametricamente da  $\gamma(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$ .

$f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$ . Disegnare poi gli insiemi chiusi e limitati  $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  e  $B = \{(t, -2) : |t| \leq 2\}$ , e determinare il massimo e minimo assoluti di  $f$  su ciascuno di essi.

**(3.1)** Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $g(x, y) = \frac{x^2 e^{-y^2}}{1 + x^4}$ . Poi, notando (e se possibile dimostrando) che  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} g(x, y) = 0$ , spiegare perché  $g$  deve ammettere estremi assoluti su tutto il dominio  $\mathbb{R}^2$  anche se quest'ultimo non è limitato (e dunque non si può applicare Weierstrass), e dire quanto valgono.

**(3.m)** Disegnare l'insieme  $K = \{(x, y) : y^2 - 2y \leq x \leq 1\}$ , calcolarne l'area e determinare massimo e minimo assoluti su di esso della funzione  $h(x, y) = 3x + 4y$ , cercando poi di spiegare quest'ultimo risultato con un ragionamento grafico.

#### (4) Equazioni differenziali.

**(4.a)** Data l'equazione differenziale  $y y' = x e^{-y^2}$  si dica quali zone del piano le soluzioni  $y(x)$  sono crescenti. (Facoltativo: si dica in quali zone del piano le soluzioni sono convesse; si dimostri che le soluzioni sono funzioni pari.<sup>3</sup>) Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale  $y(0) = -1$ .

**(4.b)** Data l'equazione differenziale  $2(x-2)y' = x(y^2+4)$  si dica quali zone del piano le soluzioni  $y(x)$  sono crescenti, ed in quali zone del piano sono convesse. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale  $y(1) = 0$ .

**(4.c)\*** Data l'equazione differenziale  $y^2 y' \sin^2 x + (y^3 + 1) \cos x = 0$  si dica in quali zone del piano le soluzioni  $y(x)$  sono crescenti. Si calcoli poi la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale  $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$ , e quella con condizione iniziale  $y(-3) = -1$ .

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

**(4.d)**  $(x+1)y' - y = \log x$ ,  $y(1) = 0$ .

**(4.e)**  $xy' + (x+1)y = -2 - 2x$ ,  $y(1) = -1$  oppure  $= -2$  (fare anche come variabili separabili)

**(4.f)\***  $y' \sin x + y \cos x = \sin 2x$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = y_0$  oppure  $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$ . Per quali  $y_0$  e  $y_1$  si possono prolungare in  $x = 0$ , incollandole, le due soluzioni appena trovate ottenendo una funzione derivabile?

Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

**(4.g)**  $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - \cos 2x$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = \frac{1}{2}$ .

**(4.h)\***  $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$ .

**(4.i)**  $y'' + 2y' + 5y = 2e^x \sin 2x + \sin x - 5$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .

Risolvere i seguenti problemi tramite un'opportuna equazione differenziale.

**(4.j)** Una pallina di massa  $m$ , vincolata a stare su una guida rettilinea verticale liscia, è soggetta alla propria forza peso ed è trattenuta anche da una molla di costante elastica  $k$ ; il tutto è immerso in un fluido di viscosità  $\beta$ . Calcolare la legge oraria del moto nei casi  $(m, k, \beta) = (1, 2, 3)$

<sup>3</sup>Se  $\varphi(x)$  è una soluzione, si ponga  $\psi(x) = \varphi(-x)$ : poiché  $\psi'(x) = -\varphi(-x)$ , si mostri che anche  $\psi(x)$  è soluzione; poi, notando che  $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$ ...

e  $(m, k, \beta) = (1, 2, 2)$ , supponendo che all'istante iniziale la pallina venga lasciata con velocità nulla nel punto in cui è anche attaccata la molla;<sup>4</sup> cercare poi di interpretare i risultati alla luce del buon senso. Se si vuole, discutere anche il caso di  $m, k, \beta$  qualunque.

**(4.k)** La velocità di crescita di una colonia di batteri è, in ogni istante, direttamente proporzionale al tempo che passa e inversamente proporzionale all'entità della colonia stessa. Sapendo che all'istante iniziale dell'esperimento erano stati messi assieme 4 batteri, e che dopo 4 secondi questi erano raddoppiati, calcolare quanti ve ne saranno dopo un'ora.

**(4.l)\*** La sera di San Silvestro, un gruppo di amici decide di lanciare in aria un candelotto di fuochi artificiali per festeggiare l'anno nuovo. Il candelotto ha massa 1 kg, e dunque è soggetto ad una forza di gravità di (circa) 10 Newton; al momento dell'accensione esso viene spinto da una forza verso l'alto pari a 150 Newton, che decresce proporzionalmente al tempo e si esaurisce dopo 5 secondi. L'aria oppone una resistenza di tipo viscoso con coefficiente pari a 1 Newton-sec/m. Sapendo che il candelotto contiene un meccanismo programmato per causare l'esplosione dopo 3 secondi dallo spegnimento della forza propulsiva (dunque, in tutto, dopo 8 secondi dalla partenza), si dica a che altezza dal suolo (arrotondata al metro) esploderà il candelotto.

---

<sup>4</sup>Tutte le grandezze sono espresse nelle unità di misura del sistema internazionale standard MKS, e dunque la massa  $m$  è espressa in kg, la costante elastica  $k$  in Newton/m, il coefficiente di viscosità  $\beta$  in Newton-sec/m, e l'accelerazione di gravità  $g$  (che, se si vuole, si può arrotondare per comodità a 10) in  $\text{m/sec}^2$ . Naturalmente, converrà porre sulla guida rettilinea un sistema di coordinate ascisse  $x$  orientato verso l'alto, supponendo che la molla sia imperniata in 0: la domanda è dunque di determinare la funzione  $x(t)$ .

## Alcune soluzioni.

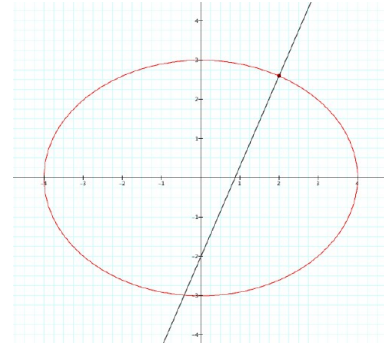
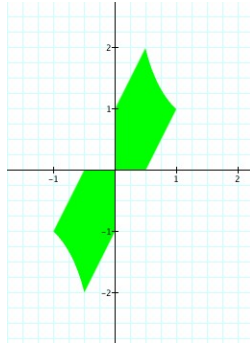
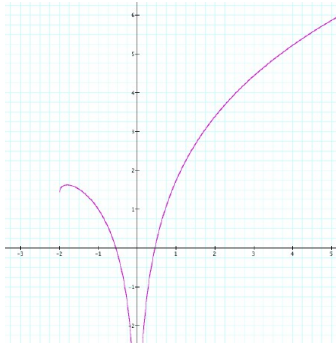
### (1) Integrazione.

(1.d) Vale  $\int e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx = \int x^2 e^{-x} dx + \int e^{-x} \sin 2x dx$ ; integrando per parti si ottiene  $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + k$ , e  $\int e^{-x} \sin 2x dx = -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx = -e^{-x} \sin 2x + 2(-e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx)$ , da cui  $5 \int e^{-x} \sin 2x dx = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x$ , da cui  $\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{5} e^{-x} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + k$ . Pertanto  $\int e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2 + \frac{\sin 2x + 2 \cos 2x}{5}) + k$ , e  $\int_0^1 e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx$  basta sottrarre i valori di tale primitiva negli estremi 1 e 0.

(1.e) Da  $x = \operatorname{tg} t$  si ha  $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ ; se  $x = 0$  si ha  $t = 0$ , e se  $x = 1$  si ha  $t = \frac{\pi}{4}$ , dunque  $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = (\frac{t + \sin t \cos t}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}{2}) - (0) = \frac{\pi+2}{8}$ .

(1.g) Si ha  $2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3)$ , dunque  $\int \frac{t^2 - 2 - (2t+1) \log(3-t)}{2t^2 - 5t - 3} dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} dt + \int \frac{\log(3-t)}{t-3} dt$ . Iniziamo calcolando  $\int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} dt$ : dividendo si ha  $\frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} = \frac{1}{2} (1 + \frac{5t-1}{2t^2-5t-3})$ , e poi  $\frac{5t-1}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2t+1} + \frac{2}{t-3}$ , pertanto  $\int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \log |2t + 1| + 2 \log |t - 3|) + k$ . Passando poi a  $\int \frac{\log(3-t)}{t-3} dt$ , poniamo  $\tau = 3 - t$ , da cui (sostituendo e integrando per parti) si ottiene  $d\tau = -dt$ : si ha allora  $\int \frac{\log(3-t)}{t-3} dt = \int \frac{\log \tau}{\tau} d\tau = \log^2 \tau - \int \frac{\log \tau}{\tau} d\tau$ , da cui  $\int \frac{\log \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2} \log^2 \tau + k$ , ovvero  $\int \frac{\log(3-t)}{t-3} dt = \frac{1}{2} \log^2(3-t) + k$ . A questo punto basta riunire i due integrali addendi e sottrarre i valori della primitiva così ottenuta negli estremi 2 e 1.

(1.i) Posto  $t = \cos x$  si ha  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos^2 x} dx = -2 \int_1^0 \frac{t}{2+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2t}{2+t^2} dt = (\log(2+t^2)) \Big|_0^1 = \log \frac{3}{2}$ .



(1) Grafico di  $f(x) = 2 \log|x| + \sqrt{x+2}$  in (1.n); (2) L'insieme  $S_3$  in (1.s); (3) L'ellisse  $\gamma(t)$  in (2.b).

(1.n) (Figura 1) Il dominio di  $f(x) = 2 \log|x| + \sqrt{x+2}$  è dato da  $x \geq -2$  e  $x \neq 0$ ; la funzione non ha periodo o parità, è continua nel suo dominio e derivabile ovunque tranne che in  $x = -2$  (a causa della radice). Un facile confronto grafico tra le funzioni  $2 \log|x|$  (il logaritmo a due falde simmetriche e raddoppiato di valore) e  $-\sqrt{x+2}$  (la radice quadrata arretrata di 2 e resa negativa) mostra che  $f$  si annulla in due punti  $x_0$  e  $x_1$  con  $-1 < x_0 < 0 < x_1 < 1$ , e vale  $f(x) > 0$  per  $-2 \leq x < x_0$  e  $x > x_1$ . I limiti notevoli sono determinati e valgono  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , mentre  $f$  è continua in  $-2$  col valore  $f(-2) = 2 \log 2 \sim 1,4$ ; non vi sono asintoti a  $+\infty$ . Derivando (con  $x \neq -2$ ) si ottiene  $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{4\sqrt{x+2} + x}{2x\sqrt{x+2}}$ : vale  $f'(x) = 0$  quando  $4\sqrt{x+2} = -x$ , che nell'ipotesi  $-x > 0$  (cioè se  $-2 \leq x < 0$ ) equivale a  $(4\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2$ , ovvero  $x^2 - 16x - 32 = 0$ , soddisfatta per  $x = x_2 := -4(\sqrt{6} - 2) \sim -1,8$ . Passiamo ora allo studio di  $f'(x) > 0$ . Il numeratore è positivo quando  $4\sqrt{x+2} > -x$ , che se  $-x < 0$  (cioè se  $x > 0$ ) è sempre vero, mentre se  $-x > 0$  (cioè se  $-2 < x < 0$ ) equivale a  $(4\sqrt{x+2})^2 > (-x)^2$ , ovvero  $x^2 - 16x - 32 < 0$ , soddisfatta per  $x > x_2$ : pertanto il numeratore è positivo per  $x_2 < x < 0$  e per  $x > 0$ . D'altra parte il denominatore è positivo quando  $x > 0$ , dunque  $f'(x) > 0$  per  $-2 < x < x_2$  e per  $x > 0$ : ne ricaviamo che  $x = x_2$  è un punto di massimo locale (con  $f(x_2) \sim 1,6$ ). Si osservi anche che  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = +\infty$ . La derivata seconda  $f''(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$  è sempre  $< 0$ , dunque  $f$  è concava in tutto il dominio. Dallo studio appena effettuato ricaviamo che l'integrale

$\int_a^b f(x) dx$  ha senso quando sia  $a$  che  $b$  stanno in  $[-2, 0]$ , oppure quando sono entrambi  $> 0$ , ed in tali casi vale  $\int_a^b f(x) dx = (2x(\log|x| - 1) + \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}})|_a^b$ .

(1.s) (Figura 2) La condizione  $\log(1 - xy) \leq 0$  richiede che  $0 < 1 - xy \leq 1$ , ovvero che  $0 \leq xy < 1$ : si tratta delle parti di I e III quadrante strettamente comprese tra le due falde dell'iperbole equilatera  $xy = 1$ . Invece, la condizione  $|y - 2x| \leq 1$  equivale a  $-1 \leq y - 2x \leq 1$ , ovvero  $2x - 1 \leq y \leq 2x + 1$ : si tratta della fascia obliqua di piano compreso tra le due rette  $y = 2x - 1$  e  $y = 2x + 1$ . L'insieme  $S_3$  è ottenuto dall'intersezione di tali sottoinsiemi. Dal sistema tra  $y = \frac{1}{x}$  e  $y = 2x + 1$  si ottiene  $x = -1$  e  $x = \frac{1}{2}$ , e da quello tra  $y = \frac{1}{x}$  e  $y = 2x - 1$  si ottiene  $x = -\frac{1}{2}$  e  $x = 1$ : per chiare ragioni di simmetria, l'area di  $S_3$  risulta  $2(\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (2x-1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^0 0 dx) = 2((x^2 + x)|_0^{\frac{1}{2}} + (\log x)|_{\frac{1}{2}}^1 + (x^2 - x)|_1^{\frac{3}{2}}) = 2 \log 2 + 1 \sim 2, 4$ .

## (2) Curve parametriche.

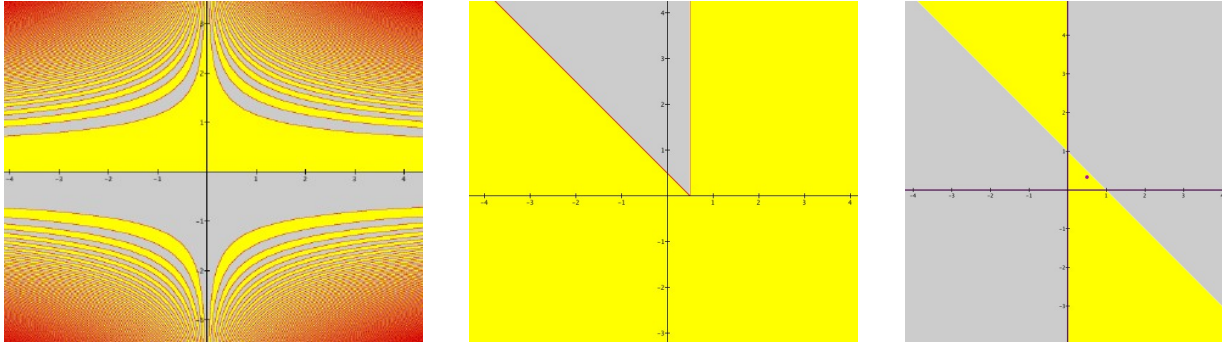
(2.b) (Figura 3) La curva parametrica  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\gamma(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$  è l'ellisse centrata in  $(0, 0)$  con assi coincidenti con gli assi coordinati, e semiassi lunghi rispettivamente 4 e 3: ciò risulta evidente eliminando il parametro  $t$  dalle due equazioni  $x = 4 \cos t$  e  $y = 3 \sin t$ , perché da  $\cos t = \frac{x}{4}$  e  $\sin t = \frac{y}{3}$  si ottiene la ben nota forma canonica  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Il punto dato da  $t = \frac{\pi}{3}$  è  $P = \gamma(\frac{\pi}{3}) = (2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ ; essendo  $\gamma'(t) = (-4 \sin t, 3 \cos t)$ , un vettore tangente in  $P$  è  $\gamma'(\frac{\pi}{3}) = (-2\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ , e dunque uno ortogonale è (a meno di proporzionalità)  $(\sqrt{3}, 4)$ . Da ciò si ottiene la forma parametrica  $r = \{(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}) + t(\sqrt{3}, 4) : t \in \mathbb{R}\}$ ; da  $x = 2 + t\sqrt{3}$  e  $y = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4t$  si trova la forma cartesiana  $8x - 2\sqrt{3}y - 7 = 0$ . Infine, l'integrale che esprime la lunghezza della curva è  $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 7 \sin^2 t} dt$ .

## (3) Funzioni di due o più variabili reali.

(3.c) (Figura 4) Il dominio di  $f(x, y) = x \operatorname{tg}(xy^3)$  è dato dalla condizione  $xy^3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  (con  $k \in \mathbb{Z}$ ): si tratta di escludere una famiglia di curve del tipo  $xy^3 = \alpha$ , che hanno due rami simili a quelli dell'iperbole equilatera  $xy = 1$  nel primo e terzo quadrante se  $\alpha > 0$ , nel secondo e quarto quadrante se  $\alpha < 0$ , mentre se  $\alpha = 0$  si ottiene l'unione dei due assi coordinati  $x = 0$  e  $y = 0$ . Similmente, si ha  $f(x, y) = 0$  per  $x = 0$ ,  $y = 0$  oppure per  $xy^3 = k\pi$  (con  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Si ha poi  $f(x, y) > 0$  nei seguenti casi: se  $x > 0$ , per  $k\pi < xy^3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; e se  $x < 0$ , per  $\frac{\pi}{2} + k\pi < xy^3 < \pi + k\pi$  (con  $k \in \mathbb{Z}$ ). Quando il punto  $(x, y)$  si avvicina ad una delle curve escluse dal dominio,  $f(x, y)$  diverge a  $\pm\infty$ ; dunque  $f$  non è limitata. La funzione è differenziabile su tutto il suo dominio; le derivate parziali sono  $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg}(xy^3) + x \frac{y^3}{\cos^2(xy^3)}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)}$ . Essendo  $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , sia la funzione lineare tangente in  $(0, 0)$  che il differenziale  $df_{(0,0)}(x, y)$  sono 0; essendo invece  $f(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{4}$ , poi  $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 1) = 1 + \frac{\pi}{4} \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{4} \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi^2}{8}$ , si ha  $df_{(\frac{\pi}{4}, 1)}(x, y) = (\frac{\pi}{2} + 1)x + \frac{3\pi^2}{8}y$  e la funzione lineare tangente  $\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} + 1)(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3\pi^2}{8}(y - 1) = (\frac{\pi}{2} + 1)x + \frac{3\pi^2}{8}y - \frac{\pi^2}{2}$ . Le derivate seconde sono  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \frac{y^3}{\cos^2(xy^3)} + 2xy^6 \frac{\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{2y^3(\cos(xy^3) + y^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3x^2 \frac{2y \cos^2(xy^3) + 2y^2 \cdot 3xy^2 \sin(xy^3) \cos(xy^3)}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6x^2 y (\cos(xy^3) + 3xy^2 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)} + x \frac{3y^2 \cos^2(xy^3) + y^3 \cdot 2 \sin(xy^3) \cos(xy^3) \cdot 3xy^2}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6xy^2 (\cos(xy^3) + xy^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x \frac{3y^2}{\cos^2(xy^3)} + x^2 \cdot 3y^2 \frac{2y^3 \sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{6xy^2 (\cos(xy^3) + xy^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$ : notare che  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , come prescrive Schwarz.

(3.d) (Figura 5) Il dominio di  $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}(|2x + y - 1| - y)$  è tutto  $\mathbb{R}^2$ ; vale  $\ell(x, y) = 0$  quando  $|2x + y - 1| = y$ : nell'ipotesi che  $y \geq 0$ , ciò equivale a  $2x + y - 1 = y$  (ovvero  $x = \frac{1}{2}$ ) oppure  $2x + y - 1 = -y$  (ovvero  $y = -x + \frac{1}{2}$ ), pertanto  $\ell$  si annulla sui tratti delle rette  $x = \frac{1}{2}$  e  $y = -x + \frac{1}{2}$  che stanno nel semipiano  $y \geq 0$ . Quanto al segno, vale  $\ell(x, y) > 0$  quando  $|2x + y - 1| > y$ ; ciò è sempre vero se  $y < 0$ , mentre se  $y \geq 0$  equivale a  $2x + y - 1 < -y$  (ovvero  $y < -x + \frac{1}{2}$ ) oppure  $2x + y - 1 > y$  (ovvero  $x > \frac{1}{2}$ ): pertanto  $\ell$  è positiva su tutto il piano  $\mathbb{R}^2$  tranne il settore del semipiano  $y > 0$  compreso tra le rette  $x = \frac{1}{2}$  e  $y = -x + \frac{1}{2}$ . La funzione  $\ell$  è certamente limitata, perché  $|\ell(x, y)| < \frac{\pi}{2}$ ; da quanto detto sopra, si evince che il limite a  $\infty$  non esiste. La funzione è certamente differenziabile in tutti i punti che non stanno sulla retta  $2x + y - 1 = 1$  (a causa del modulo). Dove  $2x + y - 1 > 0$  (ovvero sopra la retta  $y = -2x + 1$ ) la funzione diventa  $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}((2x + y - 1) - y) = \operatorname{arctg}(2x - 1)$ , dunque costante rispetto a  $y$ , con derivate parziali  $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$  e  $\frac{\partial \ell}{\partial y} \equiv 0$ . Il punto  $A = (1, 1)$  sta in tale parte del dominio: essendo  $\ell(1, 1) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\partial \ell}{\partial x}(1, 1) = 1$ , si ha  $d\ell_{(1,1)}(x, y) = x$  e la funzione lineare tangente  $\frac{\pi}{4} + (x - 1) = x + \frac{\pi}{4} - 1$ . Dove invece  $2x + y - 1 < 0$  (ovvero sotto la retta  $y = -2x + 1$ ) la funzione diventa  $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}(-(2x + y - 1) - y) = \operatorname{arctg}(1 - 2x - 2y)$ , con derivate parziali  $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{\partial \ell}{\partial y} = \frac{-2}{1+(1-2x-2y)^2} = -\frac{1}{2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1}$ . Il punto  $B = (-1, \frac{3}{2})$  sta in tale parte del dominio: essendo

$\ell(-1, \frac{3}{2}) = \arctg(0) = 0$  e  $\frac{\partial \ell}{\partial x}(-1, \frac{3}{2}) = \frac{\partial \ell}{\partial y}(-1, \frac{3}{2}) = -2$ , si ha  $d\ell_{(-1, \frac{3}{2})}(x, y) = -2x - 2y$  e la funzione lineare tangente  $0 - 2(x - (-1)) - 2(y - \frac{3}{2}) = -2x - 2y + 1$ . Guardiamo ora i punti sulla retta "incriminata"  $y = -2x + 1$ , ovvero quelli della forma  $(x_0, -2x_0 + 1)$ : la derivata parziale  $\frac{\partial \ell}{\partial y}$  ha (ovviamente) limite 0 tendendo ad un tale punto da sopra la retta, ed ha limite  $-\frac{1}{2(x_0)^2 + 2(-2x_0 + 1)^2 + 4x_0(-2x_0 + 1) - 2x_0 - 2(-2x_0 + 1) + 1} = -\frac{1}{2x_0^2 - 2x_0 + 1}$  tendendovi da sotto: si noti che tale ultimo limite non è mai nullo, dunque  $\frac{\partial \ell}{\partial y}$  non esiste in nessuno dei punti della retta. Ciò dimostra senza dubbio che  $\ell$ , pur essendo continua sui punti della retta, non è differenziabile in nessuno di essi (se lo fosse, dovrebbero anche esistere entrambe le derivate parziali). Le derivate seconde sopra la retta  $y = -2x + 1$  sono  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv 0$ ; sotto la retta  $y = -2x + 1$  sono invece  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(2x+2y-1)}{(2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1)^2}$ . In entrambi i casi il teorema di Schwarz è confermato.



(4) Segno di  $x \operatorname{tg}(xy^3)$  in (3.c); (5) Segno di  $\arctg(|2x + y - 1| - y)$  in (3.d); (6) Segno di  $x^3 y^2 (1 - x - y)$  in (3.i); in porpora i punti stazionari.

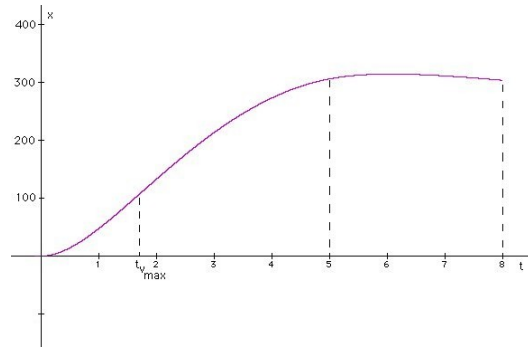
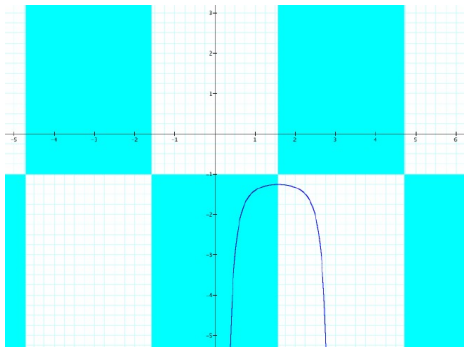
(3.h) Poiché  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y - 6y^2 + 7$ , integrando rispetto a  $x$  dovrà essere  $f(x, y) = x^3 y - 6xy^2 + 7x + \varphi(y)$  per una certa funzione  $\varphi(y)$  da determinare; essendo poi  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$ , integrando rispetto a  $y$  si ottiene  $x^3 - 12xy + \varphi'(y) = x^3 - 12xy + 2y$ , da cui  $\varphi'(y) = 2y$ , da cui  $\varphi(y) = y^2 + k$  con  $k \in \mathbb{R}$  costante da determinare, e dunque  $f(x, y) = x^3 y - 6xy^2 + 7x + y^2 + k$ ; infine, da  $f(0, 2) = -1$  si ricava  $4 + k = -1$ , dunque  $k = -5$ , e perciò  $f(x, y) = x^3 y - 6xy^2 + 7x + y^2 - 5$ . In modo simile, poiché  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy - 3y^2 + 8$  dovrà essere  $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x + \varphi(y)$  per una certa funzione  $\varphi(y)$  da determinare; essendo poi  $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$  si ottiene  $-x^3 \sin xy - 6xy + \varphi'(y) = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$ , da cui  $\varphi'(y) = -2y$ , da cui  $\varphi(y) = -y^2 + k$  con  $k \in \mathbb{R}$  costante da determinare, e dunque  $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x - y^2 + k$ ; infine, da  $g(-1, 0) = -3$  si ricava  $1 - 8 + k = -3$ , dunque  $k = 5$ , e perciò  $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x - y^2 + 5$ . Si noti che in generale, se vengono assegnate le derivate parziali  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha(x, y)$  e  $\frac{\partial \beta}{\partial y} = \beta(x, y)$ , il teorema di Schwarz implica che deve essere  $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$  (condizioni di *chiusura*). Per maggiori dettagli, si veda la parte finale facoltativa delle note sulle funzioni di più variabili reali.

(3.i) (Figura 6) Gli eventuali punti di massimo e minimo locale in  $\mathbb{R}^2$  di  $f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$  si trovano tra i punti stazionari, dunque iniziamo col cercare questi ultimi. Dal sistema tra  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 (1 - x - y) - x^3 y^2 = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y (1 - x - y) - x^3 y^2 = 0$ , ovvero tra  $x^2 y^2 (3 - 4x - 3y) = 0$  e  $x^3 y (2 - 2x - 3y) = 0$ , si trovano tutti i punti degli assi coordinati e il punto  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ . La matrice hessiana è  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2(1-2x-y) & x^2 y(6-8x-9y) \\ x^2 y(6-8x-9y) & x^3(2-2x-6y) \end{pmatrix}$ , dunque  $H_f(P) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$  ci dice che  $P$  è un punto di massimo locale stretto (con  $f(P) = \frac{1}{432}$ ). D'altra parte, nei punti degli assi coordinati l'hessiano ha determinante nullo, dunque il criterio non dà informazioni precise; tuttavia, poiché sugli assi  $f$  è nulla, l'esame del segno di  $f$  (riportato in figura) ci dice subito che i punti  $(x_0, 0)$  dell'asse  $x$  sono di massimo locale non stretto se  $x_0 < 0$  oppure  $x_0 > 1$  e di minimo locale non stretto se  $0 < x_0 < 1$ , mentre i punti  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e tutti i punti dell'asse  $y$  sono delle selle. L'insieme  $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$  è il rombo pieno (lati compresi) di vertici  $Q_1(1, 0)$ ,  $Q_2(0, 1)$ ,  $Q_3(-1, 0)$  e  $Q_4(0, -1)$ , mentre  $B = \{(t, -2) : |t| \leq 2\}$  è il tratto di segmento orizzontale tra i punti  $R_1(-2, -2)$  e  $R_2(2, -2)$ : essendo entrambi gli insiemi chiusi e limitati in  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  ammetterà estremi assoluti su ciascuno di essi per Weierstrass. Iniziando da  $A$ , i punti interni candidati ad essere estremanti per  $f$  sono quelli per cui  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ , e sono dunque i già noti  $P$  (in cui  $f(P) = \frac{1}{432}$ ) e quelli sugli assi (nei quali  $f = 0$ ). Nei quattro vertici si ha pure  $f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = 0$ . Sul lato  $Q_1 Q_2$  si ha  $\phi_1(t) = f(t, 1-t) \equiv 0$ ; sul lato  $Q_2 Q_3$  si ha  $\phi_2(t) = f(t, t+1) = -2t^4(t+1)^2$  con  $-1 < t < 0$ , e ponendo  $\phi_2'(t) = -4t^3(t+1)(3t+2) = 0$  si ottiene  $t = -\frac{2}{3}$ , ovvero il punto  $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  in cui  $f$  vale  $-\frac{32}{729}$ ; sul lato  $Q_3 Q_4$  si ha  $\phi_3(t) = f(t, -1-t) = 2t^3(t+1)^2$  con  $-1 < t < 0$ , e ponendo  $\phi_3'(t) = 2t^2(t+1)(5t+3) = 0$  si ottiene  $t = -\frac{3}{5}$ , ovvero il punto  $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$  in cui  $f$  vale  $-\frac{216}{3125}$ ; infine,

sul lato  $Q_4Q_1$  si ha  $\phi_4(t) = f(t, t-1) = -2t^3(t-1)^3$  con  $0 < t < 1$ , e ponendo  $\phi_4'(t) = -6t^2(t-1)^2(2t-1) = 0$  si ottiene  $t = \frac{1}{2}$ , ovvero il punto  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  in cui  $f$  vale  $\frac{1}{32}$ . Pertanto, essendo  $-\frac{216}{3125} < -\frac{32}{729} < 0 < \frac{1}{432} < \frac{1}{32}$ , il minimo assoluto di  $f$  su  $A$  è  $-\frac{216}{3125}$  (assunto in  $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ ) e il massimo assoluto è  $\frac{1}{32}$  (assunto in  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ).  
 Passiamo ora a  $B$ . Negli estremi si ha  $f(R_1) = -160$  e  $f(R_2) = 32$ , mentre negli altri punti si ha  $\phi(t) = f(t, -2) = 4t^3(3-t)$  con  $-2 < t < 2$ : ponendo  $\phi'(t) = 4t^2(9-4t) = 0$  si ottiene solo  $t = 0$  (invece  $t = \frac{9}{4}$  non interessa perché  $> 2$ ), ovvero il punto  $(0, -2)$  in cui  $f$  vale 0. Pertanto il minimo assoluto di  $f$  su  $B$  è  $-160$  (assunto in  $R_1$ ) e il massimo assoluto è 32 (assunto in  $R_2$ ).

#### (4) Equazioni differenziali.

(4.c) (Figura 7) Per discutere la crescita delle soluzioni bisogna ricavare esplicitamente  $y'$ , ma ciò richiede di dividere per  $y^2 \sin^2 x$ : iniziamo dunque discutendo brevemente cosa accade quando tale divisione non è possibile. Dalla forma dell'equazione si deduce che se  $y(x)$  è una soluzione e  $y(x) = 0$ , si ottiene  $\cos x = 0$ : ovvero, se una soluzione si annulla in un punto  $x$  allora tale punto dev'essere necessariamente della forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ; viceversa, nei punti  $x$  della forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  si ha  $\pm y^2(x)y'(x) = 0$ , dunque o  $y(x) = 0$  (come appena detto) o  $y'(x) = 0$ , ovvero si ha un punto stazionario, probabile estremante locale. Sempre dalla forma dell'equazione si deduce anche che se una soluzione è definita in qualche punto  $x$  del tipo  $k\pi$ , dev'essere  $y^3(x) + 1 = 0$ , ovvero in tale punto la soluzione deve valere  $-1$ . Escludendo ora i punti del piano in cui  $y = 0$  oppure  $x = k\pi$ , otteniamo finalmente  $y' = -\frac{(y^3+1)\cos x}{y^2 \sin^2 x}$ : pertanto  $y'(x) = 0$  o se  $y(x) = -1$  o se  $\cos x = 0$  (ovvero per  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ), mentre  $y'(x) > 0$  se  $(y^3 + 1)\cos x < 0$ , ovvero se  $y > -1$  e  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  oppure se  $y < -1$  e  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ . Se la condizione iniziale è  $y(-3) = -1$ , la soluzione è la funzione costante  $y(x) \equiv -1$ ; occupiamoci invece del caso in cui la condizione iniziale sia  $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$ . Separando le variabili, si ottiene  $\frac{y^2}{y^3+1}y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ , da cui integrando si ha  $\frac{1}{3} \log|y^3 + 1| = \frac{1}{\sin x} + k$ ; imponendo la condizione iniziale si ha  $0 = 1 + k$ , da cui  $k = -1$  e perciò  $\frac{1}{3} \log|y^3 + 1| = \frac{1}{\sin x} - 1$ . Si ha dunque  $|y^3 + 1| = e^{3(\frac{1}{\sin x} - 1)}$ , ovvero  $y^3 + 1 = \pm e^{3(\frac{1}{\sin x} - 1)}$ : ma la condizione iniziale impone  $-1 = \pm 1$ , e dunque va scelto il segno “-”, da cui  $y^3 = -1 - e^{3(\frac{1}{\sin x} - 1)}$ , da cui  $y = -\sqrt[3]{1 + e^{3(\frac{1}{\sin x} - 1)}}$ .



(7) Zone di crescita e grafico della soluzione di (4.c); (8) Il grafico della legge oraria del moto di (4.1).

(4.f) Per risolvere l'equazione è necessario per il momento escludere i punti in cui  $\sin x = 0$ , ovvero i punti del tipo  $k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . In tale caso, l'equazione diventa  $y' + p(x)y = q(x)$  con  $p(x) = \cotg x$  e  $q(x) = 2 \cos x$ . Come noto, una primitiva di  $p(x)$  è  $P(x) = \log|\sin x|$ ; bisogna poi calcolare  $\int e^{P(x)}q(x) dx$ , ovvero  $\int |\sin x| \cdot 2 \cos x dx = (\text{sign}(\sin x)) \int 2 \sin x \cos x dx = -(\text{sign}(\sin x)) \cos^2 x$ . Si ha dunque l'integrale generale  $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x) dx + k) = \frac{1}{|\sin x|}(-(\text{sign}(\sin x)) \cos^2 x + k) = \frac{k}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ .  
 Imponendo la condizione iniziale  $y(\frac{\pi}{2}) = y_0$  si ottiene  $k = y_0$  e dunque  $y(x) = \frac{y_0}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{y_0 - \cos^2 x}{\sin x}$ , definita in  $]0, \pi[$ ; imponendo invece la condizione iniziale  $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$  si ottiene  $k = y_1$  e dunque  $y(x) = \frac{y_1}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-y_1 - \cos^2 x}{\sin x}$ , definita in  $] -\pi, 0[$ . L'unico caso in cui si può sperare di prolungare in  $x = 0$ , incollando, le due soluzioni appena trovate è quando  $y_0 = 1$  e  $y_1 = -1$  (se queste due condizioni non sono soddisfatte contemporaneamente, entrambe oppure una delle due soluzioni divergono quando  $x$  tende a 0). In tal caso si ottiene la funzione  $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \sin x$  sia a sinistra che a destra, e tale funzione può essere ovviamente prolungata come funzione derivabile (anzi, addirittura come funzione  $C^\infty$ ) in  $x = 0$  col valore  $\sin 0 = 0$ . (D'altra parte, con un po'



di occhio, si poteva riconoscere fin da subito che  $y(x) = \sin x$  è una soluzione dell'equazione differenziale data.)

**(4.h)** L'equazione caratteristica è  $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ , che ha soluzione doppia  $\lambda = \frac{1}{2}$ : dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea associata  $4y'' - 4y' + y = 0$  è data da  $y(x) = (A+Bx)e^{\frac{x}{2}}$  al variare di  $A, B \in \mathbb{R}$ . Cerchiamo ora una soluzione particolare  $\tilde{y}(x)$  dell'equazione completa  $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$ : in questo caso, il metodo dei coefficienti indeterminati ci dice che si potrà trovare del tipo  $\tilde{y}(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}(mx+q) = (mx^3 + qx^2)e^{\frac{x}{2}}$ . Derivando, si ottiene  $\tilde{y}'(x) = (\frac{m}{2}x^3 + (\frac{q}{2} + 3m)x^2 + 2qx)e^{\frac{x}{2}}$  e  $\tilde{y}''(x) = (\frac{m}{4}x^3 + (\frac{q}{4} + 3m)x^2 + (2q + 6m)x + 2q)e^{\frac{x}{2}}$ , ed imponendo che sia soluzione si trova allora  $4\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + \tilde{y} = (24mx + 8q)e^{\frac{x}{2}} = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$ , da cui  $m = \frac{1}{24}$  e  $q = \frac{1}{8}$  e dunque  $\tilde{y}(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{24}e^{\frac{x}{2}}$ . L'integrale generale dell'equazione completa è dunque  $y(x) = (A + Bx + \frac{x^3 + 3x^2}{24})e^{\frac{x}{2}}$  al variare di  $A, B \in \mathbb{R}$ , da cui  $y'(x) = (\frac{1}{2}A + B + (\frac{1}{2}B + \frac{1}{4})x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$ . Imponendo le condizioni iniziali, si trova  $y(0) = A = -2$  e  $y'(0) = \frac{1}{2}A + B = 0$ , da cui  $B = 1$ , e dunque finalmente la soluzione  $y(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 24x - 48}{24}e^{\frac{x}{2}}$ .

**(4.1)** (Figura 8) In base a quanto detto, l'intensità della forza propulsiva è data dalla funzione continua  $F : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $F(t) = 150(1 - \frac{1}{5}t) = 150 - 30t$  (per  $0 \leq t \leq 5$ ) e  $F(t) \equiv 0$  (per  $5 \leq t \leq 8$ ). Fissiamo ora un sistema di coordinate ascisse  $x$  orientato verso l'alto con il valore  $x = 0$  sul suolo. Dall'istante iniziale  $t = 0$  all'istante  $t = 5$  il moto  $x(t)$  obbedisce dunque all'equazione  $x'' = -10 - x' + (150 - 30t)$ , ovvero  $x'' + x' = 140 - 30t$ , con condizioni iniziali  $x(0) = 0$  e  $x'(0) = 0$  (il candelotto parte da terra con velocità nulla). Una prima integrazione dà  $x' + x = 140t - 15t^2 + k$  con  $k$  da determinare; ma le condizioni iniziali danno necessariamente  $k = 0$ . Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine  $x' + x = 140t - 15t^2$ . Ponendo  $p(t) = 1$  e  $q(t) = 140t - 15t^2$ , una primitiva di  $p(t)$  è  $P(t) = t$ , e  $\int e^{P(t)}q(t) dt = \int (140t - 15t^2)e^t dt = (140t - 15t^2)e^t - \int (140 - 30t)e^t dt = (140t - 15t^2)e^t - (140 - 30t)e^t + \int (-30)e^t dt = (170t - 15t^2 - 170)e^t$ . L'integrale generale è dunque  $x(t) = e^{-t}((170t - 15t^2 - 170)e^t + h) = 170t - 15t^2 - 170 + he^{-t}$  con  $h$  da determinare; da  $x(0) = 0$  si ricava  $-170 + h = 0$ , ovvero  $h = 170$ , da cui la soluzione  $x(t) = 170(t - 1 + e^{-t}) - 15t^2$ . Ribadiamo che questa legge vale solo fino a  $t = 5$ , in cui l'altezza raggiunta vale  $x(5) \sim 306$  m, e la velocità è  $x'(5) = [170(1 - e^{-t}) - 30t]_{t=5} \sim 19$  m/sec (corrispondenti a circa 68 km/h).

Dall'istante iniziale  $t = 5$  all'istante  $t = 8$  la forza propulsiva sparisce, ed il moto  $x(t)$  obbedisce dunque all'equazione  $x'' = -10 - x'$ , ovvero  $x'' + x' = -10$ , con le nuove condizioni iniziali  $x(5) = 306$  m e  $x'(5) = 19$  m/sec ereditate dal moto precedente. Procedendo ancora come prima, una prima integrazione dà  $x' + x = -10t + k$  con  $k$  da determinare, e le condizioni iniziali danno  $19 + 306 = -50 + k$ , da cui  $k = 375$ . Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine  $x' + x = -10t + 375$ . Ponendo  $p(t) = 1$  e  $q(t) = 375 - 10t$ , una primitiva di  $p(t)$  è ancora  $P(t) = t$ , e  $\int e^{P(t)}q(t) dt = \int (375 - 10t)e^t dt = (375 - 10t)e^t - \int (-10)e^t dt = (385 - 10t)e^t$ . L'integrale generale è dunque  $x(t) = e^{-t}((385 - 10t)e^t + h) = 385 - 10t + he^{-t}$  con  $h$  da determinare; da  $x(5) = 306$  si ricava  $385 - 50 + he^{-5} = 306$ , ovvero  $h = -29e^5 \sim -4304$ , da cui la soluzione  $x(t) = 385 - 10t - 4304e^{-t}$ , che vale per  $5 \leq t \leq 8$ . L'altezza finale raggiunta all'istante dello scoppio, ovvero all'istante dell'inizio dello spettacolo dei fuochi d'artificio, è dunque  $x(8) \sim 303$  m. (Terminiamo, per curiosità, con alcune osservazioni. La velocità massima toccata dal candelotto si ha quando  $(x'(t))' = x''(t) = 170e^{-t} - 30 = 0$ , ovvero dopo  $\tilde{t} = \log \frac{17}{3} \sim 1,73$  secondi dalla partenza, quando diventa  $x'(\tilde{t}) \sim 88$  m/sec, ovvero circa 317 km/h. L'altezza massima raggiunta durante l'ascesa si ha quando  $x'(t) = -10 + 4304e^{-t} = 0$ , ovvero dopo  $\hat{t} = \log \frac{2152}{5} \sim 6,06$  secondi dalla partenza, alla quota  $x(\hat{t}) \sim 314$  m; infatti, all'istante dello scoppio il candelotto sta già scendendo, con velocità  $x'(\hat{t}) \sim -8,55$  m/sec, circa -31 km/h. È pure curioso notare che, in base al modello adottato in questo problema, se il candelotto non fosse esploso la velocità di discesa si sarebbe stabilizzata velocemente sui -10 m/sec, circa -36 km/h, raggiungendo nuovamente il suolo quando  $385 - 10t - 4304e^{-t} = 0$ , ovvero dopo circa  $t_1 \sim 38,5$  secondi.)