Matematica – Prova d'esame

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

mercoledì 15 luglio 2009

Cognome-Nome ____________________________________ Matr. _______________

IN STAMPATELLO

(1) Trovare, in forma parametrica e cartesiana, la retta r del piano cartesiano passante per i punti $A(1, -2)$ e $B(0, 3)$, e la retta s passante per B e ortogonale al vettore $\vec{v} = (-1, 3)$. Vedendo poi il piano cartesiano come il piano (x, y) dello spazio cartesiano, determinare il piano Π parallelo al vettore $\vec{w} = (2, -1, 1)$ e che, intersecato col piano (x, y), dà la retta s.

(2) Studiare l'andamento e tracciare il grafico di $f(x) = \dfrac{|x|^3}{x^2 - x - 2}$.

(3) Calcolare gli integrali (i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \; \log(\sin x) \; dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^1 (2 + x) \sqrt[3]{x + 1} \; dx$.

(4) (a) Determinare dominio, zeri, segno e limiti di $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$, disegnando i risultati. Calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(2, -1)$. Trovare i punti stazionari e eventuali massimi e minimi locali per f.

(b) Disegnare $R = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}$, dire perché f ammette massimo e minimo assoluti su esso, e calcolarli.

(5) Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali il cui grafico passa per l'origine:

$$\text{(i)} \quad (x + 1)y' = 2x^2 \sqrt{y + 1} \; , \qquad \text{(ii)} \quad y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 5 \sin x \; .$$

Soluzioni.

(1) La retta r passante per i punti $A(1,-2)$ e $B(0,3)$ è data cartesianamente da $\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-(-2)}{3-(-2)}$, ovvero $5x+y-3=0$; per la forma parametrica, un vettore parallelo a r è $(1,-2)-(0,3)=(1,-5)$, da cui $r=\{(1,-2)+t(1,-5):t\in\mathbb{R}\}=\{(1+t,-2-5t):t\in\mathbb{R}\}$. La retta s passante per B e ortogonale al vettore $\vec{v}=(-1,3)$ sarà parallela al vettore $\vec{w}=(3,1)$, dunque sarà $s=\{(0,3)+t(3,1):t\in\mathbb{R}\}=\{(3t,3+t):t\in\mathbb{R}\}$, e da $(x,y)=(3t,3+t)$ si ricava la forma cartesiana $x-3y+9=0$. Infine, il piano Π parallelo al vettore $\vec{w}=(2,-1,1)$ che, intersecato col piano (x,y), dà la retta s, dovrà per forza passare per $B(0,3,0)$ e essere parallelo anche al vettore $\vec{w}=(3,1,0)$ (quelli precedenti di s, ma entrambi visti nello spazio tridimensionale), dunque si avrà $\Pi=\{(0,3,0)+s(2,-1,1)+t(3,1,0):s,t\in\mathbb{R}\}=\{(2s+3t,3-s+t,s):s,t\in\mathbb{R}\}$; poi, da $(x,y,z)=(2s+3t,3-s+t,s)$ si ricava $s=z$ e $t=y-3+s=y+z-3$, che messe in $x=2s+3t$ danno l'equazione cartesiana $x-3y-5z+9=0$.

(2) (Vedi Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{|x|^3}{x^2-x-2}$ ha dominio dato dalla condizione $x^2-x-2\neq 0$, ovvero $x\neq -1$ e $x\neq 2$. Non ha simmetrie ne' periodi, ed è continua in tutto il suo dominio; è anzi infinitamente derivabile tranne che eventualmente in $x=0$, a causa del modulo. Si annulla solo in $x=0$, e vale $f(x)>0$ per $x<-1$ e $x>2$; i limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-1^\mp}f(x)=\pm\infty$ e $\lim_{x\to 2^\mp}f(x)=\mp\infty$. Poiché la funzione è razionale fratta, e il grado del numeratore è più grande di 1 rispetto a quello del denominatore, la presenza di asintoti obliqui è certa: in effetti vale $\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\mp 1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-(\mp x))=\mp 1$, e dunque $y=\mp(x+1)$ è asintoto obliquo a $\mp\infty$. Derivando per $x\neq 0$, posto $\sigma:=\operatorname{sign}x$ si ottiene $f'(x)=\sigma\frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x^2-x-2)^2}$, da cui i punti stazionari $x=1\pm\sqrt{7}$, e vale $f'(x)>0$ per $1-\sqrt{7}<x<-1$, per $-1<x<0$ e per $x>1+\sqrt{7}$: dunque $x=1-\sqrt{7}$ e $x=1+\sqrt{7}$ sono punti di minimo (con $f(1-\sqrt{7})=-\frac{22-10\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}\sim 1{,}9$ e $f(1+\sqrt{7})=\frac{22+10\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}}\sim 6{,}3$). Non dobbiamo però scordare $x=0$, che è di massimo (con $f(0)=0$); inoltre si ha $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$, dunque f è derivabile anche in $x=0$ con valore nullo. Infine, derivando ancora sempre per $x\neq 0$, dopo un po' di conti si giunge a $f''(x)=\frac{6|x|(x^2+2x+4)}{(x^2-x-2)^3}$, e dunque f è convessa per $x<-1$ e $x>2$ e concava per $-1<x<2$.

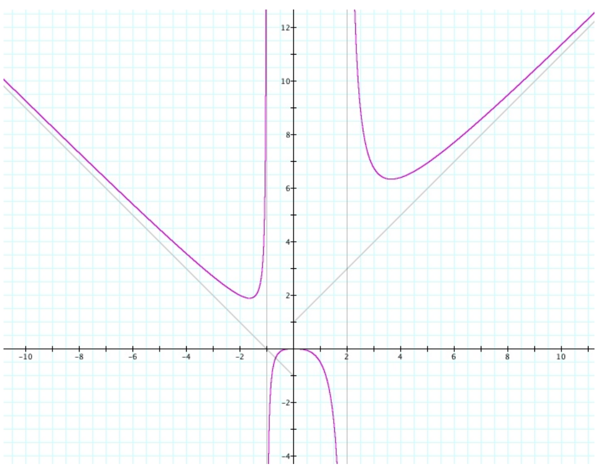
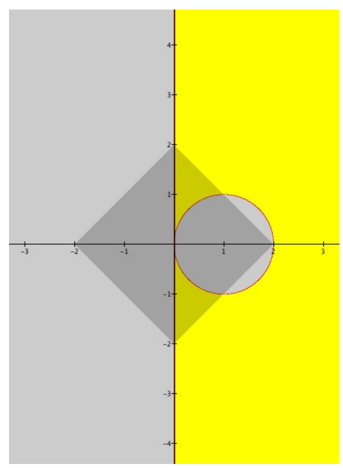
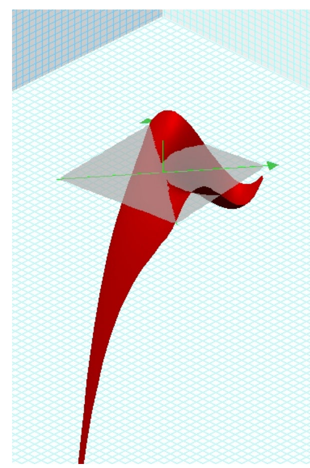
(3) • Sostituendo $t=\sin x$ (da cui $dt=\cos x\,dx$), ricordando che $\sin 2x=2\sin x\cos x$ e integrando per parti si ricava $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ \log(\sin x)\ dx=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\ \log t\,dt=2((\frac{t^2}{2}\log t]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt)=2((0)-(\frac{1}{8}\log\frac{1}{2}))-(\frac{t^2}{4}]_{\frac{1}{2}}^{1})=2(\frac{1}{8}\log 2-(\frac{1}{4})+(\frac{1}{16}))=-\frac{3-2\log 2}{8}\sim -0{,}2$. • Sostituendo $x+1=t^3$ (da cui $x=t^3-1$ e $dx=3t^2\,dt$) si ha $\int_0^1(2+x)\sqrt[3]{x+1}\ dx=\int_1^{\sqrt[3]{2}}(t^3+1)\,t\,3t^2\,dt=3\int_1^{\sqrt[3]{2}}(t^6+t^3)\,dt=3(\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{4}t^4]_1^{\sqrt[3]{2}}=3((\frac{15}{14}\sqrt[3]{2})-(\frac{11}{28}))=\frac{3}{28}(30\sqrt[3]{2}-11)\sim 2{,}9$.

(4) (a) (Vedi Figura 2) La funzione $f(x,y)=x(x^2+y^2-2x)$ ha dominio tutto il piano il $\mathbb{R}^2$. Si ha $f(x,y)=0$ sui punti dell'asse y e della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+y^2-2x=0$ (centro $(1,0)$ e raggio 1); il fattore x è positivo a destra dell'asse y e negativo a sinistra, il fattore (x^2+y^2-2x) è positivo fuori di $\mathcal{C}$ e negativo dentro, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}^2$, dunque il solo limite interessante è quello in ∞_2, che non esiste: infatti lungo l'asse y la funzione è nulla, mentre sull'asse x vale $f(x,0)=x(x^2-2x)$ e dunque tende a $\mp\infty$. Le derivate parziali di f, che esistono e sono continue in tutto il dominio, sono $\frac{\partial f}{\partial x}=(x^2+y^2-2x)+2(x-1)x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=2xy$, pertanto l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(2,-1)$ è $z=f(2,-1)+\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)\,(x-2)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)\,(y-(-1))=2+5(x-2)-4(y+1)$, ovvero $5x-4y-z-12=0$. I punti stazionari di f si ottengono da $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$: da $2xy=0$ si ricava che $x=0$ oppure $y=0$; nel primo caso si ottiene $y=0$ (dunque l'origine $O(0,0)$), e nel secondo si ha $(x^2-2x)+2(x-1)x=0$, da cui ancora $x=0$ oppure $x=\frac{4}{3}$, e dunque un altro punto $A(\frac{4}{3},0)$. L'hessiano di f è $\begin{pmatrix}6x-4 & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$, che nell'origine O diventa $\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e in A diventa $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$: il criterio dell'hessiano dice allora che A è senz'altro un punto di minimo locale (con $f(A)=-\frac{32}{27}\sim -1{,}2$), mentre O potrebbe essere un punto di massimo locale o un punto di sella. Il dubbio riguardo a O viene però dissipato guardando il segno di f: infatti in O la funzione è nulla, e in ogni intorno di O vi sono punti in cui è positiva e altri in cui è negativa. Pertanto O è un punto di sella.

(b) (Vedi Figura 3) L'insieme $R=\{(x,y):|x|+|y|\le 2\}$ è il rombo chiuso e pieno di vertici $D(-2,0)$, $E(0,2)$, $F(2,0)$ e $G(0,-2)$: poiché R è un sottoinsieme compatto del piano interamente contenuto nel dominio di f, che è continua, gli estremi assoluti di f su R esistono in base al teorema di Weierstrass. Per il calcolo decomponiamo R nella sua parte interna, nei suoi lati privati dei vertici, e nei suoi quattro vertici. I punti interni di R in cui gli estremi assoluti potrebbero essere assunti devono apparire tra i punti stazionari di f e, come visto, questi sono O (che però è di sella, dunque non sarà estremante) e A (punto di minimo locale, che diventa dunque candidato a essere di minimo assoluto su R). Sul lato DE si ha $f(x,x+2)=2x(x^2+x+2)$ con $-2<x<0$, e poiché $(2x(x^2+x+2))'=2(3x^2+2x+2)$ non si annulla mai, non otteniamo alcun punto stazionario; sul lato EF si ha $f(x,2-x)=2x(x^2-3x+2)$ con $0<x<2$, e poiché $(2x(x^2-3x+2))'=2(3x^2-6x+2)$ si annulla in $x=1\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$

(entrambi accettabili), otteniamo altri due punti $B'(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $B''(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{3})$; poiché f è pari rispetto a y, sul lato FG avremo risultati simmetrici a quelli di EF (dunque troveremo i punti $C'(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, -(1+\frac{\sqrt{3}}{3}))$ e $C''(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, -(1-\frac{\sqrt{3}}{3}))$) e sul lato GD avremo risultati simmetrici a quelli di DE (dunque nessun punto stazionario). Essendo allora $f(O)=0$, $f(A)=-\frac{32}{27}\sim -1{,}2$, $f(B')=f(C')=\frac{4\sqrt{3}}{9}\sim 0,8$, $f(B'')=f(C'')=-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sim -0,8$, $f(D)=-8$ e $f(E)=f(G)=f(F)=0$, ne ricaviamo che il massimo assoluto per f su R è $\frac{4\sqrt{3}}{9}\sim 0,8$ (assunto nei punti B' e C') e il minimo assoluto è -8 (assunto nel punto D).

(5) • L'equazione (i) $(x+1)y'=2x^2\sqrt{y+1}$ è a variabili separabili, e dovrà dare soluzioni $y(x)\geq -1$. Separando le variabili si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{y+1}}\,dy=\frac{x^2}{x+1}\,dx$, da cui integrando si ha $\sqrt{y+1}=\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+k$ e imponendo che $y(0)=0$ si trova $k=1$: dunque $\sqrt{y+1}=\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+1$, da cui $y(x)=(\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+1)^2-1$.
• L'equazione (ii) $y''-2y'+2y=2x^2-5\sin x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'omogenea sono $y(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)$ con $A,B\in\mathbb{R}$; una soluzione particolare per x^2 è del tipo ax^2+bx+c, e si trova $a=c=1$ e $b=2$, mentre una per $-5\sin x$ è del tipo $a\cos x+b\sin x$, e si trova $a=-2$ e $b=-1$, dunque le soluzioni dell'equazione completa sono $y(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)+(x+1)^2-(2\cos x+\sin x)$ con $A,B\in\mathbb{R}$. Infine, la condizione $y(0)=0$ dà $A=1$.

(1) Grafico di $f(x)$ nell'ex. 2. **(2)** Zone in cui la funzione f dell'ex. 4 è >0 (giallo), <0 (grigio) e $=0$ (rosso). R è il rombo che appare più scuro. **(3)** La porzione del grafico di f che mostra quanto ottenuto nell'ex. (4.b).