Matematica – Prova d'esame

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

lunedì 23 febbraio 2009

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO

(1) Descrivere, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A(1,-2,1)$, $B(0,1,-1)$ e $C(2,3,0)$, e la retta r passante per A e B; trovato poi un vettore $\vec{v}$ ortogonale a Π, dire quanto vale l'area del parallelogrammo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}=(-1,3,1)$.

(2) (a) Studiare l'andamento[1] e tracciare il grafico di $f(x)=\dfrac{x\,e^x}{e^x-3}$.

(b) Un tale ha avuto in regalo 48 mq di piastrelle, e intende usarle per rivestire (completamente e senza avanzi) l'interno di una piscina di base quadrata che sta per costruire nel suo giardino. Quanto dovrebbe fare profonda la piscina se vuole che contenga il più possibile di acqua?

(3) Calcolare gli integrali (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+2}\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

(4) Determinare dominio, zeri, segno e limiti di $f(x,y)=(x-y^2)\log(x+2y)$, disegnando i risultati. Calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1,0)$. Trovare i punti stazionari e eventuali punti di massimo o minimo locale per f.

(5) Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali, dicendo se ve ne sono in comune:

$$\text{(i)}\quad (x+1)^2\,y' = 2y\sqrt{y}\ , \qquad \text{(ii)}\quad y''-2y'+2y=2x^2\ .$$

[1] Per lo studio della crescenza e della convessità si consiglia di fare un confronto grafico.

Soluzioni.

(1) L'equazione cartesiana di Π è data da $\det \begin{pmatrix} x-1 & y-(-2) & z-1 \\ 0-1 & 1-(-2) & -1-1 \\ 2-1 & 3-(-2) & 0-1 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $7x - 3y - 8z - 5 = 0$; un vettore ortogonale a Π è allora $\vec{v} = (7, -3, -8)$, e due vettori paralleli a Π e non tra loro sono $(1, -2, 1) - (0, 1, -1) = (1, -3, 2)$ e $(2, 3, 0) - (0, 1, -1) = (2, 2, 1)$ (si noti che sono entrambi ortogonali a $\vec{v}$), da cui la forma parametrica $\Pi = \{(1, -2, 1) + \alpha(1, -3, 2) + \beta(2, 2, 1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(1 + \alpha + 2\beta, -2 - 3\alpha + 2\beta, 1 + 2\alpha + \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Infine, il prodotto vettoriale di $\vec{v}$ e $\vec{w} = (-1, 3, 1)$ è $\vec{v} \wedge \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 7 & -3 & -8 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (21, 1, 18)$, dunque l'area del parallelogrammo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è $|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{21^2 + 1^2 + 18^2} = \sqrt{766}$.

(2) (a) (Vedi Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{x\,e^x}{e^x - 3}$ ha dominio dato da $e^x - 3 \neq 0$ ovvero $x \neq \log 3 \sim 1{,}1$; non ha simmetrie ne' periodi, ed è infinitamente derivabile ovunque. Si annulla solo in $x = 0$; il numeratore è positivo per $x > 0$, il denominatore per $x > \log 3$, dunque f è positiva per $x < 0$ oppure $x > \log 3$. I limiti notevoli sono $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ (poiché e^x tende a zero molto rapidamente, il numeratore tende a 0^- e il denominatore a -3), $\lim_{x \to \log 3^\mp} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (basta raccogliere e^x sopra e sotto). A $-\infty$ si ha dunque l'asintoto orizzontale $y = 0$; quanto a $+\infty$, essendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (raccogliere e^x sopra e sotto) e $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{e^x - 3} = 0^+$ si ha che $y = x$ è asintoto obliquo, e interseca il grafico di f solo in $x = 0$. Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 3(x+1))}{(e^x - 3)^2}$: si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $e^x \geq 3(x+1)$, e un confronto grafico tra le due funzioni mostra chiaramente che esistono due punti a e b con $a \sim -0{,}8$ e $b \sim 2{,}3$ tali che ciò accade se e solo se $x \leq a$ oppure $x \geq b$: pertanto, provenendo con x da $-\infty$, la funzione $f(x)$ cresce fino a $x = a$ in cui assume un massimo locale (con $f(a) \sim 0{,}1$), poi decresce a $-\infty$ quando x tende a $\log 3^-$, riparte da $+\infty$ quando x tende a $\log 3^+$, decresce fino a $x = b$ in cui assume un minimo locale (con $f(b) \sim 3{,}3$) e poi cresce di nuovo a $+\infty$ tendendo da sopra all'asintoto obliquo. Derivando ancora, dopo un po' di conti si ottiene $f''(x) = \frac{3e^x((x-2)e^x + 3(x+2))}{(e^x - 3)^3}$, e un altro confronto grafico (stavolta tra l'esponenziale e^x e l'omografica $-\frac{3(x+2)}{x-2}$) mostra che esiste un punto $c \sim -1{,}8$ tale che f è convessa per $x < c$ e per $x > \log 3$, con un flesso obliquo in $x = c$.

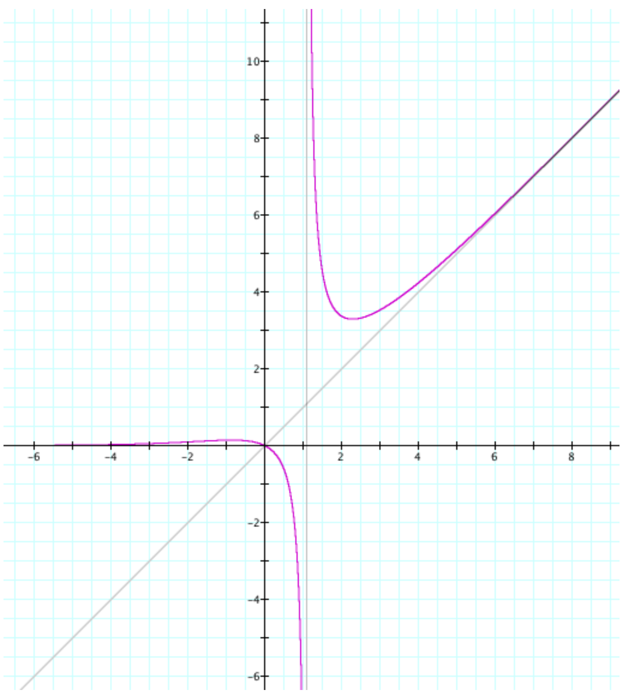
(b) Risolviamo il problema in generale per una qualsiasi superficie data S di piastrelle, e alla fine porremo $S = 48$ mq. Sia x la profondità della piscina, e sia ℓ il suo lato: dovendo essere $4\ell x + \ell^2 = S$ si ricava $\ell = \sqrt{4x^2 + S} - 2x$. Il volume è allora $V(x) = \ell^2 x = x(\sqrt{4x^2 + S} - 2x)^2$: derivando si ottiene $V'(x) = (\sqrt{4x^2 + S} - 2x)^2 + x\,2(\sqrt{4x^2 + S} - 2x)(\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + S}} - 2) = \frac{\sqrt{4x^2 + S} - 2x}{\sqrt{4x^2 + S}}(12x^2 + S - 6x\sqrt{4x^2 + S})$, ed essendo $V'(x) \geq 0$ per $x^2 \leq \frac{S}{12}$, ovvero per $x \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$, la piscina ha volume massimo quando è profonda $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$ (dunque ha lato $\sqrt{\frac{S}{3}}$), e tale volume è $V(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}) = \frac{1}{2}\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3}}$. Ad esempio se $S = 48$ mq la piscina è profonda 2 m, ha lato 4 m, e contiene 32 mc di acqua.

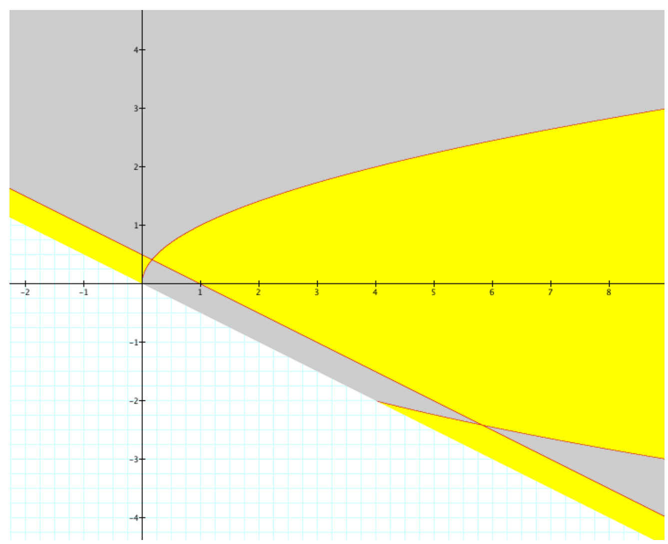
(3) • Posto $x = t^2$, da cui $dx = 2t\,dt$, si ha $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 2\sqrt{x} + 2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{t(t-2)}{t^2 - 2t + 2}\,dt = 2\int_0^1 (1 - \frac{2}{(t-1)^2 + 1})\,dt = 2(t - 2\text{arctg}\,(t-1))]_0^1 = 2 - 2(-2\text{arctg}\,(-1)) = 2 - 2\frac{\pi}{2} = 2 - \pi \sim -1{,}14$. • Integrando per parti si ha $\int (3x^2 + 1)\text{arctg}\,x\,dx = (x^3 + x)\text{arctg}\,x - \int \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}\,dx = (x^3 + x)\text{arctg}\,x - \int x\,dx = (x^3 + x)\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}x^2 + k$, dunque $\int_0^1 (3x^2 + 1)\text{arctg}\,x\,dx = ((x^3 + x)\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}x^2]_0^1 = (2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) - (0) = \frac{\pi - 1}{2} \sim 1{,}1$.

(4) (Vedi Figura 2) La funzione $f(x, y) = (x - y^2)\log(x + 2y)$ ha dominio dato da $x + 2y > 0$: si tratta dei punti che stanno sopra la retta (esclusa) $x + 2y = 0$. Si ha $f(x, y) = 0$ sui punti della parabola $x = y^2$ che stanno nel dominio (poiché retta e parabola si intersecano in $O(0, 0)$ e in $A(4, -2)$, tali punti sono quelli con $y < -2$ e quelli con $y > 0$) e sui punti della retta $x + 2y = 1$; il fattore $x - y^2$ è positivo dentro la parabola e negativo fuori, il fattore $\log(x + 2y)$ è positivo sopra la retta $x + 2y = 1$ e negativo fuori, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è continua in tutto il dominio, dunque i limiti interessanti sono in ∞_2 e nei punti della retta $x + 2y = 0$. In ∞_2 il limite non esiste: infatti tendendovi lungo la retta $x + 2y = 1$ esso dovrebbe essere nullo, ma ad esempio sull'asse x si ha $f(x, 0) = x\log x$, che tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$. Nei punti della retta $x + 2y = 0$ diversi da O e da A il limite vale ∞, più precisamente vale $+\infty$ se hanno $y < -2$ oppure $y > 0$ e vale $-\infty$ quando $-2 < y < 0$; in O e A il limite non esiste, perché tendendo a loro lungo la parabola $x = y^2$ dovrebbe essere nullo, ma in ogni loro intorno vi sono altri punti della retta $x + 2y = 0$ in cui f tende a ∞. Le derivate parziali di f, che esistono e sono continue in tutto il dominio, sono $\frac{\partial f}{\partial x} = \log(x + 2y) + \frac{x - y^2}{x + 2y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\log(x + 2y) + 2\frac{x - y^2}{x + 2y}$: pertanto l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1, 0)$ è $z = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)\,(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)\,(y - 0) = 0 + 1(x - 1) + 2(y - 0)$, ovvero $x + 2y - z - 1 = 0$. I punti stazionari di f si ottengono dal sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$: dalla prima equazione si ottiene $\frac{x - y^2}{x + 2y} = -\log(x + 2y)$, che messo nella seconda dà $-2y\log(x + 2y) - 2\log(x + 2y) = 0$, ovvero $(y + 1)\log(x + 2y) = 0$, ovvero $y = -1$ oppure

$\log(x+2y)=0$ (cioè $x=1-2y$). Se $y=-1$ si ricava $\frac{x-1}{x-2}=-\log(x-2)$, che un semplice confronto grafico mostra essere senza soluzioni; se invece $x=1-2y$ si ricava $(1-2y)-y^2=0$, da cui $y=\mp\sqrt{2}-1$, dunque i punti $B(3-2\sqrt{2},\sqrt{2}-1)$ e $C(3+2\sqrt{2},-\sqrt{2}-1)$ (si noti che questi sono precisamente i punti d'intersezione tra la parabola $x=y^2$ e la retta $x+2y=1$). Gli unici candidati a essere punti di massimo o minimo locale sono perciò i punti stazionari B e C, ma lo studio del segno di f mostra chiaramente che essi non sono ne' di massimo ne' di minimo (infatti in essi f si annulla, e al loro intorno vi sono punti in cui f è positiva e altri in cui è negativa); ciò viene confermato, con qualche paziente calcolo, anche dal criterio dell'hessiano.

(5) • L'equazione (i) $(x+1)^2\,y'=2y\sqrt{y}$ è a variabili separabili. Oltre alla soluzione costante nulla $y=0$, separando le variabili si ottiene $y^{-\frac{3}{2}}\,dy=2(x+1)^{-2}\,dx$, da cui integrando si ha $-\frac{2}{\sqrt{y}}=-\frac{2}{x+1}+k$ (con la condizione $-\frac{2}{x+1}+k<0$, che se $k>0$ equivale a $-1<x<-1+\frac{2}{k}$, se $k=0$ equivale a $x>-1$ e se $k<0$ equivale a $x<-1+\frac{2}{k}$ oppure $x>-1$), e ricavando y si trova $y(x)=(\frac{2(x+1)}{2-k(x+1)})^2$ al variare di $k\in\mathbb{R}$ (la funzione $y(x)$ è definita per gli x appena descritti caso per caso). • L'equazione (ii) $y''-2y'+2y=2x^2$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'omogenea sono $y(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)$ con $A,B\in\mathbb{R}$; una soluzione particolare è del tipo ax^2+bx+c, e si trova $a=c=1$ e $b=2$, dunque le soluzioni dell'equazione completa sono $y(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)+(x+1)^2$ con $A,B\in\mathbb{R}$. • L'unica soluzione in comune tra le due equazioni è $y(x)=(x+1)^2$, ottenuta da (i) con $k=0$ e da (ii) con $A=B=0$ (tuttavia, come visto, per (i) tale soluzione è da considerare solo per $x>-1$).





(1) Grafico di $f(x)$ nell'ex. 2. **(2)** Zone in cui la funzione f dell'ex. 4 è >0 (giallo), <0 (grigio) e $=0$ (rosso).