Matematica – Prova d'esame

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

mercoledì 1 luglio 2009

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

(1) Trovare in forma parametrica e cartesiana il piano Π passante per i punti $A(3,0,1)$ e $B(-1,2,0)$ e parallelo al vettore $\vec{v} = (-1,3,1)$, e la retta r passante per A e ortogonale ai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w} = (0,2,-1)$. Qual'è il punto di r più vicino all'origine?

(2) Studiare l'andamento[(1)] e tracciare il grafico di $f(x) = \log(2e^x + |x|) - 1$.

(3) Calcolare gli integrali (i) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_{-1}^0 x(\sin 2x - e^{-x})\,dx$.

(4) (a) Determinare dominio, zeri, segno e limiti di $f(x,y) = \dfrac{x+1}{xy+1}$, disegnando i risultati. Calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1,0)$. Trovare i punti stazionari e eventuali punti di massimo o minimo locale per f.
   (b) Disegnare $T = \{(x,y) : x \geq 0,\ x-1 \leq y \leq 0\}$, dire perché f ammette massimo e minimo assoluti su esso, e calcolarli.

(5) Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali tali che $y(0) = -1$:

$$\text{(i)}\quad yy' = (y^2+1)\log(x+1)\ , \qquad \text{(ii)}\quad y'' + 2y = 4x - \sin x\ .$$

[(1)] Nel corso dello studio potrà essere spesso utile fare confronti grafici.

Soluzioni.

(1) Oltre a $\vec{v} = (-1,3,1)$, un altro vettore parallelo al piano Π è $(3,0,1) - (-1,2,0) = (4,-2,1)$, dunque una forma parametrica è $\Pi = \{(x,y,z) = (-1,2,0) + s(-1,3,1) + t(4,-2,1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) = (-1-s+4t, 2+3s-2t, s+t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; ed eliminando i parametri s e t si ottiene l'equazione cartesiana $x+y-2z-1=0$. Un vettore parallelo a r sarà $\vec{v} \wedge \vec{w} = (-5,-1,-2)$, dunque una forma parametrica sarà $r = \{(x,y,z) = (3,0,1) + t(5,1,2) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) = (3+5t, t, 1+2t) : t \in \mathbb{R}\}$, ed eliminando $t = y$ si ottiene una forma cartesiana data dal sistema $x - 5y - 3 = 0$ e $2y - z + 1 = 0$. La distanza del punto generico $P(t) = (3+5t, t, 1+2t)$ di r dall'origine è data da $d(t) = \sqrt{(3+5t)^2 + t^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{30t^2+34t+10}$: essendo $d'(t) = \frac{30t+17}{\sqrt{30t^2+34t+10}} \geq 0$ per $t = -\frac{17}{30}$, il punto di r più vicino all'origine risulta essere $P(-\frac{17}{30}) = (\frac{1}{6}, -\frac{17}{30}, -\frac{2}{15})$.

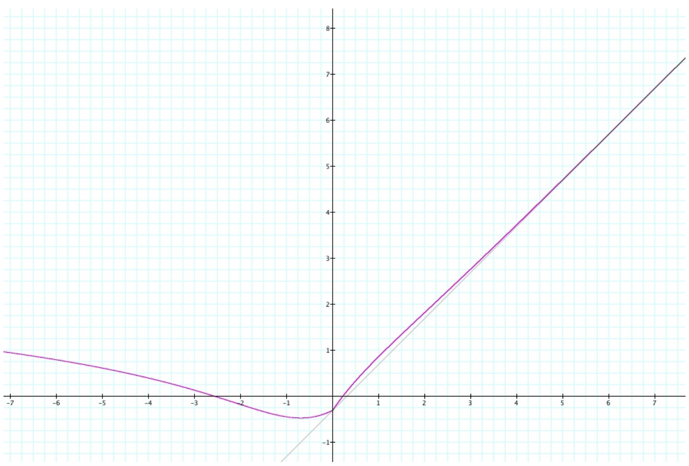
(2) (a) (Vedi Figura 1) La funzione $f(x) = \log(2e^x + |x|) - 1$ ha dominio dato dalla condizione $2e^x + |x| > 0$, ovvero $2e^x > -|x|$, ma un facile confronto grafico dice che ciò è vero per ogni x: dunque il dominio è tutto $\mathbb{R}$. Non ha simmetrie ne' periodi, ed è continua e infinitamente derivabile ovunque tranne che eventualmente in $x = 0$, a causa del modulo. Si annulla quando $2e^x + |x| = e$, ovvero per $2e^x = e - |x|$, che ancora un confronto grafico dice accadere in due punti $x_1 \sim -2{,}5$ e $x_2 \sim 0{,}2$; è positiva per $2e^x + |x| > e$, ovvero per $2e^x > e - |x|$, vero per $x < x_1$ e $x > x_2$ I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$; per la ricerca di eventuali asintoti obliqui, con de l'Hôpital si trova $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+\operatorname{sign} x}{2e^x+|x|} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty}(\log(2e^x+|x|) - 1 - \log e^x) = \lim_{x\to+\infty}(\log \frac{2e^x+|x|}{e^x} - 1) = \lim_{x\to+\infty}(\log(2+|x|e^{-x}) - 1) = \log 2 - 1 \sim -0{,}3$, da cui l'asintoto obliquo $y = x + (\log 2 - 1)$ a $+\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+\operatorname{sign} x}{2e^x+|x|} = 0$, dunque a $-\infty$ non c'è asintoto obliquo. Derivando per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{2e^x+\operatorname{sign} x}{2e^x+|x|}$: si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2e^x \geq -\operatorname{sign} x$, e ciò è vero per $x > x_3$ per un certo $x_3 \sim 0{,}7$, dunque $x = x_3$ è un punto di minimo relativo (in realtà assoluto) con $f(x_3) \sim -0{,}5$. Notiamo anche che $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{3}{2}$, dunque in $x = 0$ si ha effettivamente un punto angoloso (con $f(0) = \log 2 - 1 \sim -0{,}3$). Infine, derivando ancora (sempre per $x \neq 0$) e calcolando si ottiene $f''(x) = \frac{2e^x(2e^x+|x|)-(2e^x+\operatorname{sign} x)^2}{(2e^x+|x|)^2} = \frac{2e^x(|x|-\operatorname{sign} x)-1}{(2e^x+|x|)^2}$, pertanto $f''(x) \geq 0$ (ovvero f è convessa) quando $2e^x(|x| - \operatorname{sign} x) \geq 1$, ovvero $2(|x| - \operatorname{sign} x) \geq e^{-x}$, e ciò accade per $x \leq x_4 \leq x < 0$ e per $x \geq x_5$ per certi punti di flesso $x_4 \sim -2{,}1$ e $x_5 \sim 2{,}1$.

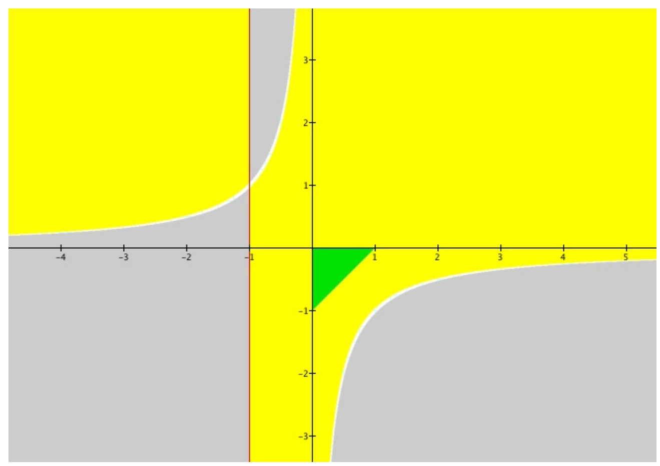
(3) • Posto $x = t^2$, da cui $dx = 2t\,dt$, e poi integrando per parti si ha $\int_0^1 \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 2t \operatorname{arctg} t\,dt = (t^2 \operatorname{arctg} t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = (\frac{\pi}{4}) - (0) - (t - \operatorname{arctg} t]_0^1 = \frac{\pi}{4} - ((1 - \frac{\pi}{4}) - (0)) = \frac{\pi}{2} - 1 \sim 0{,}5$. • Separando gli addendi e integrando per parti si ha $\int_{-1}^0 x(\sin 2x - e^{-x})\,dx = \int_{-1}^0 x \sin 2x\,dx - \int_{-1}^0 xe^{-x}\,dx = (x(-\frac{1}{2}\cos 2x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0(-\frac{1}{2}\cos 2x)\,dx - (x(-e^{-x})]_{-1}^0 + \int_{-1}^0(-e^{-x})\,dx = (0) - (\frac{1}{2}\cos(-2)) + (\frac{1}{4}\sin 2x]_{-1}^0 + (0) - (-e) + (e^{-x}]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}\cos 2 + (0) - (\frac{1}{4}\sin(-2)) + e + (1) - (e) = 1 + \frac{1}{4}(\sin 2 - 2\cos 2) \sim 1{,}4$.

(4) (a) (Vedi Figura 2) La funzione $f(x,y) = \frac{x+1}{xy+1}$ ha dominio dato da $xy + 1 \neq 0$: si tratta di escludere i punti che stanno sull'iperbole equilatera $xy = -1$. Si ha $f(x,y) = 0$ sui punti della retta verticale $x = -1$ (tranne il punto $A(-1,1)$, intersezione con l'iperbole, che non sta nel dominio); quanto al segno, il numeratore è positivo a destra della retta $x = -1$ e negativo a sinistra, il denominatore è positivo nella zona compresa tra i rami dell'iperbole e negativo fuori, e il segno di f ne segue per quoziente. La funzione è continua in tutto il dominio, dunque i limiti interessanti sono in ∞_2 e nei punti dell'iperbole. In ∞_2 il limite non esiste: infatti tendendovi lungo la retta $x = -1$ esso dovrebbe essere nullo, ma ad esempio sull'asse x si ha $f(x,0) = x+1$, che tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$. In un punto qualsiasi dell'iperbole diverso da A il numeratore è finito e il denominatore infinitesimo. dunque il limite vale $\pm\infty$ a seconda della direzione da cui si tende al punto stesso (basta vedere il segno di f); invece in A il limite non esiste, perché tendendovi lungo la retta $x = -1$ dovrebbe essere nullo, ma in ogni suo intorno vi sono altri punti dell'iperbole in cui f tende a ∞. Le derivate parziali di f, che esistono e sono continue in tutto il dominio, sono $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y}{(xy+1)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x(x+1)}{(xy+1)^2}$: pertanto l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1,0)$ è $z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) = 2 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(y-0)$, ovvero $2x - y - 2z + 2 = 0$. I punti stazionari di f si ottengono da $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$: dalla prima equazione si ottiene $y = 1$ e dalla seconda $x = 0$ oppure $x = -1$, dunque (escluso A, fuori dal dominio) si ha l'unico punto accettabile $B(0,1)$; l'hessiano di f è $\begin{pmatrix} \frac{2y(y-1)}{(xy+1)^3} & \frac{xy-2x-1}{(xy+1)^3} \\ \frac{xy-2x-1}{(xy+1)^3} & \frac{2x^2(x+1)}{(xy+1)^3} \end{pmatrix}$, che in B diventa $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque B è un punto di sella.

(b) (Vedi Figura 2) L'insieme $T = \{(x,y) : x \geq 0,\ x-1 \leq y \leq 0\}$ è il triangolo chiuso e pieno di vertici $O(0,0)$, $P(1,0)$ e $Q(0,-1)$: poiché T è un sottoinsieme compatto del piano interamente contenuto nel dominio di f, che è continua, gli estremi assoluti di f su T esistono in base al teorema di Weierstrass; inoltre, poiché T è contenuto in una zona dove f è positiva, tali estremi saranno entrambi > 0. Per il calcolo decomponiamo T nella sua parte interna, nei suoi lati privati dei vertici, e nei suoi tre vertici. Nei punti interni di T tali estremi assoluti non potranno di certo essere assunti: infatti, se in uno di questi punti fosse ad esempio assunto il minimo assoluto, esso dovrebbe essere in particolare un punto di minimo locale, e allora l'avremmo individuato tra i punti stazionari ma, come visto, l'unico punto stazionario è $B(0,1)$ e non sta in T. Sul lato OP si ha $f(x,0)=x+1$ con $0<x<1$, e poiché la derivata rispetto x non si annulla mai, non otteniamo alcun punto stazionario; sul lato OQ la funzione f vale costantemente $f(0,y)\equiv 1$, dunque la derivata rispetto y è nulla e tutti i punti sono stazionari; sul lato PQ si ha $f(x,x-1)=\frac{x+1}{x^2-x+1}$ con $0<x<1$, la cui derivata $-\frac{x^2+2x-2}{(x^2-x+1)^2}$ si annulla per $0<x<1$ in $x=\sqrt{3}-1$ e perciò otteniamo il punto $R(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-2)$ su cui vale $f(R)=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sim 2{,}1$. Infine, nei tre vertici si ha $f(O)=f(Q)=1$ e $f(P)=2$. Ricapitolando, il minimo assoluto di f su T è 1 (assunto su tutti punti di T che stanno sull'asse y) e il massimo assoluto è $1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (assunto in R).

(5) • L'equazione (i) $yy'=(y^2+1)\log(x+1)$ è a variabili separabili. Separando le variabili si ottiene $\frac{y}{y^2+1}\,dy=\log(x+1)\,dx$, da cui integrando si ha $\frac{1}{2}\log(y^2+1)=(x+1)(\log(x+1)-1)+k$ e imponendo che $y(0)=-1$ si trova $k=1+\frac{1}{2}\log 2$: dunque $\log(y^2+1)=2(x+1)(\log(x+1)-1)+2+\log 2$, da cui $y^2+1=2e^{2(x+1)(\log(x+1)-1)+2}$, da cui (usando ancora che $y(0)=-1$) si ottiene $y(x)=-\sqrt{2e^{2(x+1)(\log(x+1)-1)+2}-1}$. • L'equazione (ii) $y''+2y=4x-\sin x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'omogenea sono $y(x)=A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)$ con $A,B\in\mathbb{R}$; una soluzione particolare per $4x$ è del tipo $ax+b$, e si trova $a=2$ e $b=0$, mentre una per $-\sin x$ è del tipo $a\cos x+b\sin x$, e si trova $a=0$ e $b=-1$ dunque le soluzioni dell'equazione completa sono $y(x)=A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)+2x-\sin x$ con $A,B\in\mathbb{R}$. Infine, la condizione $y(0)=-1$ dà $A=-1$.





(1) Grafico di $f(x)$ nell'ex. 2. **(2)** Zone in cui la funzione f dell'ex. 4 è >0 (giallo), <0 (grigio) e $=0$ (rosso). Il triangolo T è verde.