A Appendice

A.1 Un po' di logica

Diamo alcuni cenni di *logica formale*, al fine di fissare un linguaggio ed alcune norme basilari nelle deduzioni matematiche.

Proposizioni logiche Una *proposizione* è un'affermazione, come ad esempio P= "Il Veneto è una regione dell'Italia", Q= "Tutte le auto che circolano in Italia sono di marca Fiat", R= "Rovigo è lontana da Padova", S= "Carlo Magno era di sesso maschile", T= "Rovigo è più lontana da Padova che da Tokyo", U= "Il cioccolato è buonissimo", V= "Il cioccolato non provoca mai i brufoli", W= "7 è un numero dispari". Nella logica matematica ci si occupa però esclusivamente delle *proposizioni logiche*, ovvero di quelle che portano in sè il valore di *verità* o di *falsità*: ad esempio, tutte le suddette proposizioni sono logiche tranne R (non è chiaro nella frase cosa debba significare "lontano") e U (giudizio individuale, sul quale non ha alcun senso pronunciarsi in termini di "vero" o "falso"). Può accadere (ed è in realtà quello che servirà di più a noi) che una proposizione contenga, al suo interno, delle *variabili* $x, y, ...$ una volta fissate le quali essa diventi una proposizione logica: in tal caso si parlerà di *proposizione logica aperta* o *predicato*, e si indicherà con una scrittura del tipo $\mathrm{P}(x, y, \dots)$. Ad esempio, le proposizioni $\mathrm{P}(x, y)$ = "$x^2 + y^2 - 1 > 0$" e $\mathrm{Q}(x)$= "x è stato un re di Roma" sono proposizioni logiche aperte, perché una volta che si sia precisato chi sono x e y si può dire con chiarezza se esse siano vere o false : così ad esempio $\mathrm{P}(1, 1)$ e Q(Anco Marzio) sono vere, mentre $\mathrm{P}(1, 0)$ e Q(Cicerone) sono false.

Verità e falsità, assiomi e postulati Torniamo sulle nozioni di "vero" e "falso" (cioè "non vero") che, come abbiamo detto, le proposizioni logiche si portano dentro come attributo imprescindibile. Si tratta naturalmente delle usuali nozioni di verità e falsità del senso comune: pertanto, negli esempi dati precedentemente, tra le proposizioni logiche P, Q, S, T, V e W è chiaro e noto a tutti che le proposizioni vere sono P, S, W e le false sono Q, T, V. Per mostrare questo loro carattere si dà una *dimostrazione*, ovvero si adducono argomenti che manifestano in modo inconfutabile la loro verità o falsità: ad esempio, per dimostrare che V è falsa basta dire "Infatti la settimana scorsa ho mangiato in un baleno un'intera confezione familiare di cioccolato al latte e dopo tre minuti già mi erano spuntati sette brufoli" (dunque è bastato mostrare un solo caso in cui il cioccolato ha avuto il malefico effetto), mentre per dimostrare che W è vera si può dire "infatti, dividendo 7 per 2 si ha quoziente 3 con resto 1, ed i numeri dispari sono proprio quelli che, divisi per 2, danno resto 1: dunque 7 è dispari". Queste dimostrazioni sono evidenti per tutti; talvolta, però, può capitare di avere bisogno di sapere che una certa importante proposizione logica è vera, ma che non sia possibile fornire una dimostrazione evidente né della sua verità né della sua falsità. Quando di essa viene comunque accettata la verità in modo "fideistico", si dice che questa proposizione è un *assioma* o *postulato*. Il termine "assioma" si usa di preferenza per certi fondamenti irrinunciabili della logica, mentre il termine "postulato", invece, è dato piuttosto ai fondamenti di una scienza che, se non dati da subito per veri, non permettono di ottenere ulteriori risultati (esempi classici sono l'assioma logico di "non contraddizione", per il quale una proposizione e la sua negazione non possono mai essere entrambe vere, ed il postulato geometrico delle rette parallele di Euclide, per il quale "Due rette parallele nello spazio non si incontrano mai").[22] Rifiutare un assioma o un postulato comporta il prezzo di rinunciare a tutte le cose che da questi discendono: così, ad esempio, rifiutando l'assioma di non contraddizione si rinuncia praticamente a tutta la logica (con conseguenze drammatiche, come è intuibile), mentre rifiutando il postulato delle rette parallele, accettato di buon grado da tutti per due millenni prima di essere messo in discussione, accanto alla vecchia e nota geometria euclidea si dà spazio anche alle geometrie "non euclidee"[23] in cui rette parallele hanno punti di intersezione.

I connettivi logici Per mettere in relazione tra loro le proposizioni si usano i "connettivi logici", che sono sostanzialmente quattro: la *negazione* (che si indica con "non" o col simbolo "$\neg$"), la *disgiunzione* ("o", "oppure", "vel" "$\vee$"), la *congiunzione* ("e", "et", "$\wedge$") e l'*implicazione* ("implica", "se... allora...", "$\Rightarrow$"). A partire da proposizioni P e Q preesistenti, i connettivi logici ne creano di nuove: "non P", "non Q", "P o Q", "P e Q", "se P allora Q". Più precisamente:

(1) La proposizione "non P" afferma l'esatto contrario di P; in termini di verità, per il succitato assioma di non contraddizione, "non P" è vera se e solo se P è falsa.

(2) La proposizione "P o Q" afferma *almeno una* tra P e Q, senza pretendere di affermare entrambe. Pertanto, "P o Q" è vera se e solo se almeno una tra P e Q è vera, ed è falsa se e solo se sia P che Q sono false.

(3) La proposizione "P e Q", invece, afferma *entrambe* P e Q. Dunque, "P e Q" è vera se e solo se sia P che Q sono vera, ed è falsa se e solo se almeno una delle due è falsa.

(4) La proposizione "se P allora Q" afferma che se P è vera allora anche Q è vera: pertanto essa è sempre vera, tranne il caso in cui P è vera e Q è falsa (ciò traduce il ben noto detto *Ex vero sequitur verum, ex falso sequitur quodlibet*, cioè: da una cosa vera conseguono solo cose vere, mentre da una cosa falsa segue tutto ciò che si vuole). Nell'implicazione "se P allora Q", la proposizione P si chiama *antecedente* (o anche *ipotesi*), mentre Q è detta *conseguente* (o *tesi*).

[22]Nel dizionario Garzanti, "assioma" è definito come *verità di per sè evidente ed indiscutibile, che sta alla base di ogni dimostrazione; nella matematica e nella logica contemporanee, proposizione primitiva (priva del requisito di evidenza) di un sistema formale, dalla quale si deducono teoremi mediante regole di inferenza; per estensione, nell'uso corrente, verità, principio che per la sua evidenza non ammette discussioni*, mentre "postulato" è definito come *in matematica e in filosofia, proposizione non dimostrata e non dimostrabile che viene ammessa come vera, in quanto necessaria ai fini di una dimostrazione filosofica o scientifica.*

[23]come la geometria proiettiva, o la geometria iperbolica di Lobačevskij.

Esempi. Siano P= "ieri sono andato a Roma" e "ieri sono andato a Viterbo": allora "non P"= "ieri non sono andato a Roma", "P e Q"= "ieri sono andato sia a Roma che a Viterbo", "P o Q"= "ieri sono andato a Roma oppure a Viterbo" (potrei anche essere andato in una sola di queste città oppure in entrambe: l'importante è che sia andato in almeno una delle due), e "P $\Rightarrow$ Q"= "se ieri sono andato a Roma allora sono andato anche a Viterbo" (che esclude la sola possibilità che io possa essere stato a Roma senza essere andato anche a Viterbo).

È importante notare che "non(P e Q)"="(non P) o (non Q)", "non(P o Q)"="(non P) e (non Q)", e che l'implicazione "P implica Q" è vera se e solo se è vera l'implicazione"(non Q) implica (non P)" (detta familiarmente anche *dimostrazione per assurdo*: ovvero la proposizione "P e (non Q)" è falsa). Non descriveremo tutte le possibili verità o falsità di proposizioni costruite da proposizioni vere o false, anche per un motivo molto semplice: parlando di insiemi, queste verifiche sono formalmente le stesse di quelle che si possono fare rimpiazzando "proposizione" con "insieme", "oppure" con "unione", "e" con "intersezione", "implica" con "è contenuto in" e "non" con "complemento", col vantaggio che con gli insiemi tali verifiche sono molto più visualizzabili (ad esempio, usando i diagrammi di Venn). Diamo solo un esempio: le implicazioni "P$\wedge$Q $\Rightarrow$ P" e "P $\Rightarrow$ P$\vee$Q" sono sempre vere (infatti la prima non è vera se e solo se P$\wedge$Q è vera e P è falsa, e la seconda non è vera se e e solo se P è vera e P$\vee$Q è falsa, ma queste eventualità sono impossibili in base all'assioma di non contraddizione).

Esempi. **(1)** La negazione della proposizione "Carlo è in Liguria *oppure* in Piemonte" è "Carlo non è in Liguria *e* non è in Piemonte" (ovvero, come si direbbe correntemente, "Carlo non è né in Liguria né in Piemonte"). **(2)** La negazione della proposizione "Ieri ho visitato Vigevano *e* Piacenza" è "Ieri non ho visitato Vigevano *oppure* non ho visitato Piacenza" (cioè, la negazione di "le ho visitate entrambe" non è dire "non ho visitato nessuna delle due" ma dire "una tra le due non l'ho visitata"). **(3)** L'implicazione "Se hai lasciato il rubinetto aperto allora la casa si è allagata" (che ha "Hai lasciato il rubinetto aperto" come antecedente e "la casa si è allagata" come conseguente") è equivalente all'implicazione "Se la casa non si è allagata, allora non hai lasciato il rubinetto aperto". **(4)** La proposizione "7 è un numero pari *oppure* Carlo Magno era di sesso maschile" è vera, perché la seconda è vera; la proposizione "7 è un numero pari *e* Carlo Magno era di sesso maschile" è falsa perché la prima è falsa. **(5)** L'implicazione "se 6 è dispari allora Roma è la capitale d'Italia" e "se Parigi è la capitale della Germania allora il carbone è bianco" sono vere, mentre l'implicazione "se Parigi è la capitale della Francia allora il carbone è bianco" è falsa.

Quantificatori Da una proposizione aperta P$(x, y, \cdots)$ si possono costruire nuove proposizioni affermando che P è vera *per tutti* i valori delle sue variabili soddifacenti una certa condizione di partenza, o affermando che *ne esiste qualcuno per cui* essa è vera. A tal fine si introducono i *quantificatori* "$\forall$" (significa: *per ogni, ogni, tutti*) e "$\exists$" (significa: *esiste, esistono*). Ad esempio: dalla proposizione aperta P(x)= "x ama la pastasciutta" possiamo costruire le proposizioni "Esiste qualche tedesco che ama la pastasciutta" (che è sicuramente vera) e "Tutte le donne francesi amano la pastasciutta" (che immagino sia falsa, anche se non conosco personalmente donne francesi che non la amano); e dalla proposizione Q(x)= "$x^2 > 5$" possiamo costruire le proposizioni "per ogni numero reale maggiore di 7 si ha $x^2 > 5$" (vera) e "esiste qualche numero reale compreso tra 0 e 1 per cui $x^2 > 5$" (falsa). È fondamentale notare che, negando una proposizione contenente dei quantificatori, essi vanno scambiati l'uno nell'altro: ad esempio, la negazione della proposizione "*Tutti* i bambini si lavano i denti prima di andare a letto" non è "Nessun bambino si lava i denti prima di andare a letto", ma è "*Esistono* bambini che *non* si lavano i denti prima di andare a letto". Inoltre, è importante fare attenzione all'*ordine* in cui i quantificatori appaiono: la proposizione "$\forall x > 0\ \exists y > 0 : x > y$" significa "per ogni $x > 0$ esiste qualche $y > 0$ tale che $x > y$" (vera: basta prendere $y = \frac{x}{2}$), mentre la proposizione "$\exists y > 0\ \forall x > 0 : x > y$" significa "esiste qualche $y > 0$ tale che per ogni $x > 0$ sia $x > y$" (falsa: preso un qualsiasi $y > 0$, si ha che $x = \frac{y}{2} > 0$ ma $x \not> y$).

L'esposizione matematica Nell'esposizione matematica, le proposizioni delle quali va dimostrata la verità constano di un *enunciato* della proposizione stessa, del quale si fornisce poi una *dimostrazione*, o *prova*. Le proposizioni matematiche sono usualmente classificate, oltreché semplicemente come *proposizioni* quando non hanno particolari caratteristiche da mettere in evidenza, anche come *teoremi* quando sono di particolare importanza, come *lemmi* quando sono enunciate e dimostrate in vista della dimostrazione di un altro risultato più importante[24], o come *corollari* quando discendono da una proposizione più importante (o generale) provata in precedenza. Le *definizioni*, invece, sono solo delle descrizioni di nuovi oggetti, e naturalmente vanno prese per quello che sono, senza il bisogno di alcuna dimostrazione.

[24] Può capitare ad esempio che la dimostrazione di una certa proposizione sia assai lunga ed articolata, perché richiede il raggiungimento di varie conclusioni intermedie (dette anche "passi") prima di affrontare la conclusione dell'enunciato; allora, come si dice, talvolta è conveniente "spezzarla in vari lemmi".