1.2 I numeri reali

Nel riassunto delle cose da sapere prima di iniziare il corso avevamo ricordato la descrizione dei numeri reali come "espressioni decimali possibilmente né limitate né periodiche"; il loro insieme $\mathbb{R}$ contiene allora $\mathbb{Q}$, i cui elementi siano visti come espressioni decimali limitate o quantomeno periodiche. Su $\mathbb{R}$ sappiamo essere definite due operazioni, l'*addizione* e la *moltiplicazione*, ed una relazione d'ordine totale "$\leq$" che, considerate assieme, fanno di $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ un *corpo commutativo totalmente ordinato* (ovvero che soddisfa (An_1)-$\cdots$-(An_6)-(CpO_1)-(CpO_2)); a dire il vero, però, le stesse proprietà sono possedute anche da $\mathbb{Q}$, e dunque non sarà per questo che ci apprestiamo ad allargare $\mathbb{Q}$. Il motivo sta invece nell'*impossibilità di assegnare ad alcune lunghezze un numero razionale*:[16] i nuovi enti numerici creati per colmare queste "lacune" dei numeri razionali furono detti numeri *irrazionali*, e il loro insieme $\mathbb{Q}'$, assieme a $\mathbb{Q}$, forma l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Come si sa, è fondamentale *l'identificazione dei numeri reali con i punti di una retta*: più precisamente, l'assegnare un "sistema di coordinate ascisse" sulla retta (ovvero fissare un punto O detto "origine", un verso di percorrenza detto "positivo" ed un altro punto, in direzione positiva rispetto ad O e da lui diverso, detto "punto unità") dà luogo ad una funzione biiettiva tra $\mathbb{R}$ e la retta stessa, tanto che è normale parlare di *retta reale*, senza di fatto distinguere tra $\mathbb{R}$ e la retta.

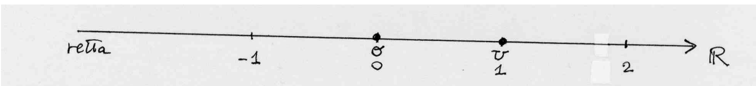

Figura 1.5: *Una retta e l'insieme* $\mathbb{R}$ *dei numeri reali si identificano tramite un sistema di coordinate ascisse.*

Poggiando su questa conoscenza di lunga data dei numeri reali, delle loro operazioni, del loro ordine e del loro sostanziale identificarsi con i punti di una retta su cui si sia assegnato un sistema di coordinate ascisse, vogliamo ora esaminarli attraverso le loro proprietà. Oltre ad essere, come visto, un corpo commutativo totalmente ordinato (cosa che però non lo distingue dal suo sottocorpo $\mathbb{Q}$), $\mathbb{R}$ soddisfa anche la seguente proprietà fondamentale:

[16] L'esempio storicamente più importante di grandezza irrazionale è quello dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 1. La sua misura a, in base al teorema di Pitagora, dovrebbe soddisfare $a^2 = 1 + 1 = 2$ (e dunque, per definizione, $a = \sqrt{2}$): se a fosse razionale, si potrebbe scrivere $a = \frac{m}{n}$ con m, n numeri naturali primi tra loro. Se ne dedurrebbe che $m^2 = 2n^2$, perciò m^2 è pari, perciò m è pari, perciò m^2 è divisibile per 4, ma $m^2 = 2n^2$ e perciò n^2 è pari, perciò n è pari (assurdo, perché deve essere primo con m). Generalizzando questo esempio, si può dimostrare che, se $a, n \in \mathbb{N}$ e $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{N}$, allora $\sqrt[n]{a}$ è irrazionale. Altri importanti numeri che si sono dimostrati essere irrazionali sono il numero *pi greco* $\pi = 3,14151\cdots$ (rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella del suo diametro) ed il *numero di Nepero* $e = 2,71828\cdots$, base naturale della funzione esponenziale.

(Co) (*Completezza*) se U e V sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $U \leq V$ (ovvero, $x \leq y$ per ogni $x \in U$ e $y \in V$), allora esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $U \leq t \leq V$;

l'elemento t si dice *elemento separatore* tra U e V, ed in generale, ovviamente, esso è lungi dall'essere unico[17]. La proprietà cruciale (Co) è soddisfatta da $\mathbb{R}$ ma non da $\mathbb{Q}$.[18] In altre parole, $\mathbb{R}$ *è un campo totalmente ordinato e completo*; poiché si dimostra (ma noi non ce ne occuperemo) che due campi totalmente ordinati e completi sono necessariamente isomorfi, tale proprietà individua $\mathbb{R}$ "sostanzialmente" (cioè, a meno di isomorfismi).

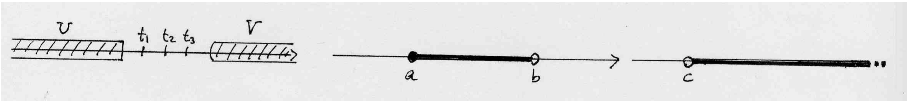

Figura 1.6: t_1, t_2 e t_3 *sono elementi separatori tra* U *e* V*; l'intervallo limitato* $[a, b[$*; la semiretta* $\mathbb{R}_{>c}$.

Intervalli Un *intervallo* di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ non vuoto tale che, se $x, y \in I$ e $x \leq t \leq y$, allora anche $t \in \mathbb{R}$ (ovvero, un intervallo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ "privo di buchi"). Ci si accorge facilmente che gli intervalli sono tutti e soli i sottoinsiemi dei tipi seguenti, ove $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$: (1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervallo chiuso limitato, che si riduce a $\{a\}$ se $a = b$); (2) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ e $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (intervalli semiaperti limitati); (3) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervallo aperto limitato); (4) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ e $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (semirette aperte o chiuse, che si denoteranno anche rispettivamente $\mathbb{R}_{\geq a}$, $\mathbb{R}_{>a}$, $\mathbb{R}_{\leq b}$ e $\mathbb{R}_{<b}$), (5) lo stesso $\mathbb{R}$.

Massimo e minimo. Estremo superiore ed inferiore Una nozione importante in $\mathbb{R}$ è quella di *estremo superiore* e *inferiore*: vediamo di che cosa si tratta. Intanto, dato un sottoinsieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$, si dice che $t \in \mathbb{R}$ è un *massimo* (risp. un *minimo*) di A se (1) $t \in A$, e (2) $x \leq t$ (risp. $t \leq x$) per ogni $x \in A$: non è affatto detto che tali massimo e minimo di A esistano, ma, se esistono, sono unici[19], e si denoteranno con $\max A$ e $\min A$. L'insieme dei *maggioranti di* A è il sottoinsieme $A^* = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \text{ per ogni } a \in A\}$ di $\mathbb{R}$; quello dei *minoranti di* A sarà $A_* = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a \text{ per ogni } a \in A\}$. Se $A^* \neq \varnothing$ (risp. $A_* \neq \varnothing$), si dirà che A è *superiormente limitato* (risp. *inferiormente limitato*), ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ sia superiormente che inferiormente limitato si dirà, ovviamente, *limitato*. Ora, è chiaro che il miglior maggiorante per A è quello più piccolo possibile: si porrà dunque, se esiste, $\sup A = \min A^*$. In quanto minimo di un sottoinsieme, tale elemento, se esiste, sarà unico, e si dirà *estremo superiore* di A. Simmetricamente si porrà,

[17] Ad esempio, se $U = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ e $V = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ tutti i numeri reali $t \in [-1, 1]$ sono elementi separatori tra U e V.

[18] Se $U = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ e $V = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2\}$, poichè la funzione x^2 è crescente un $t \in \mathbb{Q}$ tale che $U \leq t \leq V$ dovrebbe soddisfare $t^2 = 2$, ma come visto ciò è impossibile.

[19] Ad esempio, siano t_1 e t_2 due massimi per A: allora, poiché entrambi devono stare in A, dev'essere $t_1 \leq t_2$ e $t_2 \leq t_2$, ma allora $t_1 = t_2$ per (ASym).

se esiste, $\inf A = \max A_*$ (*estremo inferiore* di A). Si noti che, a differenza di $\max A$ e $\min A$, per $\sup A$ e $\inf A$ non si è richiesta l'appartenenza ad A.

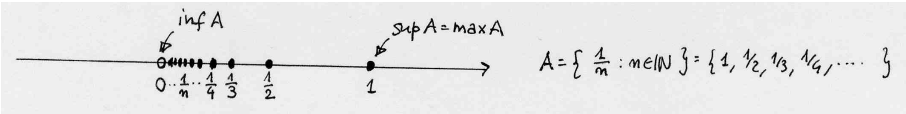

Figura 1.7: *Estremo superiore ed inferiore.*

Proposizione 1.2.1. *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *superiormente* (risp. inferiormente) *limitato ammette estremo superiore* (risp. inferiore). *In particolare, ogni sottoinsieme limitato di* $\mathbb{R}$ *ammette estremo superiore e inferiore.*

Dimostrazione. Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato, ovvero tale che $A^* \neq \varnothing$. Applichiamo (Co) considerando $U = A$ e $V = A^*$, e sia dunque $A \leq t \leq A^*$ un elemento separatore. Poiché $t \geq A$ si ha $t \in A^*$; poiché inoltre $t \leq A^*$, è proprio $t = \min A^*$. In modo analogo si dimostra l'affermazione per l'estremo inferiore. □

Riassumendo, un sottoinsieme superiormente (risp. inferiormente) limitatato A di $\mathbb{R}$ non ammette sempre il massimo (risp. minimo), ma ammette sempre l'estremo superiore (risp. inferiore) che, se appartiene ad A, chiaramente coinciderà col massimo (risp. col minimo) di A. Concretamente, dati un sottoinsieme A e un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, per determinare se sia $\alpha = \sup A$ o no si potrà applicare la seguente

Proposizione 1.2.2. (Proprietà caratteristiche di sup e inf) *Vale* $\alpha = \sup A$ *se e solo se*

(Sup1) $a \leq \alpha$ *per ogni* $a \in A$*;*

(Sup2) *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *tale che* $x < \alpha$ *esiste* $a \in A$ *tale che* $x < a$*.*

Simmetricamente, $\alpha = \inf A$ *se e solo se*

(Inf1) $a \geq \alpha$ *per ogni* $a \in A$*;*

(Inf2) *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *tale che* $x > \alpha$ *esiste* $a \in A$ *tale che* $x > a$*.*

Dimostrazione. Se $\alpha = \sup A$, essendo $\alpha = \min A^*$ vale $\alpha \in A^*$; dato poi $x \in \mathbb{R}$ tale che $x < \alpha$, vale certamente $x \notin A^*$ (appunto perché $\alpha = \min A^*$), e dunque esiste qualche $a \in A$ tale che $x \not\geq a$, ovvero $x < a$. Viceversa, assumiamo che α soddisfi (Sup1) e (Sup2), e supponiamo per assurdo che $\alpha \neq \min A^*$: allora esiste $x \in A^*$ tale che $x \not\geq \alpha$, ovvero $x < \alpha$. Ma allora per (Sup2) esiste $a \in A$ tale che $x < a$, e ciò dice che $x \notin A^*$, contraddizione. Stessi ragionamenti per inf. □

Ciò che afferma la proprietà caratteristica è dunque che "$\sup A$ sta sopra A, ma non appena si prova a scendere ci si lascia davanti qualche elemento di A"; similmente, "$\inf A$ sta sotto A, ma non appena si prova a salire ci si lascia dietro qualche elemento di A".[20]

[20] Si dimostra in realtà che l'esistenza di sup ed inf rispettivamente per sottoinsiemi superiormente ed inferiormente limitati è *equivalente* all'assioma di completezza (Co): infatti, se $A \leq B$ allora A è superiormente limitato, e dunque esiste $t = \sup A = \min A^*$: essendo $B \subset A^*$, si ha anche $t \leq B$, e dunque t è un elemento separatore. È lecito attendersi perciò che $\mathbb{Q}$ non soddisfi tale proprietà: l'esempio è il solito, basta prendere $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$.

Esercizio. *Dire se i seguenti sottoinsiemi* $A \subset \mathbb{R}$ *ammettono estremi superiore ed inferiore, massimo e minimo:* **(0)** $\{-2\}$; **(1)** $[0,1[$; **(2)** $]-\infty,-5[$; **(3)** $\{x \in \mathbb{R} > 0 : \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$; **(4)** $\{(-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$; **(5)** $\{(-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$; **(6)** $\{\frac{xy}{x^2+y^2} : x, y > 0\}$.

Risoluzione. **(0)** Banale: $\sup A = \inf A = \max A = \min A = -2$. **(1)** A è limitato, con $A^* = [1,+\infty[$ e $A_* =]-\infty, 0]$: dunque $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$. Poiché $0 \in A$, 0 è anche il $\min A$; invece $1 \notin A$, dunque A non ammette max. **(2)** A non è inferiormente limitato, dunque non ammette inf (e dunque nemmeno min); invece esso è superiormente limitato, con $A^* = [-5, +\infty[$: dunque $\sup A = -5$, ed essendo $-5 \notin A$, non ci sarà max. **(3)** La condizione $\sin(\frac{1}{x}) = 0$ con $x > 0$ è equivalente a $x = \frac{1}{k\pi}$ con $k \in \mathbb{N}$: dunque $A = \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots\}$. Vale $\frac{1}{\pi} \in A$ e $x \leq \frac{1}{\pi}$ per ogni $x \in A$: dunque $\max A = \frac{1}{\pi}$ (ed esso sarà ovviamente anche $\sup A$). Si noti poi che A è inferiormente limitato (perché $0 \in A_* \neq \varnothing$), e dunque ammette estremo inferiore, che vogliamo dimostrare essere 0: a tal fine usiamo le proprietà caratteristiche (Inf1) e (Inf2) dell'inf. (Inf1) lo abbiamo già detto ($0 \in A_*$); preso poi un qualsiasi $x > 0$, si ha $\frac{1}{k\pi} < x$ per k abbastanza grande, e dunque vale anche (Inf2). Dunque $\inf A = 0$; poiché $0 \notin A$, non vi sarà minimo. **(4)** Vale $A = \{0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{7}, \dots\} \sqcup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots\}$. Si vede subito che $A \subset]-1.1[$: infatti $\left|(-1)^n \frac{n-1}{n}\right| = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Dunque A è limitato, ed ammette perciò estremi superiore e inferiore. Vale $\sup A = 1$: infatti $x \leq 1$ per ogni $x \in A$, e dunque vale (Sup1); preso poi un qualsiasi $x < 1$, si ha $x < \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k}$ per k abbastanza grande, e dunque vale (Sup2). In modo analogo si prova che $\inf A = -1$. Poiché né 1 né -1 stanno in A, non vi saranno massimo e minimo. **(5)** Esattamente come nel caso precedente, solo che stavolta $1 \in A$ e dunque esiste $\max A = 1$. **(6)** Poiché $A \subset \mathbb{R}_{>0}$, si ha $\mathbb{R}_{\leq 0} \subset A_*$ e dunque A è inferiormente limitato: perciò ammette estremo inferiore. Vediamo che vale $\inf A = 0$: infatti vale (Inf1), mentre notiamo che per valori del tipo $(x, 1)$ con $x > 0$ si ottengono i punti $\frac{x}{x+1}$ che possono diventare arbitrariamente vicini a zero quando x tende a 0: dunque, preso un qualunque $0 < t < 1$ esistono di certo degli $x > 0$ tali che $\frac{x}{x+1} < t$ (basta prendere $x < \frac{t}{1-t}$) e dunque vale anche (Inf2). Si noti che $0 \notin A$, e dunque A non ammette minimo. Dalla disuguaglianza $(x-y)^2 \geq 0$ con $x, y > 0$ si ricava subito $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$, e dunque A è anche limitato: esso ammetterà anche l'estremo superiore. In realtà, per valori del tipo (x, x) con $x > 0$ si ottiene sempre $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, e dunque $\frac{1}{2} \in A$: poiché come visto si ha anche $\frac{1}{2} \geq A$, si avrà $\max A = \frac{1}{2}$ (che coincide ovviamente con $\sup A$).

Classi contigue Due sottoinsiemi $U, V \subset \mathbb{R}$ tali che $U \leq V$ (ovvero, come detto, tali che $x \leq y$ per ogni $x \in U$ e $y \in V$) e che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due elementi $x_\varepsilon \in U$ e $y_\varepsilon \in V$ tali che $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$, si diranno *classi contigue* di numeri reali: l'idea è che "anche se V sta sopra ad U, ci sono però elementi di U e V vicini quanto si vuole".[21] È allora naturale pensare che

Proposizione 1.2.3. *Due classi contigue* $U, V \subset \mathbb{R}$ *di numeri reali ammettono un unico elemento separatore* $\xi \in \mathbb{R}$, *e vale* $\xi = \sup U = \inf V$.

Dimostrazione. Siano $\alpha = \sup U$ e $\beta = \inf V$ (che di certo esistono perché U e V sono limitati risp. superiormente e inferiormente). Sappiamo anche che esiste qualche elemento separatore tra U e V; poiché ogni elemento separatore $t \in \mathbb{R}$ tra U e V deve soddisfare

[21] Ad esempio, $U =]0,1[$ e $V =]1,5[\cup \{7\}$ sono classi contigue di $\mathbb{R}$, perché, preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$, si ha $x_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{3} \in U$, $y_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{3} \in V$ e $y_\varepsilon - x_\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$; anche $U = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ e $V = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$, sono classi contigue di $\mathbb{R}$ in quanto, preso un qualsiasi $0 < \varepsilon \ll 1$, si ha $x_\varepsilon = \sqrt{2 - \frac{\varepsilon}{3}} \in U$, $y_\varepsilon = \sqrt{2 + \frac{\varepsilon}{3}} \in V$ e $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Invece $U =]0,1]$ e $V = [2,4[$ non lo sono: se $0 < \varepsilon < 1$, non esistono $x_\varepsilon \in U$ e $y_\varepsilon \in V$ tali che $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$ (tra U e V "c'è largo spazio").

$\alpha \le t \le \beta$, ci basta mostrare che $\alpha = \beta$ per concludere. Infatti, se per assurdo si avesse $\alpha < \beta$, si ha avrebbe allora $U \le \alpha < \beta \le V$, e allora per ogni $x \in U$ e $y \in V$ si avrebbe $y - x > \beta - \alpha > 0$: ma ciò contradirebbe la contiguità di U e V (basta prendere $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$). $\square$

Esempi. Siano $r \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$, e poniamo $U = \{x \in \mathbb{R} : x^r < \alpha\}$ e $V = \{x \in \mathbb{R} : x^r > \alpha\}$. Allora U e V sono classi contigue, e il loro elemento separatore è la radice r-esima $\sqrt[r]{\alpha}$; se α non è una "potenza r-esima perfetta", cioè non esiste $\beta \in \mathbb{Q}$ tale che $\alpha = \beta^r$), tale elemento separatore è irrazionale (ciò generalizza il ben noto caso $r = \alpha = 2$).

Densità dei razionali e degli irrazionali nei reali Come ultima cosa, vogliamo ricordare un fatto già detto in modo un po' vago: che "ogni numero reale si può approssimare a piacere con numeri razionali". Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $A \subset I$, diremo che A è *denso* in $\mathbb{R}$ se, comunque presi $x, y \in I$ con $x < y$, esiste $t \in A$ tale che $x < t < y$ (in altre parole, se "tra due qualsiasi elementi di I se ne può infilare sempre almeno uno di A"): accade allora che sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{Q}' := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (insieme dei numeri irrazionali) sono densi in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione della densità di razionali ed irrazionali nei reali. La densità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}'$ dentro $\mathbb{R}$ si può dimostrare con quanto spiegato in precedenza. Iniziamo col fatto che, come $\mathbb{Q}$, anche $\mathbb{R}$ gode del cosiddetto "Principio di Archimede":

Proposizione 1.2.4. (Archimedeità di $\mathbb{R}$) *Se $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$. Analogamente, se $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 1$ e $y > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n > y$.*

Dimostrazione. Negare la tesi equivale a dire che esistono $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ con $\tilde{x} > 0$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $n\tilde{x} \not> \tilde{y}$, cioè $n\tilde{x} \le \tilde{y}$: ovvero $A = \{n\tilde{x} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato, perché $\tilde{y} \in A^*$ e dunque esiste $x_0 = \sup A$. Da $\tilde{x} > 0$ si ricava $x_0 - \tilde{x} < x_0$: per la seconda proprietà caratteristica del sup, esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_0 - \tilde{x} < n\tilde{x}$, ovvero $x_0 < (n+1)\tilde{x}$: ma allora x_0 non è un maggiorante di A, assurdo perché $x_0 = \sup A = \min A^*$. Stesso procedimento per la seconda affermazione (ove si usa la moltiplicazione in luogo dell'addizione). $\square$

Ricordiamo le funzioni *parte intera* $[\,\cdot\,] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ e *parte frazionaria* $\mathrm{frac} : \mathbb{R} \to [0, 1[$: se $x \in \mathbb{R}$, la sua "parte intera" $[x]$ è il massimo intero $r \in \mathbb{Z}$ tale che $r \le x$ (dunque, per definizione, vale $[x] \le x < [x] + 1$), e la sua "parte frazionaria" è $\mathrm{frac}(x) = x - [x] \in [0, 1[$. Ad esempio, vale $[\frac{3}{2}] = 1$, $[-\frac{4}{3}] = -2$, $\mathrm{frac}(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ e $\mathrm{frac}(-\frac{4}{3}) = -\frac{4}{3} - (-2) = \frac{2}{3}$.

Corollario 1.2.5. *$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}'$ sono sottoinsiemi densi di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Per l'archimedeità di $\mathbb{R}$, essendo $y - x > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $y - x > \frac{1}{n}$. Poniamo ora $m = [nx] + 1 \in \mathbb{Z}$: vale $[nx] \le nx < [nx] + 1 = m$, da cui $\frac{[nx]}{n} \le x < \frac{m}{n}$; si ha poi $y = x + (y - x) > x + \frac{1}{n} \ge \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$, e se ne ricava che $x < \frac{m}{n} < y$, come si voleva. Si prenda poi un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{Q}' \cap \mathbb{R}_{>0}$ (ad esempio $\alpha = \pi$), e sia $\frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}$ tale che $\frac{x}{\alpha} < \frac{m'}{n'} < \frac{y}{\alpha}$, ovvero $x < \frac{m'}{n'}\alpha < y$: se $m' \ne 0$ allora $\frac{m'}{n'}\alpha \in \mathbb{Q}'$ e siamo a posto, mentre se $m' = 0$ allora $x < 0 < y$ e dunque, preso $n'' \in \mathbb{N}$ tale che $n''y > \alpha$, vale $x < 0 < \frac{\alpha}{n''} < y$, con $\frac{\alpha}{n''} \in \mathbb{Q}'$. $\square$