Breve riassunto delle cose da sapere prima di iniziare

Poiché una parte rilevante del programma di questo corso consisterà nel rivisitare, ovviamente da un punto di vista più "maturo", le cose già presenti nel quinto anno di liceo scientifico (studio di funzioni di variabile reale, derivate, integrali), è normale che prima di iniziare si assumano come note le cose svolte fino al quarto anno, che corrispondono grossomodo al bagaglio matematico standard delle scuole medie superiori. In queste pagine andiamo a riassumere brevemente queste nozioni, dando anche esempi concreti attraverso i quali lo studente potrà mettere alla prova la propria preparazione preliminare.

Alfabeto greco È bene iniziare ricordando le lettere (minuscole/maiuscole) dell'alfabeto greco, che useremo assai frequentemente: α/A (alfa), β/B (beta), γ/Γ (gamma), δ/Δ (delta), $\epsilon, \varepsilon/E$ (epsilon), ζ/Z (zeta), η/N (eta), $\theta, \vartheta/\Theta$ (theta), ι/I (iota), κ/K (kappa), λ/Λ (lambda), μ/M (mu,mi) ν/V (nu,ni), ξ/Ξ (xi), $\phi, \varphi/\Phi$ (fi), o/O (omicron), $\pi, \varpi/\Pi$ (pi), $\rho, \varrho/P$ (ro), $\sigma, \varsigma/\Sigma$ (sigma), τ/T (tau), υ/U (üpsilon), χ/X (chi) ψ/Ψ (psi), ω/Ω (omega).

Numeri Denoteremo gli insiemi dei numeri *naturali*, *interi*, *razionali* rispettivamente con

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{Q} = \Big\{\frac{m}{n} \,:\, m, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0\Big\}.$$

Lo studente dovrà avere familiarità con questi insiemi numerici e le loro operazioni, così come con i numeri *reali*, pensati come espressioni decimali possibilmente né limitate né periodiche. Il loro insieme, che si denota con $\mathbb{R}$, è "fatto e ordinato" come i punti di una retta orientata. Sappiamo che $\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$; che è più grande di $\mathbb{Q}$ perché ne "riempie i buchi", ma tuttavia "non troppo più grande", perché un numero reale è approssimabile a piacere con numeri razionali: così ad esempio, $\sqrt{2} = 1,41421\cdots$, $\pi = 3,14151\cdots$ ed il numero di Nepero $e = 2,71828\cdots$ sono numeri reali non razionali, ma $\sqrt{2}$ si può approssimare a piacere con la sequenza di numeri razionali 1; $1,4$; $1,41$; $1,4142$; e così via. In quest'analogia con la retta, l'intervallo $[a, b]$ (risp. $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$) indica l'insieme dei numeri reali x tali che $a \leq x \leq b$ (risp. $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$). Nella prima parte del corso studieremo i numeri reali $\mathbb{R}$ con maggiore attenzione, e introdurremo anche un insieme numerico più grande di $\mathbb{R}$: quello dei numeri *complessi*, che denoteremo con $\mathbb{C}$.

Funzioni elementari L'annosa questione: uno studente di scuola superiore sa o non sa che cos'è una funzione? In teoria, dovrebbe; in pratica, invece, si tende a fare spesso confusione tra *funzione*, che è la "regola" $f : X \to Y$ tramite la quale si associa ad ogni elemento a dell'insieme X (dominio) uno ed un solo elemento $f(a)$ dell'insieme Y (codominio), ed il suo *grafico*, che invece è l'insieme delle coppie $(a, f(a))$ al variare di a nel dominio X. A parziale discolpa, va detto che nella scuola superiore si studiano solo funzioni con dominio un sottoinsieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, e codominio $\mathbb{R}$, per cui il grafico è il familiare "disegno nel piano che non torna mai sui suoi passi": la tentazione di identificare il concetto "sfuggente" di funzione con quello ben più concreto di grafico è forte. Durante il corso avremo tempo e modo di mettere chiarezza su tutto ciò: qui si tratta solo di cercare di partire col piede giusto. Così, quando diremo che il polinomio $x^2 - 4x - 5$, l'esponenziale e^x ed il logaritmo $\log x$ sono "funzioni", intenderemo dire che si tratta di regole che ad ogni numero reale a (anzi, per il logaritmo, solo agli $a > 0$) associano uno ed un solo numero reale, quello che si ottiene mettendo a al posto di x (ad esempio, il suddetto polinomio manda il numero -1 nel numero $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 0$, ed il logaritmo manda 1 in 0). Vediamo le funzioni *elementari* di cui disponiamo fin d'ora.

• Iniziamo con il *modulo*, o *valore assoluto* (vedi Figura 0.2(iii)) . Il suo effetto è quello di rendere sempre positivo quello che contiene. In altre parole, preso un numero reale x, il suo modulo $|x|$ vale x (se $x \geq 0$) oppure $-x$ (se $x < 0$): dunque vale $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$, e $|x| > 0$ per ogni $x \neq 0$. Ad esempio, si ha $|3| = 3$, $|-7| = -(-7) = 7$, $|2x-5| = 2x-5$ (se $x \geq \frac{5}{2}$) e $|2x-5| = -(2x-5) = 5-2x$ (se $x < \frac{5}{2}$). Il suo dominio è ovviamente tutto $\mathbb{R}$. La relazione del modulo con le operazioni è illustrata dalle seguenti due proprietà, che valgono per ogni coppia di numeri reali x e y: (1) $|x+y| \leq |x| + |y|$ e $|x-y| \geq |x| - |y|$; (2) $|xy| = |x||y|$, e in particolare $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.
A dispetto della sua apparente modestia, il modulo è sempre stato un autentico spauracchio per lo studente, forse perché spesso non si spiega un fatto elementare: che la presenza del modulo invita a studiare prima il segno del suo argomento (cioè, quello che ci sta dentro), per poi dividere lo studio nei vari casi in cui tale segno è chiaro. Ad esempio, poniamo di avere l'espressione $f(x) = |7-x| - |x^2+4x|$: essendo $7-x \geq 0$ se e solo se $x \leq 7$ e $x^2+4x \geq 0$ se e solo se $x \leq -4$ oppure $x \geq 0$, possiamo scrivere $f(x)$ in una forma più semplice distinguendo caso per caso. In effetti, quando $x \leq -4$ e $0 \leq x \leq 7$ (casi in cui gli argomenti di entrambi i moduli sono ≥ 0) la nostra espressione diventa $(7-x) - (x^2+4x) = -x^2 - 5x + 7$; quando $-4 \leq x \leq 0$ (caso in cui l'argomento del primo modulo è ≥ 0 e quello del secondo è ≤ 0) essa diventa $(7-x) - (-(x^2+4x)) = x^2 + 3x + 7$; infine, quando $x \geq 7$ (caso in cui, viceversa, l'argomento del primo modulo è ≤ 0 e quello del secondo è ≥ 0) essa diventa $(-(7-x)) - (x^2+4x) = -x^2 - 3x - 7$. Si noti che nei punti di passaggio le due definizioni consecutive coincidono, per dare $f(-4) = 11$, $f(0) = 7$ e $f(7) = -77$.

• Naturalmente conosciamo i *polinomi*, e le frazioni di polinomi (*funzioni razionali*): esse hanno per dominio tutti i numeri che non annullano il denominatore (ad esempio, $\frac{5x-3}{x^2+4x+3}$ ha come dominio tutti i numeri reali tranne -1 e -3).

• Parliamo ora delle *potenze* x^α (vedi Figura 0.1), iniziando dal caso in cui x è un numero reale > 0. Quando α è un numero naturale, le potenze sono gli "atomi" dei polinomi, ed il loro significato è "moltiplicare x per se stesso α volte". Come noto, esse soddisfano le seguenti relazioni:

(1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$,

(2) $x^\alpha / x^\beta = x^{\alpha-\beta}$ (se $\alpha > \beta$),

(3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

E se α non è un numero naturale, possiamo comunque dare un senso a x^α? L'idea è quella di chiedere che, in ogni caso, continuino a valere le relazioni (1), (2) e (3), seppure in modo formale.

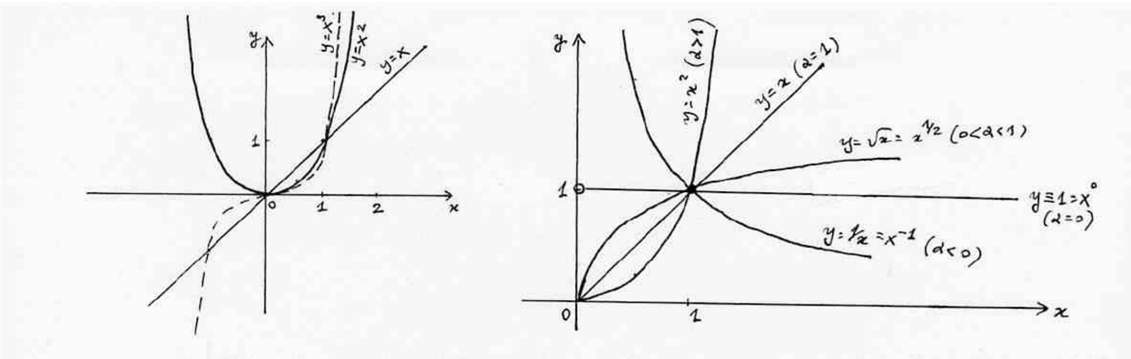

Figura 0.1: *Grafici delle potenze x^α con esponente α naturale e reale*

– Se $\alpha = 0$, poiché da (1) si ha $x^0 x^\beta = x^{0+\beta} = x^\beta$, si è indotti a porre
$$x^0 = 1.$$

– Se invece α è un numero intero negativo (diciamo $\alpha = -m$, con m numero naturale), sempre da (1) si ha $x^{-m}x^m = x^{-m+m} = x^0 = 1$; perciò si è indotti a porre
$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

– E se α è un numero razionale? Se $\alpha > 0$ (diciamo $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n > 0$), poiché da (3) formalmente ricaviamo $(x^{\frac{m}{n}})^n = x^{\frac{m}{n}n} = x^m$, sarà il caso di porre
$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$
(la ben nota "radice n-esima", che viene dunque ricompresa nella notazione delle potenze); se invece $\alpha < 0$ (diciamo $\alpha = -\frac{m}{n}$ con $m, n > 0$), essendo $x^{-\frac{m}{n}}x^{\frac{m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}+\frac{m}{n}} = x^0 = 1$ possiamo porre
$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

– Infine, se α è un qualsiasi numero reale, ci accontentiamo di questa spiegazione un po' vaga, ma efficace: sappiamo che possiamo approssimare α a piacere con una sequenza di numeri razionali α_1, α_2, α_3 ...; ed allora la sequenza di numeri reali positivi x^{α_1}, x^{α_2}, x^{α_3}, ... (che sappiamo calcolare, perché gli esponenti α_1, α_2, α_3 etc. sono numeri razionali) approssimerà un numero reale positivo, che chiameremo per l'appunto x^α.

In sostanza, d'ora in poi per noi il simbolo x^α avrà senso per ogni numero reale $x > 0$ ed ogni numero reale α.

Esempi. **(1)** Vale $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $(\frac{4}{5})^{-3} = \frac{1}{(\frac{4}{5})^3} = \frac{125}{64}$ e $(\sqrt{2})^{-7} = \frac{1}{(\sqrt{2})^7} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$. **(2)** Vale $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ e $(\frac{1}{32})^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{(\frac{1}{32})^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(\frac{1}{32})^3}} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$.

Potenze con base negativa. Proviamo ora a definire la funzione x^α, quando possibile, anche per $x \leq 0$.

– Se α è un numero naturale (diciamo $\alpha = m$ con $m > 0$), come sappiamo il simbolo x^m continua ad avere lo stesso senso di prima anche per ogni numero reale x: si tratta sempre di moltiplicare x per se stesso m volte. Più in generale, la potenza x^α si può definire per ogni numero reale x anche se α è un numero razionale > 0 che, *ridotto ai minimi termini, abbia denominatore dispari* (ad esempio $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{5}$, ma anche $\frac{68}{28}$ e $\frac{48}{66}$, che diventano $\frac{17}{7}$ e $\frac{8}{11}$): scritto $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m, n > 0$ primi tra loro e n dispari, se $x = 0$ poniamo $0^{\frac{m}{n}} = 0$, e se $x < 0$ poniamo

$$x^{\frac{m}{n}} = \big(-\sqrt[n]{|x|}\,\big)^m = (-1)^m \sqrt[n]{|x|^m}.$$

Esempi. **(1)** Si ha $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$ e $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$. **(2)** Vale $0^{\frac{3}{5}} = 0$, $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-\sqrt[3]{8})^1 = -2$ e $(-243)^{\frac{2}{5}} = (-\sqrt[5]{243})^2 = (-3)^2 = 9$.

– Se $\alpha = 0$ poniamo $x^0 = 1$ per ogni $x \neq 0$; invece il simbolo 0^0 non avrà senso.

– Se α è un numero intero negativo (diciamo $\alpha = -m$ con $m > 0$), si potrà definire ancora $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ purché sia $x \neq 0$. Più in generale, come prima, la stessa cosa si può fare se α è un numero razionale < 0 che, ridotto ai minimi termini, abbia denominatore dispari: scritto $\alpha = -\frac{m}{n}$ con $m, n > 0$ primi tra loro e n dispari, se $x = 0$ poniamo $0^{\frac{m}{n}} = 0$, e se $x < 0$ (ovvero $-x > 0$) poniamo

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\big(-\sqrt[n]{|x|}\,\big)^m} = \frac{(-1)^m}{\sqrt[n]{|x|^m}}.$$

Esempi. **(1)** Si ha $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-3)(-3)} = \frac{1}{9}$ e $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$. **(2)** Vale $(-4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(-4)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $(-5)^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{(-5)^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{(-\sqrt[7]{5})^2} = \frac{1}{\sqrt[7]{25}}$ e $(-\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(-\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}})^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$.

– Occupiamoci ora del caso in cui α sia un numero razionale che, *ridotto ai minimi termini, abbia denominatore pari*, diciamo $\alpha = \frac{m}{n}$ con m dispari e n pari, ad esempio $\frac{1}{2}$ o $-\frac{3}{4}$. In tal caso, la sola definizione che possiamo dare quando $x \leq 0$ è $0^\alpha = 0$ se $\alpha > 0$, e niente più: ad esempio, simboli come $(-1)^{\frac{1}{2}}$ o $(-5)^{-\frac{3}{4}}$ saranno privi di significato. Il problema sta nel fatto che *una potenza pari di un qualsiasi numero reale è sempre positiva*: dunque i simboli $(-1)^{\frac{1}{2}}$ e $(-5)^{-\frac{3}{4}}$ (che saremmo indotti a scrivere $\sqrt{-1}$ e $\sqrt[4]{(-5)^3} = \sqrt[4]{-125}$), dovendo indicare presunti numeri reali che, elevati alla seconda o alla quarta, dovrebbero dare rispettivamente -1 o -125, sono chiaramente privi di senso per i numeri reali.[1]

– Infine, se α è un numero reale qualsiasi, poiché come visto la definizione di x^α va data approssimando α con numeri razionali, e tra questi, ridotti ai minimi termini, ve ne sono sia con denominatore pari che dispari, anche in questo caso la sola definizione che possiamo dare quando $x \leq 0$ è $0^\alpha = 0$ se $\alpha > 0$, e niente altro: ad esempio, simboli come $(-1)^{\sqrt{2}}$ o $(-3)^{-\pi}$ saranno privi di significato.

Ricapitolando, la funzione x^α ha come dominio:

– tutti gli x se α è un numero razionale > 0 che, ridotto ai minimi termini, abbia denominatore dispari (ad esempio, se α è naturale, oppure $\alpha = \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{12}{35}, \dots$);

– tutti gli $x \neq 0$ se $\alpha = 0$ o se α è un numero razionale < 0 che, ridotto ai minimi termini, abbia denominatore dispari (ad esempio, se α è intero negativo, oppure $\alpha = -\frac{1}{5}, -\frac{2}{17}, \dots$));

– tutti gli $x \geqslant 0$ se α è un qualsiasi altro numero reale > 0 (ad esempio, se $\alpha = \frac{1}{2}, 3\pi, \sqrt{3}-1, \frac{5}{6}, \dots$);

– tutti gli $x > 0$ se α è un qualsiasi altro numero reale < 0 (ad esempio, se $\alpha = -\frac{1}{2}, 1-\pi, -\frac{3}{14}, -4\sqrt{3}, \dots$).

[1] D'altra parte, come vedremo, sarà proprio questa "carenza" dei numeri reali che ci porterà ad allargarne l'insieme ad uno più grande, detto dei *numeri complessi*, in cui questi problemi avranno sempre soluzione (ad esempio, si potranno trovare numeri complessi z tali che $z^2 = -1$, o tali che $z^4 = -125$).

Naturalmente, le precedenti regole formali (1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, (2) $x^\alpha / x^\beta = x^{\alpha-\beta}$ e (3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ continuano a valere anche in generale. Vi sono tuttavia alcune eccezioni solitamente legate alla comparsa, naturale o artificiosa, di denominatori pari, e gestibili con un po' di prudenza: ad esempio, si ha $6 = (-2)(-3)$ ma non si può scrivere $6^{\frac{1}{2}} = (-2)^{\frac{1}{2}}(-3)^{\frac{1}{2}}$ (il primo membro ha senso, il secondo no); oppure si ha $\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 2$ ma $(-8)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{8} = -2$ mentre $(-8)^{2 \cdot \frac{1}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$ e addirittura $(-8)^{\frac{1}{6} \cdot 2} = ((-8)^{\frac{1}{6}})^2 = (\sqrt[6]{-8})^2$ è privo di senso.

Osserviamo l'andamento della funzione x^α, con α numero reale qualsiasi (vedi Figura 0.1). Intanto, possiamo limitarci a $x \geq 0$ oppure $x > 0$ (infatti, se $\alpha = \frac{m}{n}$ con n dispari, se m è pari allora $(-x)^\alpha = x^\alpha$ mentre se m è dispari allora $(-x)^\alpha = -x^\alpha$): dunque il grafico starà tutto nel primo quadrante del piano cartesiano e, visto che $1^\alpha = 1$ per ogni α, esso passerà sempre per il punto $(1, 1)$. Distinguiamo ora tre casi. (1) Se $\alpha > 0$, la funzione x^α è "crescente", ovvero $(x_1)^\alpha \leq (x_2)^\alpha$ se e solo se $x_1 \leq x_2$; essa tende a 0 quando x tende a 0, e a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$. (2) Se $\alpha < 0$ accade il contrario: la funzione x^α è "decrescente", ovvero $x_1^\alpha \leq x_2^\alpha$ se e solo se $x_1 \geq x_2$; essa tende a $+\infty$ quando x tende a 0, e a 0 quando x tende a $+\infty$. (3) Infine, se $\alpha = 0$ la funzione vale costantemente 1.

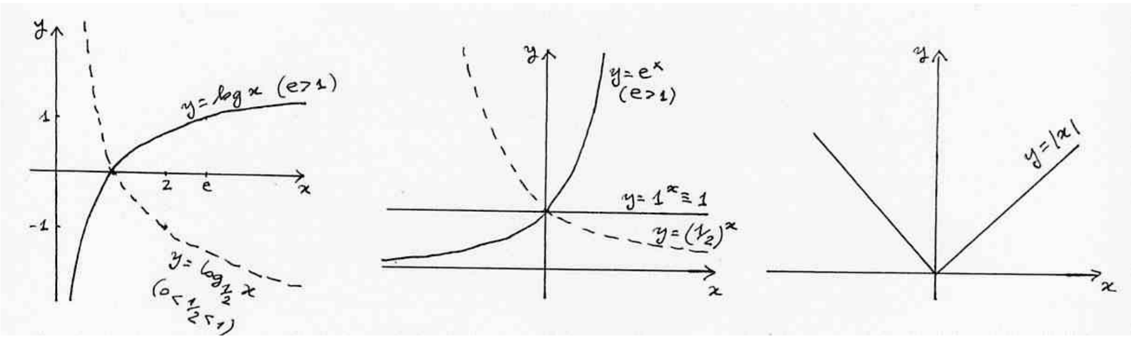

Figura 0.2: *Grafici del logaritmo, dell'esponenziale e del modulo*

• Per la funzione potenza, la variabile x stava nella base; se invece la variabile x appare all'esponente, si parlerà di funzione *esponenziale*[2] a^x, ove a è un fissato numero reale > 0 (si noti che se $a = 1$ la funzione vale costantemente 1; vedi Figura 0.2(ii)). Le proprietà fondamentali sono naturalmente le stesse di quelle delle potenze, ovvero $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ e $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2. Il dominio di questa funzione sarà tutto l'insieme dei numeri reali, e si noti che *essa assume solo valori* > 0 (ad esempio $a^{-1000} = \frac{1}{a^{1000}} > 0$). Quanto all'andamento della funzione (vedi Figura 0.2(ii)), osserviamo che quando $x = 0$ essa vale 1; distinguiamo poi due casi. (1) Se $a > 1$ la funzione a^x è crescente, tende rapidamente a 0 quando x tende a $-\infty$ e tende rapidamente a $+\infty$ quando

[2]Con maggior precisione, si dimostra che per ogni $a > 0$ esiste un'unica funzione $f_a(x)$ monotòna (ovvero, crescente oppure decrescente a seconda di a), definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, con le proprietà che $f_a(1) = a$ e $f_a(x)f_a(y) = f_a(x + y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. La funzione $f_a(x)$, detta *esponenziale di base* a e usualmente denotata a^x, è costantemente uguale a 1 se $a = 1$, strettamente crescente se $a > 0$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$, e per ogni $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $y = f_a(x)$. Inoltre, se $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si ha $f_a(x) = \sqrt[q]{a^p}$.

x tende a $+\infty$. (2) Se invece $0 < a < 1$ accade il contrario: la funzione a^x è decrescente, tende rapidamente a $+\infty$ quando x tende a $-\infty$ e tende rapidamente a 0 quando x tende a $+\infty$. Tra le possibili scelte per a, la migliore è $a = e$ (numero di Nepero, che tratteremo in seguito): il perché lo capiremo più avanti, parlando di derivate.

• Il *logaritmo* è la funzione inversa dell'esponenziale: se a è un numero reale > 0 ma $\neq 1$ e x è un numero reale > 0, allora $\log_a(x)$ è, per definizione, quel numero reale al quale bisogna elevare a per ottenere x: ovvero $a^{\log_a(x)} = x = \log_a(a^x)$. Il logaritmo ha le seguenti due proprietà fondamentali, che si verificano facilmente: (1)' $\log_a(x_1x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$, e (2)' $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$, da cui seguono tutte le altre (ad esempio $\log_a(1) = 0$, $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$ e più generalmente $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$, ecc.). Il dominio di questa funzione sarà l'insieme dei numeri reali > 0. Per l'andamento (vedi Figura 0.2(i)), la funzione vale 0 quando $x = 1$; distinguiamo poi anche qui due casi. (1) Se $a > 1$ la funzione $\log_a(x)$ è crescente, quando x tende a 0 essa tende lentamente a $-\infty$ e quando x tende a $+\infty$ essa tende lentamente a $+\infty$. (2) Se invece $0 < a < 1$, inversamente, la funzione $\log_a(x)$ è decrescente, quando x tende a 0 essa tende a lentamente $+\infty$ e quando x tende a $+\infty$ essa tende lentamente a $-\infty$. Anche per il logaritmo, la scelta migliore è $a = e$, per lo stesso (ancora misterioso) motivo dell'esponenziale: perciò d'ora in poi, quando scriveremo "$\log x$" senza indicare la base, intenderemo che la base è e (si parla di *logaritmo naturale*, da taluni indicato anche con "$\ln x$").

• Tra le funzioni elementari si annoverano anche le *funzioni goniometriche*, di cui parleremo tra poco.

Equazioni e disequazioni in una variabile Con le funzioni elementari appena ricordate dobbiamo essere in grado di risolvere equazioni e disequazioni (ovvero trovare l'insieme di tutti e soli i possibili valori di x che le soddisfano). Diamo qui nel seguito alcuni esempi di ricapitolazione (per le funzioni goniometriche, si veda più sotto).

Esercizio. *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni in una variabile:*

$$(\mathbf{1}) \quad \begin{cases} \frac{x+2}{x} + 3x > \frac{5x+6}{2} \\ \frac{2x}{x^2-1} \leq 2 + \frac{x}{x-1}. \end{cases} , \quad (\mathbf{2}) \quad \begin{cases} |x+3| + |y+1| = 3 \\ x + |2y-1| = 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{3}) \quad 3^{1+x} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-x} < \sqrt{3},$$

$$(\mathbf{4}) \quad 2\log_2(1-x) - \log_2|x| \geq 1, \qquad (\mathbf{5}) \quad \sqrt{3(x^2-1)} < 5 - x.$$

Risoluzione. **(1)** Nella prima disequazione dovrà essere $x \neq 0$ per l'esistenza del denominatore; essa diventa $\frac{x^2-4x+4}{2x} > 0$; il numeratore è $(x-2)^2$, e dunque è > 0 per ogni $x \neq 2$, mentre il denominatore è > 0 per $x > 0$, perciò la prima disequazione è soddisfatta se e solo se $x > 0$ ma $x \neq 2$. La seconda disequazione richiede $x \neq \pm 1$ per l'esistenza dei denominatori; essa diventa $\frac{3x^2-x-2}{x^2-1} \geq 0$; il numeratore ha radici $-\frac{2}{3}$ e 1, e dunque è ≤ 0 per $x \leq -\frac{2}{3}$ oppure $x \geq 1$, mentre il denominatore è > 0 per $x < -1$ oppure $x > 1$; confrontando i segni, notiamo che la seconda disequazione è soddisfatta se e solo se $x < -1$ oppure $x \geq -\frac{2}{3}$ ma $x \neq 1$. Il sistema è dunque soddisfatto se e solo se $x > 0$ ma $x \neq 1, 2$. **(2)** Dovremmo scomporre lo studio in vari casi nei quali gli argomenti dei tre moduli abbiano segno certo, per poterci così "sbarazzare" dei moduli. Notiamo che $x + 3 \geq 0$ se e solo se $x \geq -3$, $y + 1 \geq 0$ se e solo se $y \geq -1$ e $2y - 1 \geq 0$ se e solo se $y \geq \frac{1}{2}$: dovremo dunque trattare $2 \times 3 = 6$ casi distinti. Primo: se $x \leq -3$ e $y \leq -1$, il sistema diventa $\begin{cases} (-(x+3))+(-(y+1))=3 \\ x+(-(2y-1))=0. \end{cases}$, che ha soluzione $(-5,-2)$ (accettabile). Secondo: se $x \le -3$ e $-1 \le y \le \frac{1}{2}$, il sistema diventa $\begin{cases} (-(x+3))+(y+1)=3 \\ x+(-(2y-1))=0 \end{cases}$, che ha soluzione $(-9,-4)$ (non accettabile). Terzo: se $x \le -3$ e $y \ge \frac{1}{2}$, il sistema diventa $\begin{cases} (-(x+3))+(y+1)=3 \\ x+(2y-1)=0 \end{cases}$, che ha soluzione $(-3,2)$ (accettabile). Quarto: se $x \ge -3$ e $y \le -1$, il sistema diventa $\begin{cases} (x+3)+(-(y+1))=3 \\ x+(-(2y-1))=0. \end{cases}$, che ha soluzione $(3,2)$ (non accettabile). Quinto: se $x \ge -3$ e $-1 \le y \le \frac{1}{2}$, il sistema diventa $\begin{cases} (x+3)+(y+1)=3 \\ x+(-(2y-1))=0 \end{cases}$, che ha soluzione $(-1,0)$ (accettabile). Infine, il sesto: se $x \ge -3$ e $y \ge \frac{1}{2}$, il sistema diventa $\begin{cases} (x+3)+(y+1)=3 \\ x+(2y-1)=0 \end{cases}$, che ha soluzione $(-3,2)$ (accettabile). Ricapitolando, il sistema ha le tre soluzioni $(-5,-2)$, $(-1,0)$ e $(-3,2)$. **(3)** Si tratta di una disequazione esponenziale: l'idea è quella di ridurla ad una disequazione esponenziale elementare del tipo (ad esempio) $a^x > b$ con b numero reale, che ha come soluzioni tutti gli x (se $b \le 0$), mentre invece se $b > 0$, bisogna distinguere tra il caso $a > 1$ (in cui $\log_a$ è crescente, e dunque estraendo il logaritmo di ambo i membri si ricava $x > \log_a b$) e $0 < a < 1$ (in cui $\log_a$ è decrescente, e dunque estraendo il logaritmo di ambo i membri si ricava $x < \log_a b$). Nel caso in questione, si ricava $3^{1+x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3 \cdot 3^x + (3^{-1})^{-x} = 3 \cdot 3^x + 3^x = 4 \cdot 3^x$, da cui la disequazione diventa $4 \cdot 3^x < \sqrt{3}$, ovvero $3^x < \frac{\sqrt{3}}{4}$. Estraendo $\log_3$ di ambo i membri (si noti che $a = 3 > 1$) ed usando le proprietà dei logaritmi, si ricava $x < \log_3(\frac{\sqrt{3}}{4}) = \log_3(\sqrt{3}) - \log_3 4 = \log_3(3^{\frac{1}{2}}) - \log_3(2^2) = \frac{1}{2} + 2\log_3 2$. **(4)** Si tratta di una disequazione logaritmica: l'idea è di ridurla ad una disequazione logaritmica elementare del tipo (ad esempio) $\log_a x > b$ con b numero reale; scrivendo $b = \log_a(a^b)$, si ottiene allora $\log_a x > \log_a(a^b)$, da cui si ricava $x > a^b$ (nel caso $a > 1$, in cui $\log_a$ è crescente) oppure $x < a^b$ (nel caso $0 < a < 1$, in cui $\log_a$ è decrescente). Esaminiamo il nostro caso concreto. Per l'esistenza dei logaritmi dovrà aversi $1 - x > 0$ (ovvero $x < 1$) e $|x| > 0$ (ovvero $x \ne 0$). Sfruttando le proprietà dei logaritmi, abbiamo dunque $2\log_2(1-x) - \log_2|x| = \log\left(\frac{(1-x)^2}{|x|}\right) \ge 1 = \log_2(2)$, da cui (essendo $a = 2 > 1$) ricaviamo $\frac{(1-x)^2}{|x|} \ge 2$, ovvero $\frac{(1-x)^2 - 2|x|}{|x|} \ge 0$. Se $x < 0$ abbiamo dunque $\frac{1-2x+x^2-(-2x)}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} \ge 0$, sempre vero; se invece $x > 0$ abbiamo $\frac{x^2-4x+1}{x} \ge 0$, soddisfatta per $x < 2-\sqrt{3}$ oppure $x > 2+\sqrt{3}$. Tenendo presente però le condizioni di esistenza $x < 1$ e $x \ne 0$, concludiamo che la disequazione è verificata per tutti e soli gli $x < 2-\sqrt{3}$ ma $x \ne 0$. **(5)** Si tratta di una disequazione irrazionale, ovvero del tipo $\sqrt{f(x)} > g(x)$ oppure $\sqrt{f(x)} < g(x)$. In entrambi i casi, per la realtà della radice va posto $f(x) \ge 0$. Poi, se $g(x) < 0$ la disequazione è di certo soddisfatta nel primo caso, e assurda nel secondo (si noti che, se esiste, il primo membro $\sqrt{f(x)}$ è ≥ 0), mentre se $g(x) \ge 0$ essa è equivalente a ciò che si ottiene elevando al quadrato ambo i membri ottenendo rispettivamente $f(x) > (g(x))^2$ (che, si noti, implica la condizione $f(x) \ge 0$, che sarà dunque inutile scrivere) e $f(x) < (g(x))^2$: dunque risolvere $\sqrt{f(x)} > g(x)$ equivale a risolvere separatamente i sistemi $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$, mentre $\sqrt{f(x)} < g(x)$ equivale al sistema $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$. Analogamente, l'equazione $\sqrt{f(x)} = g(x)$ equivarrà al sistema $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$. Nel nostro caso concreto, dovremo dunque risolvere il sistema $\begin{cases} 3(x^2-1) \ge 0 \\ 5-x \ge 0 \\ 3(x^2-1) < 25-10x+x^2 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} x \le -1 \text{ o } x \ge 1 \\ x \le 5 \\ -7 < x < 2 \end{cases}$, che ha soluzioni $-7 < x \le -1$ e $1 \le x < 2$.

Trigonometria Siamo abituati a rappresentare visivamente gli angoli fin dall'inizio del nostro percorso scolastico, ma per fare dei calcoli precisi nel piano cartesiano abbiamo bisogno di introdurre alcune quantità numeriche ad essi associate, che siano di facile uso. È quanto ci apprestiamo a fare parlando di funzioni goniometriche.

Il primo problema è: come rappresentare gli angoli sul piano cartesiano, e quale unità di misura scegliere per misurarne l'ampiezza?
Denotiamo col simbolo $\mathbb{S}^1$ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano cartesiano (essa è dunque il luogo dei punti del piano che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$: vedi Figura 0.3(i)). Un nome corrente per $\mathbb{S}^1$ è quello di *circonferenza goniometrica* (ove "goniometrica", parola di origine greca, fa notoriamente riferimento agli angoli): si usa infatti disegnare un angolo θ su $\mathbb{S}^1$ girando in senso antiorario (se θ è positivo) o orario (se θ è negativo) sempre a partire dal punto $P_0 = (1, 0)$ e segnando il punto P_θ in cui si arriva: in questo modo, sembra che perdiamo l'informazione sui giri fatti (angoli che differiscono di multipli dell'angolo giro cadono sul medesimo punto), ma in realtà oltre al punto P_θ noi teniamo a mente la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso. Quanto all'unità di misura, noi siamo avvezzi alla misura *sessagesimale* per cui un angolo giro vale 360°, e dunque uno piatto 180° e uno retto 90°. Tuttavia, dovremo abituarci da subito ad usare sempre la misura in *radianti*: dato un angolo θ, si tratta del rapporto tra la suddetta lunghezza dell'arco di circonferenza percorso e la lunghezza (che vale 1) del raggio di $\mathbb{S}^1$, e dunque è un "numero puro" (questa è la ragione per cui è preferibile, assieme al fatto che numericamente, si tratta solo di misurare quanto è lungo un arco di circonferenza). Ad esempio, gli angoli di $-30°$, $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $180°$, $270°$ $360°$ e $390°$ corrispondono rispettivamente (e d'ora in poi li chiameremo sempre così) a $-\frac{\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π e $\frac{13\pi}{6}$.

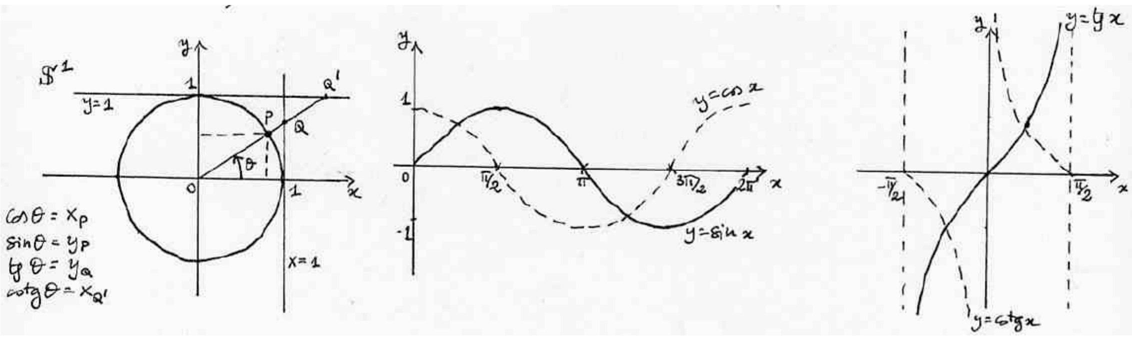

Figura 0.3: *Circonferenza goniometrica $\mathbb{S}^1$; grafici di seno, coseno, tangente e cotangente*

Introduciamo ora le due più importanti funzioni goniometriche dell'angolo θ: il suo *coseno* ed il suo *seno*. Essi sono semplicemente le coordinate di P_θ, ovvero, $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$: saranno dunque numeri reali compresi tra -1 e 1 (vedi Figura 0.3), legati dalla relazione fondamentale

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

È immediato verificare che vale anche $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \mp\cos(\theta)$, $\sin(\pi \pm \theta) = \mp\sin\theta$, $\cos(\pi \pm \theta) = \pm\cos\theta$; inoltre, seno e coseno sono grandezze *periodiche* di *periodo* 2π: esse non cambiano se si modifica l'angolo θ di multipli dell'angolo giro. In modo più formale, questo fatto si scrive

$$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \qquad \text{per ogni numero reale } \theta \text{ ed intero } k.$$

Notiamo allora che in $[-\pi, \pi]$ l'uguaglianza $\sin\alpha = \sin\beta$ vale se e solo se $\beta = \alpha$, oppure $\alpha+\beta = \pm\pi$: dunque, in generale essa vale se e solo se $\beta = \alpha+2k\pi$ oppure $\beta = (\pi-\alpha)+2k\pi$ con k intero. Analogamente, l'uguaglianza $\cos\alpha = \cos\beta$ vale se e solo se $\beta = \alpha + 2k\pi$ oppure $\beta = -\alpha+2k\pi$ con k intero. Alcuni valori notevoli di seno e coseno sono i seguenti: $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(0) = 1$, $\sin(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\pi) = -1$; $\sin(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$; $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

Ci sono anche altre due funzioni goniometriche dell'angolo θ che sono molto usate: la *tangente* e la *cotangente*. Se $\cos\theta \neq 0$ si può definire la *tangente* di θ come $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$; reciprocamente, se $\sin\theta \neq 0$ si può definire la *cotangente* di θ come $\operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (vedi Figura 0.3). Si noti che se $|\cos\theta|$ (risp. $|\sin\theta|$) è assai piccolo, $|\operatorname{tg}\theta|$ (risp. $|\operatorname{cotg}\theta|$) diventa assai grande. Per visualizzare geometricamente $\operatorname{tg}\theta$ e $\operatorname{cotg}\theta$, si procede come segue: (a) si tracci la retta tangente alla circonferenza $\mathbb{S}^1$ nel punto $P_0 = (0, 1)$ (risp. nel punto $P_{\frac{\pi}{2}} = (1, 0)$); (b) si prolunghi la semiretta uscente dall'origine $(0, 0)$ e passante per il punto P_θ fino a secare la suddetta retta tangente; (c) il valore dell'ordinata (risp. dell'ascissa) di tale punto è uguale a $\operatorname{tg}(\theta)$ (risp. a $\operatorname{cotg}(\theta)$). Se $\theta \neq k\frac{\pi}{2}$ con k intero, vale ovviamente la relazione $\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$; vale anche $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta$, $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \operatorname{cotg}\theta$; inoltre tangente e cotangente sono grandezze periodiche di periodo π:

$$\operatorname{tg}(\theta + k\pi) = \operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{cotg}(\theta + k\pi) = \operatorname{cotg}\theta \qquad \text{per ogni numero reale } \theta \text{ ed intero } k.$$

L'uguaglianza $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ vale se e solo se $\beta = \alpha + k\pi$ con k intero, e lo stesso per $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$. Alcuni valori notevoli sono $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6}) = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4}) = 1$; $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg}(0) = 0$, mentre $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2})$ e $\operatorname{cotg}(0)$ non sono definite.

Esistono moltissime formule e relazioni riguardanti seno, coseno, tangente e cotangente: esse si dimostrano facilmente, e per ricordarle bisogna ricorrere alla memoria, ad un buon formulario o talvolta, più semplicemente, ad un disegno. Ecco le principali (si tratta, nell'ordine, di formule di *addizione/sottrazione*, *duplicazione*, *bisezione*, *prostafèresi*, *parametriche*):

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta; \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \tfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad \operatorname{tg}(2\theta) = \tfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta};$$

$$\sin(\tfrac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\theta}{2}}; \quad \cos(\tfrac{\theta}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos\theta}{2}}; \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\tfrac{\alpha+\beta}{2})\cos(\tfrac{\alpha-\beta}{2});$$

$$\sin\theta = \tfrac{2t}{1+t^2}; \quad \cos\theta = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg}\theta = \tfrac{2t}{1-t^2} \qquad (\text{ove } t = \operatorname{tg}\tfrac{\theta}{2}).$$

Abbiamo visto che, dato un angolo (cioè un numero reale) θ, l'espressione "sin" gli associa il valore del suo seno (un numero tra -1 e 1). Vorremmo avere a disposizione un'espressione inversa, che partendo da un numero tra -1 e 1 ci dia l'angolo in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ di cui esso è il seno. In termini di funzioni stiamo naturalmente parlando di *funzione inversa* del seno:

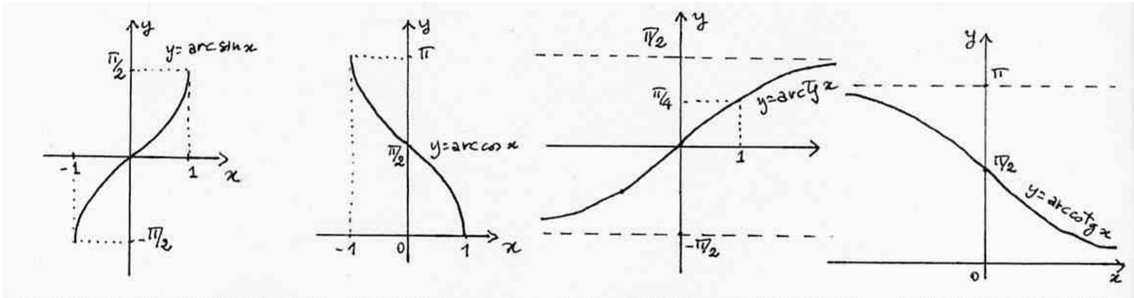

Figura 0.4: *Grafici dell'arco-seno, arco-coseno, arco-tangente e arco-cotangente*

essa si chiama *arco-seno*, e si denota con "arcsin" (vedi Figura 0.4). In modo simile si considera l'*arco-coseno* "arccos", che ad un numero reale x con $|x| \leq 1$ associa l'angolo in $[0, \pi]$ di cui esso è il coseno, e l'*arco-tangente* "arctg" (risp. l'*arco-cotangente* "arccotg") che ad un qualsiasi numero reale x associa l'angolo in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (risp. in $]0, \pi[$) di cui esso è la tangente (risp. la cotangente). Si verifica facilmente che $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ per ogni numero reale x con $|x| \leq 1$, e che $\mathrm{arctg}(x) + \mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$ per ogni x. Ad esempio, vale $\arcsin(0) = 0$, $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \mathrm{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ e $\mathrm{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Le equazioni e disequazioni goniometriche *elementari* sono del tipo $f(\theta) = a$ (oppure $<$, $>$, $\geq$, $\leq$) ove f può essere una fra sin, cos, tg o cotg e a un qualsiasi numero reale. Esse si risolvono scegliendo un periodo di risoluzione, che di solito sarà $[0, 2\pi]$ oppure $[-\pi, \pi]$ per seno e coseno, $[0.\pi]$ oppure $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per tangente e cotangente (sarà utile ragionare graficamente, disegnando o immaginandosi nella mente $\mathbb{S}^1$) e poi sommando multipli interi del periodo alle soluzioni trovate. Vediamone alcuni esempi.

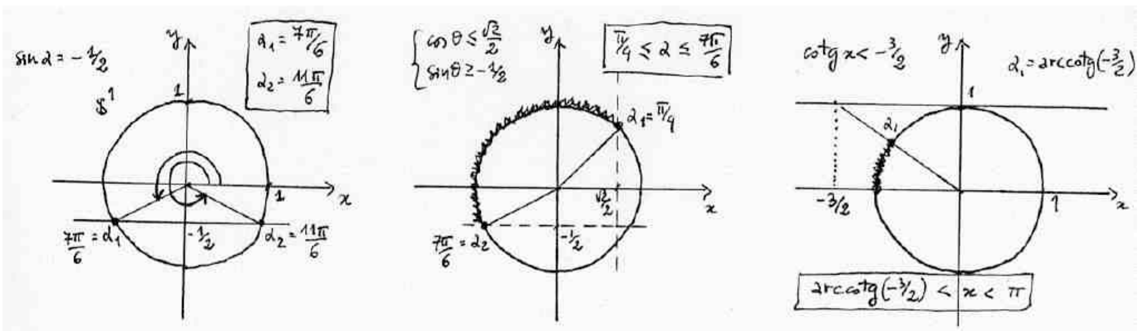

Figura 0.5: *Risoluzioni di* $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ *in* $[0, 2\pi]$*; del sistema* $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $\sin\theta \geq -\frac{1}{2}$ *in* $[0, 2\pi]$*; di* $\mathrm{cotg}\, x < -\frac{3}{2}$ *in* $[0, \pi]$.

Esercizio. *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni trigonometriche elementari.*

$$(\mathbf{1})\ \sin\theta = -\tfrac{1}{2}, \quad (\mathbf{2})\ \mathrm{cotg}\,\theta = \sqrt{2}, \quad (\mathbf{3})\ \cos\theta \leq 0, \quad (\mathbf{4})\ \mathrm{tg}\,\theta \geq 1, \quad (\mathbf{5})\ \sin\theta > \tfrac{\sqrt{3}}{4}.$$

Risoluzione. **(1)** $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, se risolta in $[-\pi,\pi]$, dà $\theta = -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$; dunque la soluzione generale è $\theta = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ per k intero. **(2)** $\operatorname{cotg}\theta = \sqrt{2}$, se risolta in $[0,\pi]$, dà $\theta = \operatorname{arccotg}(\sqrt{2})$; dunque la soluzione generale è $\theta = \operatorname{arccotg}(\sqrt{2}) + k\pi$ per k intero. **(3)** $\cos\theta \le 0$, se risolta in $[0,2\pi]$ dà $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$, dunque la soluzione generale è $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ per k intero. **(4)** $\operatorname{tg}\theta \ge 1$, se risolta in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dà $\frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{\pi}{2}$, dunque la soluzione generale è $\frac{\pi}{4} + k\pi \le \theta < \frac{\pi}{2} + k\pi$ per k intero. **(5)** $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{4}$, se risolta in $[0,2\pi]$ (ma anche in $[-\pi,\pi]$) dà $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{4}) < \theta < \pi - \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{4})$, dunque la soluzione generale è $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{4}) + 2k\pi < \theta < \pi - \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{4}) + 2k\pi$ per k intero.

Tutte le altre equazioni e disequazioni goniometriche vanno ricondotte alla risoluzione di elementari. Vediamo alcuni esempi.

Esercizio. *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni trigonometriche.*

$$(\mathbf{6}) \quad \sin x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0, \qquad (\mathbf{7}) \quad \cos x + 2\sin x + 2 = 0,$$

$$(\mathbf{8}) \quad \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} \ge 0, \qquad (\mathbf{9}) \quad \cos 2x + \cos^2(\tfrac{x}{2}) \le \tfrac{1}{2}.$$

Risoluzione. **(6)** Per la legge dell'annullamento di un prodotto dev'essere $\sin x = 0$ (che dà le soluzioni $x = k\pi$ con k intero) oppure $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$. Quest'ultima è un'equazione omogenea di grado 1 in seno e coseno: poiché $\cos x \ne 0$ (altrimenti sarebbe anche $\sin x = 0$, impossibile), si può dividere per $\cos x$ ottenendo un'altra equazione elementare $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, che ha soluzione $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ con k intero. **(7)** Si tratta di un'equazione lineare, del tipo $a\cos x + b\sin x = c$. Per risolverla, si usano le "formule parametriche" per razionalizzare: posta $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ha $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, da cui sostituendo si trova $t^2 + 4t + 3 = 0$, da cui $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1, -3$. Se $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$ si ricava $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, cioè $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; se $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -3$ si ha $\frac{x}{2} = -\operatorname{arctg}(3) + k\pi$, cioè $x = -2\operatorname{arctg}(3) + 2k\pi$ (k intero). **(8)** Risolviamo la disequazione in $[0,2\pi]$ (periodo sufficiente per tutte le funzioni che appaiono). Intanto, per l'esistenza della tangente dev'essere $x \ne \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, e per quella del denominatore dev'essere $\operatorname{tg} x \ne 1$, ovvero $x \ne \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Studiamo il segno del numeratore: usando ancora le formule parametriche, posta $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ si ha $\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1 \ge 0$ se e solo se $(\sqrt{3}-1)t^2 - 2t - (\sqrt{3}+1) \le 0$, ovvero $-1 \le \operatorname{tg}\frac{x}{2} \le 2 + \sqrt{3}$, ovvero (notando che $\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{12}$) se e solo se (per $\frac{x}{2} \in [0,\pi]$) vale $0 \le \frac{x}{2} \le \frac{5\pi}{12}$ oppure $\frac{3\pi}{4} \le \frac{x}{2} \le \pi$, ovvero se e solo se $0 \le x \le \frac{5\pi}{6}$ oppure $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$. Il denominatore è invece > 0 se e solo se $\operatorname{tg} x > 1$, ovvero $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$. Dunque il quoziente è ≥ 0 se e solo se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{5\pi}{6} \le x < \frac{5\pi}{4}$; in generale basta aggiungere $2k\pi$ agli estremi (k intero). **(9)** Dalle formule di duplicazione e bisezione si ha $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, da cui si ricava $\cos x(3\cos x + 1) \le 0$. Scegliamo $[-\pi,\pi]$ come intervallo di risoluzione, e studiamo ivi il segno dei due fattori: $\cos x \ge 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2} \le \cos x \le \frac{\pi}{2}$, mentre $3\cos x + 1 \ge 0$ se e solo se $-\arccos(-\frac{1}{3}) \le x \le \arccos(-\frac{1}{3})$ ovvero (essendo $\arccos(-t) = \pi - \arccos(t)$) se e solo se $-\pi + \arccos(\frac{1}{3}) \le x \le \pi - \arccos(\frac{1}{3})$. Pertanto in $[-\pi,\pi]$ il loro prodotto è ≤ 0 se e solo se $-\pi + \arccos(\frac{1}{3}) \le x \le -\frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi - \arccos(\frac{1}{3})$, ed in generale basta aggiungere $2k\pi$ agli estremi (k intero). (Notiamo che, essendo $\cos(-x) = \cos x$, bastava risolvere la disequazione in $[0,\pi]$ e poi aggiungere "$\pm$").

In alcuni degli esercizi appena proposti, la contemporanea presenza di seno e coseno con tangente e cotangente poteva portare ad un dubbio: quale periodo bisogna scegliere per la risoluzione? La regola generale, naturalmente, è quella di scegliere il *massimo tra i periodi delle funzioni presenti*: così, ad esempio, per risolvere $\sin x - \operatorname{tg} x = 1$, tra 2π e π si sceglierà 2π. Vale la pena di osservare anche che una funzione goniometrica composta con una lineare (ovvero del tipo $\sin(ax+b)$, con a, b numeri reali, $a > 0$) resta ancora periodica, con periodo uguale a quello originale diviso per a (infatti, ad esempio, $\sin(a(x+\frac{2\pi}{a})+b) = \sin(ax+b+2\pi) = \sin(ax+b)$ per ogni x): così $\sin(2x-1)$ ha periodo $\frac{2\pi}{2} = \pi$, e $\mathrm{cotg}(\frac{x}{3})$ ha periodo $\frac{\pi}{1/3} = 3\pi$. Inoltre, si noti che $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ hanno periodo π (infatti $\sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin x$ per ogni x): dunque, ad esempio, $\sin^2(\frac{x}{3})$ ha periodo $\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{1/3}) = 3\pi$. D'altra parte, quando possibile (ad esempio, per le equazioni elementari), il metodo più sicuro per non sbagliare è di cambiare la variabile: ad esempio, se bisogna risolvere $\sin^2(\frac{x}{3}) = \frac{1}{4}$ si potrà porre $\theta = \frac{x}{3}$, quindi risolvere l'equazione $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$ (si ricava $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$, da cui $\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ con k intero) per infine ricordarsi che $x = 3\theta$, ricavando $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6k\pi$ con k intero.

Ricordiamo infine che le funzioni goniometriche sono indispensabili nella *risoluzione dei triangoli*: è anzi proprio per questo che l'argomento è tradizionalmente denominato "trigonometria". In un qualsiasi triangolo di area S con lati a, b, c opposti ad angoli α, β, γ valgono infatti le relazioni $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S}$ (*teorema del seno*) e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (*teorema del coseno*, o *di Carnot*); dunque, se il triangolo è rettangolo (diciamo, in $\gamma = \frac{\pi}{2}$) si ottiene $a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{cotg}\,\beta$, ed il teorema di Pitagora $c^2 = a^2 + b^2$.

Luoghi geometrici nel piano cartesiano; rette e coniche Di solito, per descrivere un sottoinsieme A del piano cartesiano si enuncia la (o le) proprietà che un punto deve soddisfare per stare dentro A: si usa parlare allora di *luogo geometrico*. Ad esempio, si parla di "luogo geometrico dei punti la cui ascissa è < 0 " (individuando così tutti e soli i punti del semipiano alla sinistra dell'asse y, quest'ultimo escluso), oppure, fissati un punto C di coordinate (x_0, y_0) ed un numero reale $r > 0$ si parla di "luogo geometrico dei punti che distano r da C" (individuando così tutti e soli i punti della circonferenza di centro C e raggio r).

Il modo più diretto di descrivere le proprietà di un luogo geometrico A nel piano cartesiano è perciò senz'altro quello di esibirle come una famiglia di *equazioni* e *disequazioni* cui le coordinate x e y di un punto $P(x, y)$ del piano devono soddisfare affinché P stia in A: in questa maniera, A sarà uguale all'insieme delle soluzioni del *sistema* in due variabili (x, y) fatto da equazioni del tipo $f(x, y) = 0$ (o disequazioni, se al posto di "=" si ha $<$, $>$, $\leq$, $\geq$). Tornando ai nostri esempi di qui sopra, cercare il "luogo geometrico dei punti del piano che distano r da $C(x_0, y_0)$ e la cui ascissa è negativa" equivale a cercare le soluzioni del sistema $\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \\ x < 0 \end{cases}$.

Quali tipi di luoghi geometrici dovremmo essere in grado di riconoscere finora? Senza dubbio, almeno due: (1) tutti quelli in cui la funzione $f(x, y)$ è *lineare* o *di primo grado*, ovvero del tipo $f(x, y) = ax + by + c$ per opportuni numeri reali a, b, c con almeno uno tra a e b non nullo; (2) alcuni di quelli in cui la funzione $f(x, y)$ è *quadratica* o *di secondo grado*, ovvero del tipo $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ per opportuni numeri reali a, b, c, d, e, f con almeno uno tra a, b e c non nullo. Sappiamo che il luogo definito da $f(x, y) = 0$ nel caso (1) è una *retta*, nel caso (2) una *conica*, ovvero, ciò che si trova secando un cono nello spazio con piani messi in varie maniere (come noto, le coniche si

classificano in *ellissi* (in particolare, le *circonferenze*), *parabole* ed *iperboli*), e che viceversa tutte le rette e coniche sono definibili in questo modo. Tra le coniche, per la precisione, guardando l'equazione quadratica $f(x,y) = ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f = 0$ noi sappiamo riconoscere solo le parabole con asse parallelo all'asse y (in cui $b = c = 0$ e $e \neq 0$) o all'asse x (in cui $a = c = 0$ e $d \neq 0$), le circonferenze (in cui $a = b$, $c = 0$ e $4af < d^2 + e^2$), le ellissi con centro l'origine e gli assi x e y come assi di simmetria (in cui $ab > 0$, $af < 0$ e $c = d = e = 0$) le iperboli con centro l'origine e gli assi x e y come assi di simmetria (in cui $ab < 0$, $af > 0$ e $c = d = e = 0$) e le iperboli equilatere (in cui $a = b = d = e = 0$).
Nei due casi appena visti (rette e coniche, ovvero f polinomio di grado al più 2 in x e y), se anziché avere un'equazione $f(x,y) = 0$ si ha una disequazione (ad esempio $f(x,y) > 0$) che luogo si troverà (vedi Figura 0.6(i))? Ebbene: ogni retta, ed ogni conica diversa dall'iperbole, dividono il piano in due regioni distinte, in ogni punto di una delle quali vale $f(x,y) > 0$ e nell'altra $f(x,y) < 0$. Per l'iperbole, invece, il piano viene diviso in tre regioni, una "esterna" e due "interne" alle falde: ebbene, nei punti di quella "esterna" varrà una delle due disequazioni, in quelli delle due "interne" la disequazione opposta. Per esempio, la disequazione $x + 2y + 1 < 0$ descrive il semipiano sotto la retta $y = -\frac{x-1}{2}$ (esclusa); $x^2 - y \geq 0$ è la parte di piano sotto la parabola $y = x^2$ (compresa); $xy + 4 < 0$ descrive i punti delle due parti interne all'iperbole equilatera $xy = -4$ (esclusa).

Si richiede allo studente una discreta familiarità con gli strumenti della Geometria Analitica nel piano cartesiano, ed in particolare con ciò che riguarda i luoghi geometrici più semplici che abbiamo appena ricordato, ovvero rette e coniche: ad esempio, si dovrebbe non avere particolari difficoltà nel risolvere un esercizio come questo.

Esercizio. **(1)** *Trovare l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per $A(2,0)$ e con vertice in $B(1,-1)$.*
(2) *Determinare la retta r del fascio proprio centrato in A tale che, detto C l'altro punto di intersezione di r con $\mathcal{P}$, il segmento AC abbia lunghezza $3\sqrt{2}$ e C abbia ascissa negativa; determinare l'equazione della retta tangente a $\mathcal{P}$ in C.*
(3) *Calcolare l'area del triangolo ABC e l'equazione della circonferenza circoscritta.*
(4) *Si determini l'equazione dell'iperbole con centro $O(0,0)$ ed assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati, passante per B ed avente come asintoto la perpendicolare per O a BC.*

Risoluzione. **(1)** Se $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ è l'equazione cercata, il vertice ha coordinate $(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$ (ove $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$), da cui le condizioni $\beta = -2\alpha$ e $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\alpha$; infine, il passaggio per A dà la condizione $0 = 4\alpha + 2\beta + \gamma$. Risolvendo il sistema così ottenuto, si trova $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 0$. **(2)** Poiché si richiede che r intersechi $\mathcal{P}$ in un altro punto diverso da A, essa non sarà verticale, e dunque avrà la forma $y - y_A = m(x - x_A)$, cioè $y = m(x - 2)$. Intersecando r e $\mathcal{P}$ si ottiene dunque $m(x - 2) = x^2 - 2x$, ovvero $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$: una delle cui due soluzione è ovviamente $x = 2$ (che dà A), e l'altra risulta $x = m$, che dà il punto $C(m, m(m - 2))$. Poiché si richiede che C abbia ascissa negativa, dovrà essere $m < 0$. La lunghezza di AC è $(m - 2)^2\sqrt{m^2 + 1}$, e dalla condizione che essa sia $3\sqrt{2}$ si ottiene un'equazione di quarto grado (ovvio: si tratta di intersecare $\mathcal{P}$ con la circonferenza di centro A e raggio $3\sqrt{2}$) che, come si vede facilmente, ammette $m = -1$ come soluzione. Dal disegno si capisce subito che non ci potranno essere altre soluzioni con ascissa negativa, dunque il punto cercato è $C(-1,3)$. Il fascio di rette proprio passante per C è $y - 3 = m(x + 1)$, ovvero $y = mx + m + 3$; intersecando con $\mathcal{P}$ si ottiene $x^2 - (m - 2)x - m - 3 = 0$, e richiedendo che vi sia la sola soluzione doppia (che sarà $x = -1$) si ricava

$(m-2)^2+4(m+3)=0$, ovvero $m=-4$. La retta tangente a $\mathcal{P}$ in C è dunque $y=-4x-1$. **(3)** Come visto, la retta AC ha equazione $y=-x+2$. La distanza di B da tale retta è data dalla formula $\frac{|y_B-(-x_B+2)|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\sqrt{2}$, da cui l'area del triangolo è $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2=3$; la circonferenza circoscritta al triangolo ABC sarà semplicemente quella che passa per A, B, C: imponendo tali condizioni all'equazione generica $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ e considerando il sistema che ne deriva, si ottiene $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,-2,-4)$. (Si noti che il triangolo ABC è chiaramente rettangolo in A, dunque la circonferenza circoscritta deve avere l'ipotenusa BC come diametro: infatti, il suo centro $(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2})=(0,1)$ sta sulla retta BC, che ha equazione $\frac{y-y_C}{y_B-y_C}=\frac{x-x_C}{x_B-x_C}$ ovvero $y=-2x+1$, ed il suo raggio è $\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\gamma}=\sqrt{5}=\frac{1}{2}BC$.) **(4)** L'iperbole cercata avrà equazione $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ oppure $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=-1$ (per opportuni $\alpha,\beta>0$), con asintoti $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}x$. La perpendicolare per O alla retta BC ha equazione $y=mx$ con $m=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$, dunque è la retta $y=\frac{1}{2}x$: ne ricaviamo la condizione $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{2}$, ovvero $\alpha=2\beta$, e questo ci dice che l'equazione avrà la forma $x^2-4y^2=4\beta^2>0$ oppure $x^2-4y^2=-4\beta^2<0$. Per decidere quale delle due forme funziona in questo caso, basta imporre il passaggio per B: infatti $x_B^2-4y_B^2=-3<0$, dunque la forma corretta è la seconda: si avrà $-3=-4\beta^2$, da cui $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha=2\beta=\sqrt{3}$. L'iperbole avrà dunque equazione $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3/4}=-1$, ovvero $x^2-4y^2+3=0$.

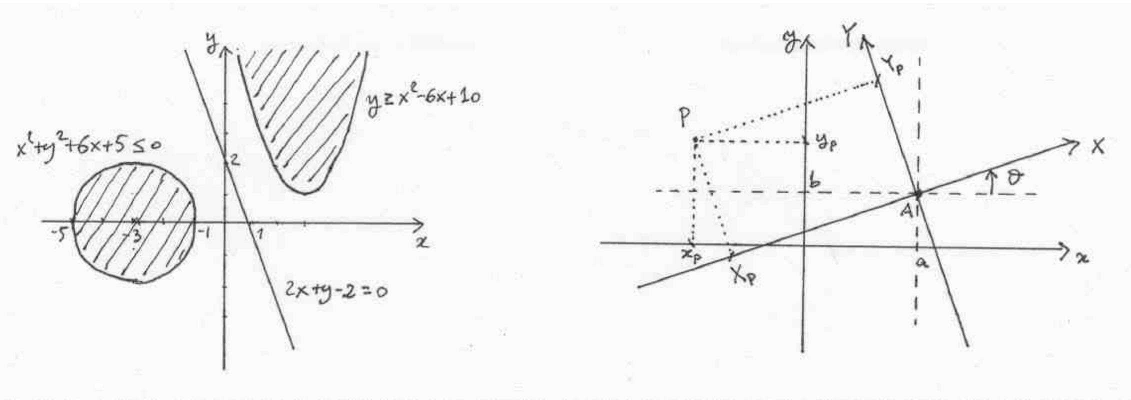

Figura 0.6: *Esempi di luoghi geometrici nel piano; rototraslazione del sistema di riferimento*

Cambi di coordinate cartesiane. Può essere utile anche ricordare la *formula del cambiamento di coordinate* per *rototraslazioni* del sistema di riferimento (vedi Figura 0.6(ii)). Se si considera nel piano cartesiano di coordinate (x,y) una coppia di rette ortogonali intersecantisi nel punto (a,b), vedendo questa coppia come un nuovo riferimento cartesiano (X,Y) in cui l'asse X sia ottenuto ruotando l'asse x di un angolo $\theta\in[0,2\pi[$ in verso positivo (antiorario) e in cui si mantenga la medesima unità di misura, le coordinate (X,Y) e (x,y) di un punto del piano sono legate tra loro dalla relazioni inverse

$$\begin{cases} X=\ \ (x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta \\ Y=-(x-a)\sin\theta+(y-b)\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta+a \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta+b. \end{cases}$$

Se $\theta=0$ abbiamo semplicemente una *traslazione*, se $a=b=0$ una *rotazione*. Dunque un luogo di punti del piano espresso ad esempio dall'equazione $f(x,y)=0$ nelle coordinate (x,y) sarà espresso, nelle coordinate (X,Y), dall'equazione

$$F(X,Y)=f((X+a)\cos\theta-(Y+b)\sin\theta,(X+a)\sin\theta+(Y+b)\cos\theta)=0.$$

Esempi. (1) Si consideri la retta $y=mx+q$, ovvero $f(x,y)=mx-y+q=0$. Se $X=x$ e $Y=y-q$, cioè

$x = X$ e $y = Y+q$, (ovvero, il sistema (X, Y) è ottenuto traslando verticalmente di q il sistema (x, y)), la sua equazione diventa $F(X, Y) = f(X, Y+q) = mX-(Y+q)+q = mX-Y = 0$, ovvero $Y = mX$, com'era ovvio attendersi. Analogamente, si consideri la parabola $y = ax^2 + bx + c$, ovvero $f(x, y) = ax^2 + bx + c - y = 0$. Se $X = x - (-\frac{b}{2a})$ e $Y = y - (-\frac{b^2-4ac}{4a})$, ovvero $x = X - \frac{b}{2a}$ e $y = Y - \frac{b^2-4ac}{4a}$, l'equazione diventa $F(X, Y) = f(X - \frac{b}{2a}, Y - \frac{b^2-4ac}{4a}) = a(X - \frac{b}{2a})^2 + b(X - \frac{b}{2a}) + c - (Y - \frac{b^2-4ac}{4a}) = aX^2$, risultato anche qui atteso perché abbiamo traslato il riferimento cartesiano portandone l'origine nel vertice della parabola. **(2)** Ruotiamo il riferimento cartesiano (x, y) dell'angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$, ottenendo dunque $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ e $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$, ovvero $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$. L'equazione dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = -1$ diventa allora $(\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y))^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y))^2 = -1$, ovvero $XY = \frac{1}{2}$, che come atteso rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri assi. **(3)** Come visto, la circonferenza di centro (a, b) e raggio $r > 0$ ha equazione $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$. Considerando la rototraslazione generale su descritta, l'equazione diventa $\big(X\cos\theta - Y\sin\theta + a\big)^2 + \big(X\sin\theta + Y\cos\theta + b\big)^2 - 2a\big(X\cos\theta - Y\sin\theta + a\big) - 2b\big(X\sin\theta + Y\cos\theta + b\big) + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$, ovvero (a conti fatti) $X^2 + Y^2 - r^2 = 0$, come atteso (si noti che, ovviamente, l'equazione non dipende da θ).