Matematica – Prova d'esame

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

venerdì 25 settembre 2009

Cognome-Nome ____________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO

(1) Il piano Π passa per i punti $A(1,0,-1)$ e $B(3,-1,0)$ ed è parallelo all'asse y, mentre la retta r passa per i punti $C(-2,1,1)$ e $D(0,0,1)$: determinare per entrambi una forma parametrica e cartesiana. Dire poi qual'è il punto dello spazio in cui piano e retta si intersecano.

(2) Studiare l'andamento[1] e tracciare il grafico di $f(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,x + \dfrac{1}{x-1}$.

(3) Calcolare gli integrali (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{\cos^2 x})\sin 2x\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

(4) (a) Determinare dominio, zeri, segno e limiti di $f(x,y) = 1 - \log(x - y^2 + 4)$, disegnando i risultati. Calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1,2)$. Trovare i punti stazionari e eventuali massimi e minimi locali per f.

(b) Dire perché f ammette massimo e minimo assoluti sul disco $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e calcolarli.

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ delle seguenti equazioni differenziali che hanno un punto stazionario in $x = 0$:

$$\text{(i)}\quad (x^2+4)y' = 2y^2\ , \qquad \text{(ii)}\quad y'' - y = 3 - 2e^x\ .$$

[1] Non è richiesto lo studio della convessità.

Soluzioni.

(1) Il piano Π è parallelo all'asse y, dunque al vettore $(0,1,0)$; e, passando per i punti $A(1,0,-1)$ e $B(3,-1,0)$, esso sarà parallelo anche al vettore $(3,-1,0)-(1,0,-1)=(2,-1,1)$. Una forma parametrica sarà data perciò da $\Pi=\{(1,0,-1)+s(0,1,0)+t(2,-1,1): s,t\in\mathbb{R}\}=\{(1+2t,s-t,-1+t): s,t\in\mathbb{R}\}$: da $(x,y)=(1+2t,s-t)$ si ricava $(s,t)=(\frac{1}{2}(x-1)+y,\frac{1}{2}(x-1))$, che messi in $z=-1+t$ danno $z=-1+\frac{1}{2}(x-1)$, ovvero l'equazione cartesiana $x-2z-3=0$. La retta r, passando per i punti $C(-2,1,1)$ e $D(0,0,1)$, sarà parallela al vettore $(0,0,1)-(-2,1,1)=(2,-1,0)$, e avrà dunque forma parametrica $r=\{(0,0,1)+s(2,-1,0): s\in\mathbb{R}\}=\{(2s,-s,1): s\in\mathbb{R}\}$; da $s=-y$ si ottiene la forma cartesiana $\begin{cases} x=-2y \\ z=1 \end{cases}$. Infine, l'intersezione tra Π e r si ottiene ad esempio mettendo in sistema le due equazioni cartesiane di r con quella di Π, e risulta il punto $(5,-\frac{5}{2},1)$.

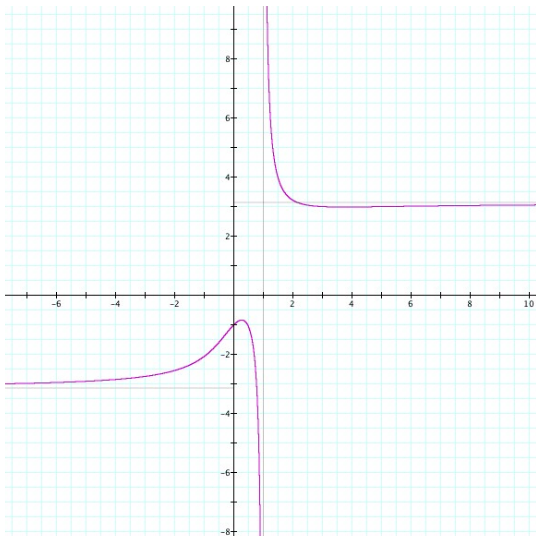
(2) (Vedi Figura 1) La funzione $f(x)=2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x-1}$ ha dominio dato dalla condizione $x\neq 1$; non ha simmetrie ne' periodi, ed è infinitamente derivabile in tutto il suo dominio. Si ha $f(x)\geq 0$ se e solo se $2\operatorname{arctg}x\geq -\frac{1}{x-1}$, e un confronto grafico tra le due funzioni mostra che ciò è vero (come $>$) solo per $x>1$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=\mp\pi$ (dunque $y=\mp\pi$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$). Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-4x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$, dunque $f'(x)=0$ per $x=2\mp\sqrt{3}$ e $f'(x)>0$ per $x<2-\sqrt{3}\sim 0{,}3$ e per $x>2+\sqrt{3}\sim 3{,}7$, che sono dunque rispettivamente punti di massimo e minimo locale (ricordando che $2-\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ e $2+\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$ si calcola $f(2-\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sim -0{,}8$ e $f(2+\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sim 3$).

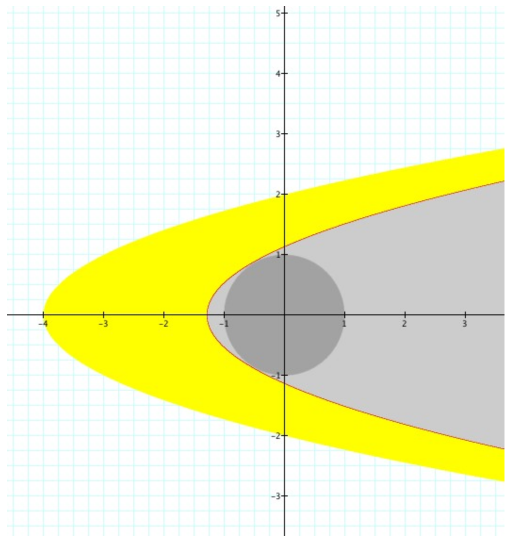
(3) • Sostituendo $t=\cos x$ (da cui $dt=-\sin x\,dx$) e ricordando $\sin 2x=2\sin x\cos x$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^{\cos^2 x})\sin 2x\,dx=\int_1^0(1-e^{t^2})(-2t\,dt)=\int_0^1 2t\,dt-\int_0^1 2t\,e^{t^2}\,dt=(t^2]_0^1-(e^{t^2}]_0^1=(1)-(0)-((e)-(1))=2-e\sim -0{,}7$.
• Sostituendo $x=t^2$ (da cui $dx=2t\,dt$) si ha $\int_0^1\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx=2\int\frac{t^4}{t+1}\,dt=2\int(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1})\,dt=2(\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+\log(t+1)]_0^1=2((\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\log 2)-(0))=2\log 2-\frac{7}{6}\sim 0{,}2$.

(4) (a) (Vedi Figura 2) La funzione $f(x,y)=1-\log(x-y^2+4)$ ha dominio dato da $x-y^2+4>0$, cioè $x>y^2-4$: si tratta della zona di piano compresa all'interno della parabola (esclusa) $x=y^2-4$ con asse parallelo all'asse x. Si ha $f(x,y)=0$ quando $\log(x-y^2+4)=1$, ovvero quando $x-y^2+4=e$, cioè $x=y^2-4+e$ (una parabola simile alla precedente, contenuta al suo interno), e $f(x,y)>0$ quando $\log(x-y^2+4)<1$, ovvero quando $x<y^2-4+e$, cioè la zona compresa tra le due parabole. La funzione è continua in tutto il dominio, dunque i limiti interessanti sono nei punti della parabola esterna (in essi il limite è $+\infty$) e in ∞_2 (che non esiste: infatti lungo la parabola interna la funzione è nulla mentre, come visto, avvicinandosi all'esterna diverge a $+\infty$). Le derivate parziali di f, che esistono e sono continue in tutto il dominio, sono $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{x-y^2+4}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x-y^2+4}$, pertanto l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1,2)$ è $z=f(1,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,(y-2)=1-1(x-1)+4(y-2)$, ovvero $x-4y+z+6=0$. I punti stazionari di f si ottengono da $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ma, poiché $\frac{\partial f}{\partial x}$ non si annulla mai, non ve ne sono.

(b) Il disco è un sottoinsieme compatto (chiuso e limitato) contenuto nel dominio di f, che è continua: dunque massimo e minimo assoluti esistono sul disco in base al teorema di Weierstrass. Tali estremi non possono essere assunti nei punti interni del disco: infatti un tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per f, ma abbiamo visto prima che non ve ne sono. Restano da esaminare i punti del bordo del disco (la circonferenza goniometrica), che sono parametrizzati da $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$, ove θ è l'angolo della stessa circonferenza goniometrica. Si ottiene allora $F(\theta):=f(\cos\theta,\sin\theta)=1-\log(\cos\theta-\sin^2\theta+4)$, la cui derivata $F'(\theta)=-\frac{-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta-\sin^2\theta+4}$ si annulla quando $\sin\theta(2\cos\theta+1)=0$, ovvero quando $\sin\theta=0$ (dunque $\theta=2k\pi$ oppure $\theta=\pi+2k\pi$) o quando $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ (dunque $\theta=\mp\frac{2\pi}{3}+2k\pi$): in tali punti si ha $F(2k\pi)=1-\log 5\sim -0{,}6$, $F(\pi+2k\pi)=1-\log 3\sim -0{,}1$ e $F(\mp\frac{2\pi}{3}+2k\pi)=1-\log\frac{11}{4}\sim -0{,}01)$, pertanto il massimo assoluto è $1-\log\frac{11}{4}$ e il minimo assoluto è $1-\log 5$.

(5) • L'equazione (i) $(x^2+4)y'=2y^2$ è a variabili separabili. A parte la soluzione nulla, separando le variabili si ottiene $y^{-2}\,dy=\frac{2}{x^2+4}\,dx$, da cui integrando si ha $-\frac{1}{y}=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+k$, da cui $y(x)=-\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+k}$ (al variare di $k\in\mathbb{R}$). La derivata $y'(x)=-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}}{(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+k)^2}=-\frac{2}{(x^2+4)(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+k)^2}$ non si annulla mai, dunque l'unica soluzione dell'equazione che ha un punto stazionario in $x=0$ è quella identicamente nulla. • L'equazione (ii) $y''-y=3-2e^x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'omogenea sono $y(x)=Ae^x+Be^{-x}$ con $A,B\in\mathbb{R}$; una soluzione particolare per 3 è la stessa costante $\tilde{y}_1(x)\equiv 3$, mentre una per $-2e^x$ è del tipo axe^x, e si trova $a=-1$, dunque le soluzioni dell'equazione completa sono $y(x)=(A-x)e^x+Be^{-x}+3$ con $A,B\in\mathbb{R}$. Derivando si ottiene $y'(x)=(A-x-1)e^x-Be^{-x}$, da cui la condizione $y'(0)=(A-1)-B=0$, ovvero $B=A-1$: dunque le soluzioni che hanno un punto stazionario in $x=0$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(x)=(A-x)e^x+(A-1)e^{-x}+3$ con $A\in\mathbb{R}$.





(1) Grafico di $f(x)$ nell'ex. 2. **(2)** Zone in cui $f(x, y)$ dell'ex. 4 è > 0 (giallo), < 0 (grigio) e $= 0$ (rosso). Il disco unitario appare più scuro.