Matematica – Prova d'esame

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

venerdì 11 settembre 2009

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ____________
IN STAMPATELLO

(1) Disegnare nello spazio cartesiano i tre vettori $\vec{u} = (1, 0, -2)$, $\vec{v} = (0, 3, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 1)$ e calcolare il volume del parallepipedo tra essi compreso. Trovare poi la forma parametrica e cartesiana dei piani Π e Σ passanti per il punto $A(2, -1, 1)$, sapendo che Π è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e che Σ è ortogonale a $\vec{w}$.

(2) (a) Studiare l'andamento e tracciare il grafico di $f(x) = x(x + 3) + \log|x|$.

(b) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$, controllando che il valore trovato sia compatibile col grafico di f.

(3) Disegnare e calcolare l'area di $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \dfrac{1}{x+2} \ \leq \ y \ \leq \ 2 - |x| \ , \ \log(3x + 5) > 0 \right\}$.

(4) Determinare dominio, zeri, segno e limiti di $f(x, y) = \dfrac{3x + 2}{xy + 1}$, disegnando i risultati. Calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(-2, 1)$. Trovare i punti stazionari e eventuali massimi e minimi locali per f.

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $(x + 1)y' + x + 2y = 0$ il cui grafico passa per il punto $(0, -1)$.

Soluzioni.

(1) Il volume del parallepipedo compreso tra i tre vettori $\vec{u}=(1,0,-2)$, $\vec{v}=(0,3,1)$ e $\vec{w}=(-2,1,1)$ è dato dal modulo del loro prodotto misto $|(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 10$. Il piano Π passante per $A(2,-1,1)$ e parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ha forma parametrica $\Pi = \{(2,-1,1)+s(1,0,-2)+t(0,3,1) : s,t\in\mathbb{R}\} = \{(2+s,-1+3t,1-2s+t) : s,t\in\mathbb{R}\}$; eliminando da $(x,y,z)=(2+s,-1+3t,1-2s+t)$ i parametri s e t si ottiene $s=x-2$ e $t=z-1+2s=2x+z-5$, che messi in $y=-1+3t$ danno $6x-y+3z-16=0$. Infine, il piano Σ per A e parallelo a $\vec{w}$ ha equazione cartesiana del tipo $-2x+y+z+k=0$, e il passaggio dà $k=4$, da cui $2x-y-z-4=0$; due vettori indipendenti ortogonali a $\vec{w}$ sono $(1,2,0)$ e $(0,1,-1)$, da cui la forma parametrica $\Sigma=\{(2,-1,1)+s(1,2,0)+t(0,1,-1) : s,\, t\in\mathbb{R}\} = \{(2+s,-1+2s+t,1-t) : s,\, t\in\mathbb{R}\}$.

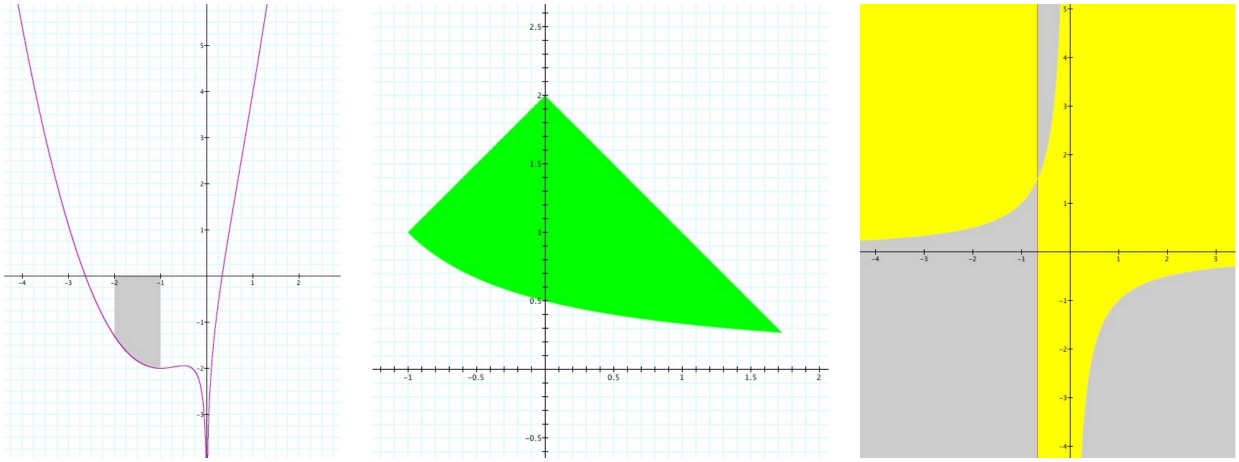
(2) (Vedi Figura 1) (a) La funzione $f(x)=x(x+3)+\log|x|$ ha dominio dato da $x\neq 0$; in esso non ha simmetrie ne' periodi, ed è infinitamente derivabile. Si ha $f(x)\geq 0$ se e solo se $\log|x|\geq -x^2-3x$, e un confronto grafico tra il logaritmo $\log|x|$ e la parabola $-x^2-3x$ mostra chiaramente che esistono due punti $x_1\sim -2{,}6$ e $x_2\sim 0{,}3$ tali che ciò vale se e solo se $x\leq x_1$ e $x\geq x_2$. I limiti notevoli sono determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^\mp} f(x)=-\infty$; non vi sono asintoti obliqui. Derivando si ottiene $f'(x)=2x+3+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+3x+1}{x}$, perciò $f'(x)=0$ per $x=-1$ e $x=-\frac{1}{2}$, e $f'(x)>0$ per $-1<x<-\frac{1}{2}$ e $x>0$: ne ricaviamo che $x=-1$ è punto di minimo locale (con $f(-1)=-2$) e $x=-\frac{1}{2}$ è di massimo locale (con $f(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}-\log 2\sim -1{,}95$). Infine, derivando ancora si ottiene $f''(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}$, da cui $f''(x)>0$ (ovvero f è convessa) per $|x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Integrando per parti si ha $\int\log|x|\,dx = x\log|x| - \int x\frac{1}{x}\,dx = x(\log|x|-1)+k$, da cui $\int_{-2}^{-1}(x(x+3)+\log|x|)\,dx = (\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x(\log|x|-1)]_{-2}^{-1} = (-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1)-(-\frac{8}{3}+6-2(\log 2-1)) = -\frac{19}{6}+2\log 2\sim -1{,}8$, valore compatibile col grafico di f.

(3) (Vedi Figura 2) La condizione $\log(3x+5)>0$ equivale a $3x+5>1$ ovvero $x>-\frac{4}{3}$, e in tale ipotesi si ha $\frac{1}{x+2}=2-|x|$ se e solo se $x=-1$ o $x=\sqrt{3}$: perciò l'area di K è $\int_{-1}^{0}(2+x)\,dx+\int_0^{\sqrt{3}}(2-x)\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{-1}\frac{1}{x+2}\,dx = (2x+\frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0}+(2x-\frac{1}{2}x^2]_0^{\sqrt{3}}+(\log|x+2|]_{\sqrt{3}}^{-1} = (0)-(-2+\frac{1}{2})+(2\sqrt{3}-\frac{3}{2})-(0)+(0)-(\log(2+\sqrt{3})) = 2\sqrt{3}-\log(2+\sqrt{3})\sim 2{,}1$.

(4) (Vedi Figura 3) La funzione $f(x,y)=\frac{3x+2}{xy+1}$ ha dominio tutto il piano il $\mathbb{R}^2$ meno i punti dell'iperbole equilatera $xy=-1$. Si ha $f(x,y)=0$ sui punti della retta $x=-\frac{2}{3}$ (tranne il punto $P(-\frac{2}{3},\frac{3}{2})$, intersezione con l'iperbole, che è fuori dal dominio); il numeratore è positivo a destra della retta, il denominatore nei punti compresi tra i due rami dell'iperbole, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è continua in tutto il suo dominio, dunque i limiti interessanti sono nei punti dell'iperbole e in ∞_2. Nei punti dell'iperbole diversi da P il limite è $\pm\infty$ (col segno che dipende dal lato da cui si tende al punto, basta guardare il segno di f), mentre in P e in ∞_2 non esiste, in quanto lungo la retta $x=-\frac{2}{3}$ la funzione è nulla mentre, come visto, avvicinandosi a punti dell'iperbole diversi da P essa diverge. Le derivate parziali di f, che esistono e sono continue in tutto il dominio, sono $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3-2y}{(xy+1)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x(3x+2)}{(xy+1)^2}$, pertanto l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(-2,1)$ è $z=f(-2,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1)\,(x-(-2))+\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)\,(y-1)=4+1(x+2)-8(y-1)$, ovvero $x-8y-z+14=0$. I punti stazionari di f si ottengono da $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e si trovano il già noto $P(-\frac{2}{3},\frac{3}{2})$ (da escludere) e un nuovo punto $Q(0,\frac{3}{2})$; l'hessiano di f è $\frac{2}{(xy+1)^3}\begin{pmatrix} y(2y-3) & xy-3x-1 \\ xy-3x-1 & x^2(3x+2)\end{pmatrix}$, e in Q diventa $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0\end{pmatrix}$, dunque per il relativo criterio Q è un punto di sella.

(5) L'equazione differenziale $(x+1)y'+x+2y=0$ è lineare del primo ordine, infatti per $x\neq -1$ essa può essere messa nella forma $y'+p(x)\,y=q(x)$ con $p(x)=\frac{2}{x+1}$ e $q(x)=-\frac{x}{x+1}$: poiché $P(x)=\int p(x)\,dx=2\log|x+1|=\log(x+1)^2$ e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int(x+1)^2(-\frac{x}{x+1})=-\int x(x+1)\,dx=-\frac{1}{6}x^2(2x+3)$, l'integrale generale ad esempio per $x>-1$ è $y(x)=\frac{1}{(x+1)^2}(-\frac{1}{6}x^2(2x+3)+k)=-\frac{2x^3+3x^2-6k}{6(x+1)^2}$ al variare di $k\in\mathbb{R}$. Imponendo infine che $y(0)=-1$ si ottiene $k=-1$, dunque $y(x)=-\frac{2x^3+3x^2+6}{6(x+1)^2}$.
A margine dell'esercizio, notiamo che un'eventuale soluzione definita anche in $x=-1$ deve soddisfare $0+(-1)+2y(-1)=0$, ovvero $y(-1)=\frac{1}{2}$: in effetti, imponendo che $\lim_{x\to -1}(-\frac{2x^3+3x^2-6k}{6(x+1)^2})$ esista finito si ottiene necessariamente $k=\frac{1}{6}$, e in tal caso si ha $\lim_{x\to -1}(-\frac{2x^3+3x^2-1}{6(x+1)^2})=\lim_{x\to -1}\frac{1-2x}{6}=\frac{1}{2}$, e dunque l'unica soluzione dell'equazione differenziale definita anche in $x=-1$ (pertanto su tutto $\mathbb{R}$) è $y(x)=\frac{1}{6}(1-2x)$.



(1) Grafico di $f(x)$ nell'ex. 2, e area dell'integrale (in grigio). **(2)** L'insieme K dell'ex. 3. **(3)** Il segno della funzione $f(x, y)$ dell'ex. 4.