Matematica – Prima prova parziale

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

martedì 9 dicembre 2008

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Tema A

(1) Descrivere il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{R} : e^{x^2-2x} < 2\} \cup \{3 + 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ della retta reale $\mathbb{R}$; dire se è sup./inf. limitato, calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i suoi punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$; dire di quali punti A è intorno.

(2) (a) Dati nel piano cartesiano i vettori $\vec{v} = (1, -4)$ e $\vec{w} = (2, 1)$, calcolare quanto valgono l'angolo convesso e l'area del parallelogramma tra essi compresi. Esprimere poi in forma parametrica e cartesiana la retta r passante per $A(1, -1)$ ortogonale a $\vec{w}$.

(b) Descrivere in forma parametrica e cartesiana, nello spazio cartesiano tridimensionale, il piano Π passante per $P(2, 0, -1)$ e ortogonale al vettore $\vec{u} = (1, 3, -2)$, e la retta r passante per $Q(0, 2, 3)$ e ortogonale ai vettori $\vec{a} = (1, 0, -1)$ e $\vec{b} = (2, 1, 1)$.

(3) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 4}$.

(a) Trovare dominio, zeri, segno, limiti interessanti di g; calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-\sqrt{3}}{x^\alpha}$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

(b) Dire se g è iniettiva e/o suriettiva, esprimendo ove possibile la funzione inversa. Dopo aver poi terminato lo studio di g e averne tracciato il grafico, illustrare i risultati precedenti.

(4) (a) Studiare l'andamento di $f(x) = |x| - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}$, e tracciarne il grafico.[1]

(b) Data la parabola ℓ con asse orizzontale, vertice in $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ e passante per l'origine, trovarne il punto per il quale la somma delle distanze dalle rette $x = -2$ e $x + y = 3$ è minima.[2]

[1] Per studiare zeri e segno converrà porre $x = \frac{1}{t}$, poi fare un confronto grafico in variabile t e infine risostituire $t = \frac{1}{x}$.

[2] Si ricorda che la distanza di un punto (x_0, y_0) da una retta $ax + by + c = 0$ è data da $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Soluzioni.

(1) L'insieme A si ottiene unendo i due sottoinsiemi $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : e^{x^2-2x} < 2\}$ e $A_2 = \{3 + 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Iniziamo da A_1: la disequazione $e^{x^2-2x} < 2$ equivale a $x^2 - 2x < \log 2$, cioè $x^2 - 2x - \log 2 < 0$; le radici sono $x_1 := 1 - \sqrt{1 + \log 2} \sim -0{,}3$ e $x_2 := 1 + \sqrt{1 + \log 2} \sim 2{,}3$, dunque si ottiene $x_1 < x < x_2$, ovvero l'intervallo $]x_1,\, x_2[$. Esaminiamo ora l'insieme A_2: per $n < 0$ (cioè $n = -1, -2, -3, \ldots$) si ottiene una famiglia decrescente di punti $3 + \frac{1}{3} > 3 + \frac{1}{9} > 3 + \frac{1}{27} > \cdots$ che tendono a 3 da sopra, senza mai raggiungerlo; per $n = 0$ si ha il punto 4; per $n > 0$ (cioè $n = 1, 2, 3, \ldots$) si ha un insieme crescente di punti $3 + 3 < 3 + 9 < 3 + 27 < \cdots$ che tendono a $+\infty$. Pertanto l'insieme è limitato solo inferiormente, con $\inf A = x_1$; i punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono quelli di $[x_1,\, x_2]$, e anche 3 e $+\infty$ (tutti i punti del tipo $3 + 3^n$ sono isolati), ed è intorno dei soli punti di A_1.

(2) (a) L'angolo convesso $\theta \in]0, \pi[$ tra i vettori $\vec{v} = (1, -4)$ e $\vec{w} = (2, 1)$ soddisfa $\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = -\frac{2}{\sqrt{85}}$, dunque $\theta = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{85}})$ (si tratta di un angolo ottuso, di poco superiore a $\frac{\pi}{2}$). Quanto al parallelogrammo compreso tra essi, l'area è $|\vec{v}|\,|\vec{w}| \sin\theta = \sqrt{17}\sqrt{5}\sqrt{1 - \frac{4}{85}} = 9$ (è il modulo del prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\vec{w}$, visti come vettori del piano orizzontale). Un vettore ortogonale a $\vec{w}$ è $(1, -2)$, dunque una forma parametrica della retta r è $\{(1, -1) + t(1, -2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + t, -1 - 2t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $(x, y) = (1 + t, -1 - 2t)$ si ricava la forma cartesiana $2x + y - 1 = 0$.

(b) Il piano Π, ortogonale al vettore $\vec{u} = (1, 3, -2)$, ha equazione cartesiana del tipo $x + 3y - 2z + k = 0$, e il passaggio per $P(2, 0, -1)$ dà $k = -4$, dunque $x+3y-2z-4 = 0$; due vettori ortogonali a $\vec{u}$ e non paralleli tra loro sono ad esempio $(0, 2, 3)$ e $(2, 0, 1)$, dunque una forma parametrica è $\Pi = \{(2, 0, -1) + s(0, 2, 3) + t(2, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(2 + 2t, 2s, -1 + 3s + t) : s, t \in \mathbb{R}\}$. Un vettore (α, β, γ) ortogonale sia a $\vec{a} = (1, 0, -1)$ che a $\vec{b} = (2, 1, 1)$ deve soddisfare $\alpha - \gamma = 0$ e $2\alpha + \beta + \gamma = 0$, dunque si deve avere $\gamma = \alpha$ e $\beta = -3\alpha$: si tratta dei vettori (tutti paralleli tra loro) del tipo $\alpha(1, -3, 1)$ per un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$. Scegliendo ad esempio $\alpha = 1$, una forma parametrica della retta cercata è $\{(0, 2, 3) + t(1, -3, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2 - 3t, 3 + t) : t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $x = t$ nelle altre due equazioni $y = 2 - 3t$ e $z = 3 + t$ si ottiene la forma cartesiana data dal sistema $3x + y - 2 = 0$ e $x - z + 3 = 0$.

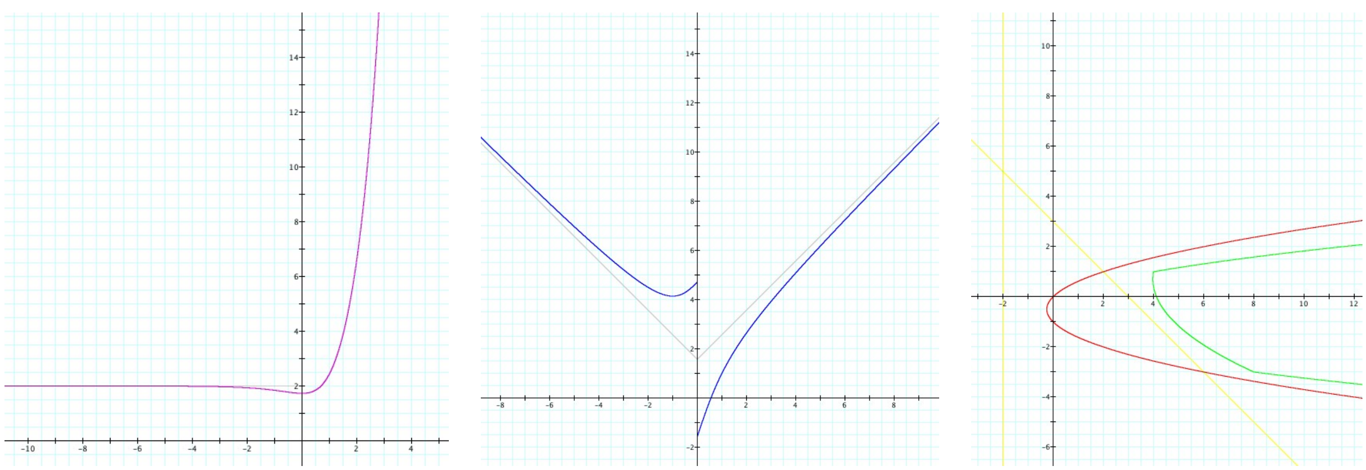
(3) (a) (Figura 1) Notando che il trinomio $t^2 - 2t + 4$ ha discriminante negativo, il radicando è sempre > 0: dunque il dominio di $g(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, e in esso g è strettamente positiva. Poiché g è di classe $\mathcal{C}^\infty$, gli unici limiti interessanti sono in $-\infty$ e $+\infty$, e valgono rispettivamente 2^- e $+\infty$ (il primo è determinato, per il secondo basta raccogliere e^{2x} dentro la radice). Quanto al limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-\sqrt{3}}{x^\alpha}$, notiamo che il numeratore è infinitesimo: dunque se $\alpha \leq 0$, visto che il denominatore non lo è, il limite vale 0. Invece nel caso $\alpha > 0$ siamo in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e la cosa più semplice è ricorrere a de l'Hôpital, ottenendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+4}}}{\alpha x^{\alpha-1}}$; il numeratore è nuovamente infinitesimo, dunque se $\alpha - 1 \leq 0$ (cioè se $\alpha \leq 1$) il limite vale ancora 0, mentre nel caso $\alpha > 1$ restiamo in forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Poiché $\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 4}$ tende a $\sqrt{3}$ possiamo occuparci del limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}$, che con de l'Hôpital diventa $\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x}-e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$: ora il numeratore tende a 1, mentre il denominatore tende a $+\infty$ se $\alpha < 2$, a 2 se $\alpha = 2$ e a 0^+ se $\alpha > 2$. Ne deduciamo che il nostro limite vale 0 per $\alpha < 2$, vale $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ per $\alpha = 2$ e vale $+\infty$ per $\alpha > 2$.

(b) (Figura 1) Poiché g è sempre positiva, di certo non è suriettiva. Supposto poi che $g(x_1) = g(x_2)$ si ha $\sqrt{e^{2x_1} - 2e^{x_1} + 4} = \sqrt{e^{2x_2} - 2e^{x_2} + 4}$, ovvero $e^{2x_1} - 2e^{x_1} + 4 = e^{2x_2} - 2e^{x_2} + 4$, ovvero $e^{2x_1} - e^{2x_2} = 2(e^{x_1} - e^{x_2})$, ovvero $(e^{x_1} + e^{x_2})(e^{x_1} - e^{x_2}) = 2(e^{x_1} - e^{x_2})$, ovvero $(e^{x_1} + e^{x_2} - 2)(e^{x_1} - e^{x_2}) = 0$: pertanto si ha $g(x_1) = g(x_2)$ quando $e^{x_1} - e^{x_2} = 0$ (cioè quando $x_1 = x_2$) ma anche quando $e^{x_1} + e^{x_2} = 2$, il che accade per esempio quando $x_1 = \log\frac{1}{2} = -\log 2 \sim -0{,}7$ e $x_2 = \log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \sim 0{,}4$. Dunque g non è nemmeno iniettiva. Il calcolo di un'inversa per g ci guiderà su come restringere e corestringere in modo opportuno affinché g diventi biiettiva. Da $g(x) = y$ dovrà essere $y \geq 0$: si ricava $e^{2x} - 2e^x + 4 - y^2 = 0$, da cui $e^x = 1 \mp \sqrt{y^2 - 3}$ (che implica $y \geq \sqrt{3}$), da cui $x_1(y) = \log(1 + \sqrt{y^2 - 3})$ (sempre esistente per ogni $y \geq \sqrt{3}$) e $x_2(y) = \log(1 - \sqrt{y^2 - 3})$ (esistente solo quando $1 - \sqrt{y^2 - 3} > 0$, ovvero solo quando $\sqrt{3} \leq y < 2$). Dunque, notando che $x_2(y) \leq 0 \leq x_1(y)$, si può invertire g dopo averla resa biiettiva restringendone il dominio a $[0, +\infty[$ e il codominio a $[\sqrt{3}, +\infty[$, con inversa $x_1(y)$. • Per terminare lo studio di g non ci resta che derivarla ottenendo $g'(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+4}}$, che si annulla in $x = 0$ ed è positiva per $x < 0$: dunque, quando x proviene da$-\infty$, $g(x)$ decresce dal valore asintotico 2^- al valore minimo $g(0) = \sqrt{3}$, per poi crescere fino a $+\infty$. Questo conferma quanto trovato in precedenza.

(4) (a) (Figura 2) La funzione $f(x) = |x| - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}$ ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, non è pari ne' periodica, ed è $\mathcal{C}^\infty$ nel suo dominio. Per gli zeri e il segno, come suggerito poniamo $x = \frac{1}{t}$, ottenendo che $f(x) \geq 0$ quando $\frac{\pi|t|+2}{4|t|} \geq \operatorname{arctg} t$ (al primo membro c'è un'omografica resa pari), il che accade quando $t < 0$ oppure quando

$0 < t < a$ per un certo $a \in]1,2[$; risostituendo $t = \frac{1}{x}$ si ottiene che $f(x) > 0$ quando $x < 0$ oppure quando $x > \frac{1}{a}$ (con $\frac{1}{a} \in]0,1[$). I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{3\pi}{2}$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Si vede facilmente che a $\pm\infty$ vi è un asintoto obliquo $y = \pm x + \frac{\pi}{2}$ (dunque diverso da una parte e dall'altra), e che con questi asintoti non vi sono intersezioni risp. per $x \gtrless 0$. Derivando si ha $g'(x) = \operatorname{sign} x - 2\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \operatorname{sign} x + \frac{2}{x^2+1}$: dunque se $x > 0$ si ha sempre $g'(x) > 0$ (dunque $g(x)$ è strettamente crescente), mentre se $x < 0$ si ha $g'(x) = -1 + \frac{2}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{x^2+1}$, dunque è ≥ 0 per $-1 \leq x < 0$ (ovvero f decresce fino al minimo locale $g(-1) = 1 + \pi \sim 4{,}1$ e poi cresce fino al valore limite $\frac{3\pi}{2} \sim 4{,}7$). Si noti anche che la pendenza in arrivo e partenza da $x = 0$ sono risp. $g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} g'(x) = 1$ e $g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 3$. Derivando ulteriomente si ottiene $g''(x) = -\frac{4x}{x^2+1}$, dunque g è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$.

(b) (Figura 3) La parabola ℓ ha equazione $x = y^2 + y$, dunque il suo punto generico ha forma $P(y) = (y^2 + y, y)$. La somma delle distanze di $P(y)$ dalle rette $x = -2$ e $x + y = 3$ è $d(y) = |(y^2 + y) + 2| + \frac{|(y^2+y)+y-3|}{\sqrt{2}} = y^2 + y + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}|y^2 + 2y - 3|$. Derivando per $y \neq -3$ e $y \neq 1$ si ottiene $d'(y) = 2y + 1 + \sigma\sqrt{2}(y + 1)$ (ove $\sigma := \operatorname{sign}(y^2 + 2y - 3)$). Se $\sigma = 1$ (cioè se $y < -3$ oppure $y > 1$) si ha $d'(y) = (2 + \sqrt{2})y + (\sqrt{2} + 1)$, dunque $d'(y) = 0$ quando $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (non accettabile), e $d'(y) > 0$ per $y > 1$. Se invece $\sigma = -1$ (cioè se $-3 < y < 1$) si ha $d'(y) = (2 - \sqrt{2})y - (\sqrt{2} - 1)$, dunque $d'(y) = 0$ quando $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (accettabile) e $d'(y) > 0$ per $\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1$. Pertanto, pensando a y che sale da $-\infty$, $d(y)$ decresce prima e dopo di $y = -3$ e fino al minimo assoluto $d(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{7\sqrt{2}+6}{4}$ (un numero leggerissimamente inferiore a 4), poi cresce fino e oltre $y = 1$. Il punto cercato è dunque $P(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.



(1) Grafico di $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 4}$ dell'esercizio 3; **(2)** Grafico di $f(x) = |x| - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}$ dell'esercizio (4.a); **(3)** Parabola (rosso) e rette (azzurre) dell'esercizio (4.b); in verde il grafico della funzione $d(y)$.

Matematica – Prima prova parziale

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

martedì 9 dicembre 2008

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ______________

Tema B

(1) Descrivere il sottoinsieme $B = \{2 + 3^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : e^{x^2+2x} < 2\}$ della retta reale $\mathbb{R}$; dire se è sup./inf. limitato, calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i suoi punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$; dire di quali punti A è intorno.

(2) (a) Dati nel piano cartesiano i vettori $\vec{v} = (2, 1)$ e $\vec{w} = (1, -4)$, calcolare quanto valgono l'angolo convesso e l'area del parallelogramma tra essi compresi. Esprimere poi in forma parametrica e cartesiana la retta r passante per $A(1, -1)$ ortogonale a $\vec{v}$.

(b) Descrivere in forma parametrica e cartesiana, nello spazio cartesiano tridimensionale, la retta r passante per $Q(0, 2, 3)$ e ortogonale ai vettori $\vec{a} = (1, 0, -1)$ e $\vec{b} = (2, 1, 1)$ e il piano Π passante per $P(2, 0, -1)$ e ortogonale al vettore $\vec{u} = (1, 3, -2)$, e .

(3) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 9}$.

(a) Trovare dominio, zeri, segno, limiti interessanti di g; calcolare $\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-2\sqrt{2}}{x^\alpha}$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

(b) Dire se g è iniettiva e/o suriettiva, esprimendo ove possibile la funzione inversa. Dopo aver poi terminato lo studio di g e averne tracciato il grafico, illustrare i risultati precedenti.

(4) (a) Studiare l'andamento di $f(x) = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + |x| + \frac{\pi}{2}$, e tracciarne il grafico.[3]

(b) Data la parabola ℓ con asse orizzontale, passante per $(0, -1)$ e con vertice in $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$, trovarne il punto per il quale la somma delle distanze dalle rette $y = -x + 3$ e $x + 2 = 0$ è minima.[4]

[3] Per studiare zeri e segno converrà porre $x = \frac{1}{t}$, poi fare un confronto grafico in variabile t e infine risostituire $t = \frac{1}{x}$.

[4] Si ricorda che la distanza di un punto (x_0, y_0) da una retta $ax + by + c = 0$ è data da $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Soluzioni.

(1) L'insieme B si ottiene unendo i due sottoinsiemi $B_1 = \{2+3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ e $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : e^{x^2+2x} < 2\}$. Iniziamo da B_1: per $n < 0$ (cioè $n = -1, -2, -3, \dots$) si ottiene una famiglia decrescente di punti $2+\frac{1}{3} > 2+\frac{1}{9} > 2+\frac{1}{27} > \cdots$ che tendono a 2 da sopra, senza mai raggiungerlo; per $n = 0$ si ha il punto 3; per $n > 0$ (cioè $n = 1, 2, 3, \dots$) si ha un insieme crescente di punti $2+3 < 2+9 < 2+27 < \cdots$ che tendono a $+\infty$. Esaminiamo ora l'insieme B_2: la disequazione $e^{x^2+2x} < 2$ equivale a $x^2+2x < \log 2$, cioè $x^2+2x-\log 2 < 0$; le radici sono $x_1 := -1-\sqrt{1+\log 2} \sim -2{,}3$ e $x_2 := -1+\sqrt{1+\log 2} \sim 0{,}3$, dunque si ottiene $x_1 < x < x_2$, ovvero l'intervallo $]x_1, x_2[$. Pertanto l'insieme è limitato solo inferiormente, con $\inf A = x_1$; i punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono quelli di $[x_1, x_2]$, e anche 2 e $+\infty$ (tutti i punti del tipo $2+3^n$ sono isolati), ed è intorno dei soli punti di B_2.

(2) (a) L'angolo convesso $\theta \in]0, \pi[$ tra i vettori $\vec{v} = (2, 1)$ e $\vec{w} = (1, -4)$ soddisfa $\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = -\frac{2}{\sqrt{85}}$, dunque $\theta = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{85}})$ (si tratta di un angolo ottuso, di poco superiore a $\frac{\pi}{2}$). Quanto al parallelogramma compreso tra essi, l'area è $|\vec{v}|\,|\vec{w}|\sin\theta = \sqrt{17}\sqrt{5}\sqrt{1-\frac{4}{85}} = 9$ (è il modulo del prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\vec{w}$, visti come vettori del piano orizzontale). Un vettore ortogonale a $\vec{v}$ è $(1, -2)$, dunque una forma parametrica della retta r è $\{(1, -1) + t(1, -2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, -1-2t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $(x, y) = (1+t, -1-2t)$ si ricava la forma cartesiana $2x+y-1 = 0$.

(b) Un vettore (α, β, γ) ortogonale sia a $\vec{a} = (1, 0, -1)$ che a $\vec{b} = (2, 1, 1)$ deve soddisfare $\alpha-\gamma = 0$ e $2\alpha+\beta+\gamma = 0$, dunque si deve avere $\gamma = \alpha$ e $\beta = -3\alpha$: si tratta dei vettori (tutti paralleli tra loro) del tipo $\alpha(1, -3, 1)$ per un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$. Scegliendo ad esempio $\alpha = 1$, una forma parametrica della retta cercata è $\{(0, 2, 3) + t(1, -3, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2-3t, 3+t) : t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $x = t$ nelle altre due equazioni $y = 2-3t$ e $z = 3+t$ si ottiene la forma cartesiana data dal sistema $3x+y-2 = 0$ e $x-z+3 = 0$. Il piano Π, ortogonale al vettore $\vec{u} = (1, 3, -2)$, ha equazione cartesiana del tipo $x+3y-2z+k = 0$, e il passaggio per $P(2, 0, -1)$ dà $k = -4$, dunque $x+3y-2z-4 = 0$; due vettori ortogonali a $\vec{u}$ e non paralleli tra loro sono ad esempio $(0, 2, 3)$ e $(2, 0, 1)$, dunque una forma parametrica è $\Pi = \{(2, 0, -1) + s(0, 2, 3) + t(2, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(2+2t, 2s, -1+3s+t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

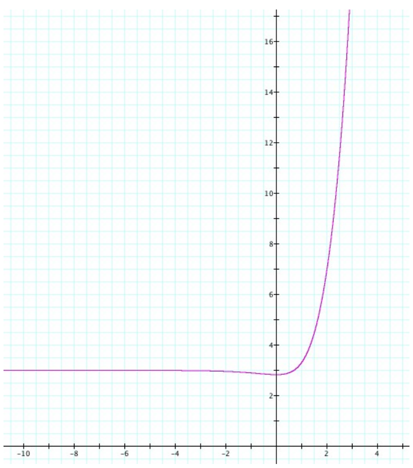
(3) (a) (Figura 1) Notando che il trinomio t^2-2t+9 ha discriminante negativo, il radicando è sempre > 0: dunque il dominio di $g(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, e in esso g è strettamente positiva. Poiché g è di classe $\mathcal{C}^\infty$, gli unici limiti interessanti sono in $-\infty$ e $+\infty$, e valgono rispettivamente 3^- e $+\infty$ (il primo è determinato, per il secondo basta raccogliere e^{2x} dentro la radice). Quanto al limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-2\sqrt{2}}{x^\alpha}$, notiamo che il numeratore è infinitesimo: dunque se $\alpha \le 0$, visto che il denominatore non lo è, il limite vale 0. Invece nel caso $\alpha > 0$ siamo in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e la cosa più semplice è ricorrere a de l'Hôpital, ottenendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+9}}}{\alpha x^{\alpha-1}}$; il numeratore è nuovamente infinitesimo, dunque se $\alpha-1 \le 0$ (cioè se $\alpha \le 1$) il limite vale ancora 0, mentre nel caso $\alpha > 1$ restiamo in forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Poiché $\sqrt{e^{2x}-2e^x+9}$ tende a $2\sqrt{2}$ possiamo occuparci del limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}$, che con de l'Hôpital diventa $\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x}-e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$: ora il numeratore tende a 1, mentre il denominatore tende a $+\infty$ se $\alpha < 2$, a 2 se $\alpha = 2$ e a 0^+ se $\alpha > 2$. Ne deduciamo che il nostro limite vale 0 per $\alpha < 2$, vale $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ per $\alpha = 2$ e vale $+\infty$ per $\alpha > 2$.

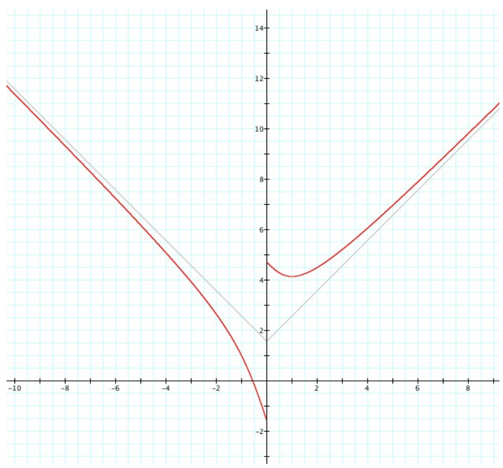
(b) (Figura 1) Poiché g è sempre positiva, di certo non è suriettiva. Supposto poi che $g(x_1) = g(x_2)$ si ha $\sqrt{e^{2x_1}-2e^{x_1}+9} = \sqrt{e^{2x_2}-2e^{x_2}+9}$, ovvero $e^{2x_1}-2e^{x_1}+9 = e^{2x_2}-2e^{x_2}+9$, ovvero $e^{2x_1}-e^{2x_2} = 2(e^{x_1}-e^{x_2})$, ovvero $(e^{x_1}+e^{x_2})(e^{x_1}-e^{x_2}) = 2(e^{x_1}-e^{x_2})$, ovvero $(e^{x_1}+e^{x_2}-2)(e^{x_1}-e^{x_2}) = 0$: pertanto si ha $g(x_1) = g(x_2)$ quando $e^{x_1}-e^{x_2} = 0$ (cioè quando $x_1 = x_2$) ma anche quando $e^{x_1}+e^{x_2} = 2$, il che accade per esempio quando $x_1 = \log\frac{1}{2} = -\log 2 \sim -0{,}7$ e $x_2 = \log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \sim 0{,}4$. Dunque g non è nemmeno iniettiva. Il calcolo di un'inversa per g ci guiderà su come restringere e corestringere in modo opportuno affinché g diventi biiettiva. Da $g(x) = y$ dovrà essere $y \ge 0$: si ricava $e^{2x}-2e^x+9-y^2 = 0$, da cui $e^x = 1 \mp \sqrt{y^2-8}$ (che implica $y \ge 2\sqrt{2}$), da cui $x_1(y) = \log(1+\sqrt{y^2-8})$ (sempre esistente per ogni $y \ge 2\sqrt{2}$) e $x_2(y) = \log(1-\sqrt{y^2-8})$ (esistente solo quando $1-\sqrt{y^2-8} > 0$, ovvero solo quando $2\sqrt{2} \le y < 3$). Dunque, notando che $x_2(y) \le 0 \le x_1(y)$, si può invertire g dopo averla resa biiettiva restringendone il dominio a $[0, +\infty[$ e il codominio a $[2\sqrt{2}, +\infty[$, con inversa $x_1(y)$. • Per terminare lo studio di g non ci resta che derivarla ottenendo $g'(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{e^{2x}-2e^x+9}}$, che si annulla in $x = 0$ ed è positiva per $x < 0$: dunque, quando x proviene da$-\infty$, $g(x)$ decresce dal valore asintotico 3^- al valore minimo $g(0) = 2\sqrt{2}$, per poi crescere fino a $+\infty$. Questo conferma quanto trovato in precedenza.

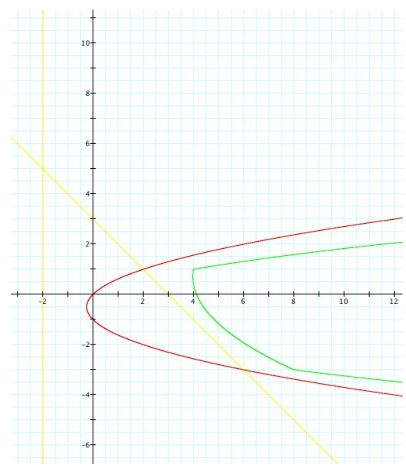
(4) (a) (Figura 2) La funzione $f(x) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + |x| + \frac{\pi}{2}$ ha dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, non è pari ne' periodica, ed è $\mathcal{C}^\infty$ nel suo dominio. Per gli zeri e il segno, come suggerito poniamo $x = \frac{1}{t}$, ottenendo che $f(x) \ge 0$ quando $\operatorname{arctg} t \ge -\frac{\pi|t|+2}{4|t|}$ (al secondo membro c'è un'omografica resa pari), il che accade quando $t > 0$ oppure quando $a < t < 0$ per un

certo $a \in]-2,-1[$; risostituendo $t = \frac{1}{x}$ si ottiene che $f(x) > 0$ quando $x > 0$ oppure quando $x < -\frac{1}{a}$ (con $-\frac{1}{a} \in]-1,0[$). I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{3\pi}{2}$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Si vede facilmente che a $\pm\infty$ vi è un asintoto obliquo $y = \pm x + \frac{\pi}{2}$ (dunque diverso da una parte e dall'altra), e che con questi asintoti non vi sono intersezioni risp. per $x \gtrless 0$. Derivando si ha $f'(x) = 2\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} + \operatorname{sign} x = -\frac{2}{x^2+1} + \operatorname{sign} x$: dunque se $x < 0$ si ha sempre $f'(x) < 0$ (dunque $f(x)$ è strettamente decrescente), mentre se $x > 0$ si ha $f'(x) = -\frac{2}{x^2+1} + 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, dunque è ≥ 0 per $x > 1$ (ovvero f decresce dal valore limite $\frac{3\pi}{2} \sim 4{,}7$ fino al minimo locale $f(1) = 1 + \pi \sim 4{,}1$ e poi cresce fino a $+\infty$). Si noti anche che la pendenza in arrivo e partenza da $x = 0$ sono risp. $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -3$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$. Derivando ulteriormente si ottiene $g''(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, dunque g è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$.

(b) (Figura 3) La parabola ℓ ha equazione $x = y^2 + y$, dunque il suo punto generico ha forma $P(y) = (y^2 + y, y)$. La somma delle distanze di $P(y)$ dalle rette $x = -2$ e $x + y = 3$ è $d(y) = |(y^2 + y) + 2| + \frac{|(y^2+y)+y-3|}{\sqrt{2}} = y^2 + y + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}|y^2 + 2y - 3|$. Derivando per $y \neq -3$ e $y \neq 1$ si ottiene $d'(y) = 2y + 1 + \sigma\sqrt{2}(y + 1)$ (ove $\sigma := \operatorname{sign}(y^2 + 2y - 3)$). Se $\sigma = 1$ (cioè se $y < -3$ oppure $y > 1$) si ha $d'(y) = (2 + \sqrt{2})y + (\sqrt{2} + 1)$, dunque $d'(y) = 0$ quando $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (non accettabile), e $d'(y) > 0$ per $y > 1$. Se invece $\sigma = -1$ (cioè se $-3 < y < 1$) si ha $d'(y) = (2 - \sqrt{2})y - (\sqrt{2} - 1)$, dunque $d'(y) = 0$ quando $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (accettabile) e $d'(y) > 0$ per $\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1$. Pertanto, pensando a y che sale da $-\infty$, $d(y)$ decresce prima e dopo di $y = -3$ e fino al minimo assoluto $d(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{7\sqrt{2}+6}{4}$ (un numero leggerissimamente inferiore a 4), poi cresce fino e oltre $y = 1$. Il punto cercato è dunque $P(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.







(1) Grafico di $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 9}$ dell'esercizio 3; **(2)** Grafico di $f(x) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + |x| + \frac{\pi}{2}$ dell'esercizio (4.a); **(3)** Parabola (rosso) e rette (azzurre) dell'esercizio (4.b); in verde il grafico della funzione $d(y)$.