Matematica – Prova d'esame

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie A.I. - A.A. 2008/09

lunedì 9 febbraio 2009

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO

(1) Nello spazio tridimensionale sono dati i vettori $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 3)$. Descrivere, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $A(1, -2, 1)$ e ortogonale a $\vec{v}$; quanto dista l'origine da Π? Decomporre poi $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, con $\vec{v}_1$ parallelo e $\vec{v}_2$ ortogonale a $\vec{u}$.

(2) Studiare l'andamento[(1)] e tracciare il grafico di $f(x) = \sqrt{2\sin^2 x + 1} - \sqrt{2}\cos x$.

(3) (a) Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_1^e \frac{\log^2 x}{x(\log x + 1)}\, dx$ e $\displaystyle\int_{-1}^0 \big((3x+1)e^{2x} - 1\big)\, dx$.

(b) Disegnare e calcolare l'area di $S = \{(x, y) : (x^3 + y)(x^2 + 1 - 2y) \geq 0\,,\ |x| + |y| \leq 2\}$.

(4) Sia $f(x, y) = (x - 2)(\sqrt{xy + 2} - 1)$.

(a) Determinare dominio, zeri, segno e limiti di f, disegnando i risultati. Calcolare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1, -1)$. Trovare i punti stazionari e eventuali punti di massimo o minimo locale per f.

(b) Dire perché f ammette massimo e minimo assoluti sul quadrato $K = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 0,\ -2 \leq y \leq 0\}$, e calcolarli.

(5) Siano date le equazioni differenziali (i) $y' = 2xy(y + 1)$, (ii) $2y'' - y' - y = x - 3e^x$.

(a) Studiare a priori la crescenza delle soluzioni di (i).

(b) Trovare tutte le soluzioni di (i) e tutte le soluzioni di (ii) i cui grafici passano per $(0, -2)$.

[(1)] Non è richiesto lo studio della convessità.

Soluzioni.

(1) L'equazione cartesiana di Π, ortogonale a $\vec{v}=(2,1,3)$, sarà del tipo $2x+y+3z+k=0$, e imponendo il passaggio per $A(1,-2,1)$ si ha $k=-3$: dunque la forma cartesiana sarà $2x+y+3z-3=0$. Due vettori ortogonali a $\vec{v}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono $(1,-2,0)$ e $(0,3,-1)$, dunque si ha la forma parametrica $\Pi=\{(1,-2,1)+\alpha(1,-2,0)+\beta(0,3,-1):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{(1+\alpha,-2-2\alpha+3\beta,1-\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. La distanza dell'origine da Π è $\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0+3\cdot 0-3|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$. La proiezione di $\vec{v}$ lungo $\vec{u}=(1,0,-1)$ è $\vec{v}_1=(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}})\vec{u}=\frac{-1}{2}(1,0,-1)=(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, e dunque $\vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1=(\frac{5}{2},1,\frac{5}{2})$ (si noti che $\vec{v}_2$ è ortogonale a $\vec{u}$).

(2) (Vedi Figura 1) La funzione $f(x)=\sqrt{2\sin^2 x+1}-\sqrt{2}\cos x$ ha dominio $\mathbb{R}$, è pari e ha periodo 2π, dunque la potremo studiare in $[0,\pi]$; poiché l'argomento della radice è sempre >0, essa è infinitamente derivabile ovunque. Si ha $f(0)=-(\sqrt{2}-1)$ e $f(\pi)=\sqrt{2}+1$; vale $f(x)=0$ quando $\sqrt{2\sin^2 x+1}=\sqrt{2}\cos x$, ovvero (nell'ipotesi $\cos x\geq 0$, ovvero $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$) quando $2\sin^2 x+1=2\cos^2 x$, cioè $\sin^2 x=\frac{1}{4}$, cioè $\sin x=\mp\frac{1}{2}$, cioè (per $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$) per $x=\frac{\pi}{6}$; quanto a $f(x)>0$, ciò equivale a $\sqrt{2\sin^2 x+1}>\sqrt{2}\cos x$, che quando $\cos x<0$ (ovvero per $\frac{\pi}{2}<x<\pi$) è sempre vero, mentre per $\cos x\geq 0$ (ovvero per $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$) equivale a $\sin^2 x>\frac{1}{4}$, cioè $\sin x>\frac{1}{2}$, cioè $\frac{\pi}{6}<x\leq\frac{\pi}{2}$. Derivando si trova $f'(x)=\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+1}}+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\sin x(\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+1}}+1)$, pertanto vale $f'(x)=0$ quando $\sin x=0$ (ovvero per $x=0$ o $x=\pi$) oppure quando $\sqrt{2\sin^2 x+1}=-\sqrt{2}\cos x$, che nell'ipotesi $\cos x<0$ (ovvero per $\frac{\pi}{2}<x<\pi$) equivale di nuovo a $2\sin^2 x+1=2\cos^2 x$, cioè $\sin^2 x=\frac{1}{4}$, cioè $\sin x=\mp\frac{1}{2}$, cioè (per $\frac{\pi}{2}<x<\pi$) per $x=\frac{5\pi}{6}$. Studiando poi il segno della derivata, in $]0,\pi[$ si ha sempre $\sin x>0$, dunque vale $f'(x)>0$ se e solo se $\sqrt{2\sin^2 x+1}>-\sqrt{2}\cos x$: se $\cos x>0$ (ovvero per $0<x<\frac{\pi}{2}$) ciò è vero, mentre per $\cos x\leq 0$ (ovvero per $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$) ciò equivale a $2\sin^2 x+1>2\cos^2 x$, ovvero $\sin^2 x>\frac{1}{4}$, cioè $\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{5\pi}{6}$. Ne ricaviamo che in $[0,\pi]$ la funzione cresce da $x=0$ a $x=\frac{5\pi}{6}$ e poi decresce fino a $x=\pi$: pertanto, considerata la simmetria, essa ha un punto di minimo locale (in realtà globale) in $x=0$, con $f(0)=-(\sqrt{2}-1)$, un punto di massimo locale (in realtà globale) in $x=\frac{5\pi}{6}$, con $f(\frac{5\pi}{6})=\sqrt{6}\sim 2{,}45$, e un altro punto di minimo locale in $x=\pi$, con $f(\pi)=\sqrt{2}+1\sim 2{,}41$.

(3) • Posto $\log x=t$, da cui $\frac{1}{x}\,dx=dt$, si ha $\int_1^e\frac{\log^2 x}{x(\log x+1)}\,dx=\int_0^1\frac{t^2}{t+1}\,dt=\int_0^1(t-1+\frac{1}{t+1})\,dt=(\frac{t^2}{2}-t+\log|t+1|]_0^1=(\frac{1}{2}-1+\log 2)-(0)=\log 2-\frac{1}{2}\sim 0{,}2$. • Separando la somma e integrando per parti si ha $\int_{-1}^0\big((3x+1)e^{2x}-1\big)\,dx=((3x+1)\frac{1}{2}e^{2x}]_{-1}^0-\int_{-1}^0 3\frac{1}{2}e^{2x}\,dx-(x]_{-1}^0=(\frac{1}{2})-(-\frac{1}{e^2})-\frac{3}{4}(e^{2x}]_{-1}^0-(0)+(-1)=-\frac{1}{4}(5-\frac{7}{e^2})\sim -1$.

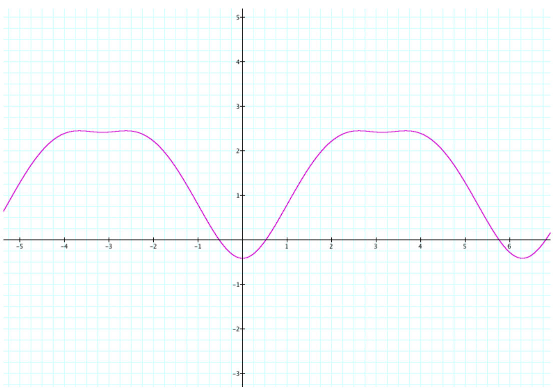
(b) (Vedi Figura 2) L'area di S risulta $\int_{-1}^1\frac{1}{2}(x^2+1)\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx+\int_2^1(x-2)\,dx+\int_1^{-1}(-x^3)\,dx=(\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3+x)]_{-1}^1+(2x-\frac{1}{2}x^2]_1^2+(\frac{1}{2}x^2-2x]_2^1+(-\frac{1}{4}x^4]_1^{-1}=(\frac{2}{3})-(-\frac{2}{3})+(2)-(\frac{3}{2})+(-\frac{3}{2})-(-2)+(-\frac{1}{4})-(-\frac{1}{4})=\frac{7}{3}\sim 2{,}33$.

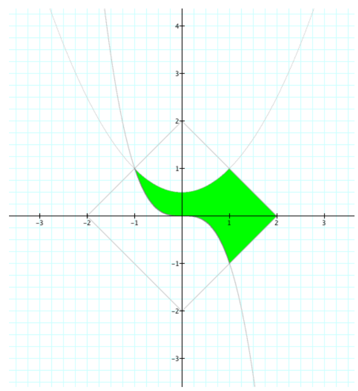
(4) (a) (Vedi Figura 3) La funzione $f(x,y)=(x-2)(\sqrt{xy+2}-1)$ ha dominio dato da $xy\geq -2$: si tratta dei punti compresi tra i due rami (inclusi) dell'iperbole equilatera $xy=-2$, nel secondo e quarto quadrante. Si ha $f(x,y)=0$ sulla retta verticale $x=2$ oppure sui punti dell'iperbole $xy=-1$; il fattore $x-2$ è positivo alla destra della retta, il fattore $\sqrt{xy+2}-1$ è positivo all'interno dei rami dell'iperbole $xy=-1$, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è continua in tutto il dominio; l'unico limite interessante è quello in ∞_2, che non esiste (tendendovi verso l'alto lungo la retta $x=2$, sulla quale f è nulla, il limite dovrebbe essere 0; ma ad esempio sull'asse y si ha costantemente $f(0,y)=-2(\sqrt{2}-1)\neq 0$). Le derivate parziali di f, che esistono in tutto il dominio tranne che sui rami dell'iperbole $xy=-2$, sono $\frac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{xy+2}-1+(x-2)\frac{y}{2\sqrt{xy+2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=(x-2)\frac{x}{2\sqrt{xy+2}}$: pertanto l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f sopra $(1,-1)$ è $z=f(1,-1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)\,(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\,(y-(-1))=0+\frac{1}{2}(x-1)+(-\frac{1}{2})(y+1)$, ovvero $x-y-2z-2=0$. I punti stazionari di f si ottengono dal sistema $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$: da $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ si ottiene $x=0$ oppure $x=2$; nel primo caso si trova $y=2-\sqrt{2}$ (dunque il punto $A(0,2-\sqrt{2})$), e nel secondo si ha $y=-\frac{1}{2}$ (dunque il punto $B(2,-\frac{1}{2})$).

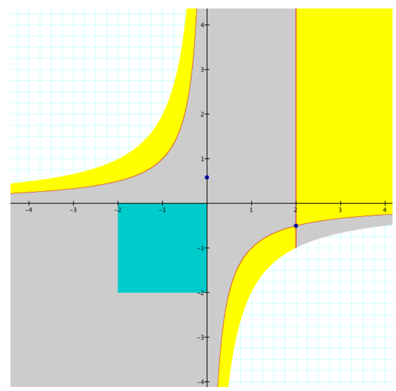
(b) (Vedi Figura 3) L'insieme $K=\{(x,y):-2\leq x\leq 0,\,-2\leq y\leq 0\}$ è il quadrato (pieno) di vertici $O(0,0)$, $P(-2,0)$, $Q(0,-2)$ e $R(-2,-2)$: trattandosi di un insieme chiuso e limitato interamente contenuto nel dominio, f (che è continua) vi ammette massimo e minimo assoluti in base al teorema di Weierstrass. Per la ricerca, dividiamo K nei suoi estremi P, Q, R e O, nei suoi quattro lati senza estremi e nei suoi punti interni. Per iniziare, gli estremi non possono essere assunti in nessun punto interno: infatti un tale punto dovrebbe essere anche stazionario, ma gli unici due (cioè A e B) non stanno in K. Nel lato sull'asse x la funzione vale $f(x,0)=(x-2)(\sqrt{2}-1)$, la cui derivata rispetto x non si annulla mai: dunque nessun punto può essere estremante per f. Sul lato sull'asse y la funzione è la costante $f(0,y)=-2(\sqrt{2}-1)$, di cui teniamo conto. Sul lato con $x=-2$ e $-2<y<0$ si ha $f(-2,y)=-4(\sqrt{-2y+2}-1)$, la cui derivata rispetto y non si annulla mai. Sul lato con $y=-2$ e $-2<x<0$ si ha $f(x,-2)=(x-2)(\sqrt{-2x+2}-1)$, la cui derivata rispetto x vale $\sqrt{-2x+2}-1+(x-2)\frac{-1}{\sqrt{-2x+2}}=-\frac{\sqrt{2-2x}-(4-3x)}{\sqrt{2-2x}}$ e si annulla quando $\sqrt{2-2x} = 4-3x$, che per $-2 < x < 0$ equivale a $2-2x = (4-3x)^2$, ovvero $9x^2-22x+14 = 0$, privo di soluzioni reali. Infine, nei vertici si ha $f(P) = -4(\sqrt{2}-1)$, $f(R) = -4(\sqrt{6}-1)$, e $f(Q) = f(O) = -2(\sqrt{2}-1)$. In sostanza, il minimo assoluto di f su K è $-4(\sqrt{6}-1)$ (assunto in R), mentre il massimo assoluto è $-2(\sqrt{2}-1)$ (assunto su tutto il tratto sull'asse y): si noti che entrambi questi valori sono negativi, e infatti K è tutto contenuto nella zona in cui f è negativa.

(5) (a) L'equazione $y' = 2xy(y+1)$ è del primo ordine a variabili separabili. Le soluzioni di (i) saranno crescenti ove $y' = 2xy(y+1) > 0$, ovvero quando $x > 0$ per $y < -1$ e $y > 0$, e quando $x < 0$ per $-1 < y < 0$; in ogni caso in $x = 0$ si avrà un punto di estremo locale.

(b) La condizione richiesta equivale a $y(0) = -2$. Per (i), separando le variabili si ottiene $\frac{1}{y(y+1)}\,dy = 2x\,dx$, da cui integrando si ottiene $\log\left|\frac{y}{y+1}\right| = x^2+k$, e la condizione assegnata dà $k = \log 2$: pertanto si ha $\log\left|\frac{y}{y+1}\right| = x^2+\log 2$, da cui $\left|\frac{y}{y+1}\right| = 2e^{x^2}$, da cui (dovendo essere $y(0) = -2$) si ha $\frac{y}{y+1} = 2e^{x^2}$, da cui l'unica soluzione $y(x) = -\frac{2e^{x^2}}{2e^{x^2}-1}$ (che, si noti, in $x = 0$ ha il minimo assoluto -2). Per (ii), che è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, le soluzioni dell'omogenea sono $y(x) = Ae^x + Be^{-\frac{x}{2}}$ con $A, B \in \mathbb{R}$; una soluzione particolare per x è del tipo $ax+b$, e si trova $1-x$; una soluzione particolare per $-3e^x$ è del tipo kxe^x, e si trova $-xe^x$; le soluzioni dell'equazione completa sono allora $y(x) = (A-x)e^x + Be^{-\frac{x}{2}} + 1 - x$ con $A, B \in \mathbb{R}$, e imponendo $y(0) = -2$ si ottiene $B = -A-3$. Pertanto le soluzioni richieste sono del tipo $y(x) = (A-x)e^x + (-A-3)e^{-\frac{x}{2}} + 1 - x$ con $A \in \mathbb{R}$.







(1) Grafico di $f(x)$ nell'ex. 2. **(2)** L'insieme S di (3.b). **(3)** Zone in cui la funzione f dell'ex. 4 è > 0 (giallo), < 0 (grigio) e $= 0$ (rosso); il quadrato K è in azzurro.