UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (A)

San Floriano, 21/02/2019

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: __________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta dal n. 2 al n. 5 + 3 quesiti a scelta dal n. 6 al n. 10

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (____/6)

Studiare la funzione $f(x)=(2-x)e^{\frac{x}{2}}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver trovato anche le coordinate del punto di flesso, se ne disegni il grafico.

QUESITO 2 (____/5)
Sia $f(x)=e^{3x}+x^2$, si consideri $g(x)=f(x)-f(-x)$. Verificare che $g(x)$ è una funzione dispari e determinare l'equazione della tangente al grafico di $g(x)$ nel suo punto di ascissa nulla.

QUESITO 3 (____/5)
Calcolare i seguenti limiti, senza utilizzare il teorema di de l'Hospital.

a) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\ln(3x+1)}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-4}$

QUESITO 4 (_____/5)

Una popolazione di carpe è modellizzata mediante una funzione del tipo

$$N(t)=\frac{A}{1+24e^{-\alpha t}}$$

ove il tempo è espresso in mesi. Determinare:

a) il valore dei parametri reali A,α sapendo che all'inizio dello studio la popolazione è composta da 400 individui e che la popolazione è triplicata in 12 mesi;
b) la capacità ambientale, cioè il numero massimo di esemplari che l'ambiente è potenzialmente in grado di ospitare;
c) il tasso istantaneo di crescita della popolazione all'inizio dello studio e dopo 12 mesi.

QUESITO 5 (_____/5)

Studiare la derivabilità della funzione $f(x)=\dfrac{\left|e^x-1\right|}{x^2+1}$ per $x=0$.

Parte B

QUESITO 6 (_____/5)

Date le matrici $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ calcolare il prodotto $C=A\cdot B$.

Determinare il rango di C.

QUESITO 7 (_____/5)

Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y'=x\cdot e^{2x}\\y(0)=1\end{cases}$. Detta $f(x)$ la soluzione trovata, calcolare il $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

QUESITO 8 (_____/5)

Risolvere i sistemi lineari:

a) $\begin{cases}x-y-z=0\\x-3y-2z=0\\2y+z=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+y+3z=7\\2x+y-3z=-5\\y+3z=-5\end{cases}$

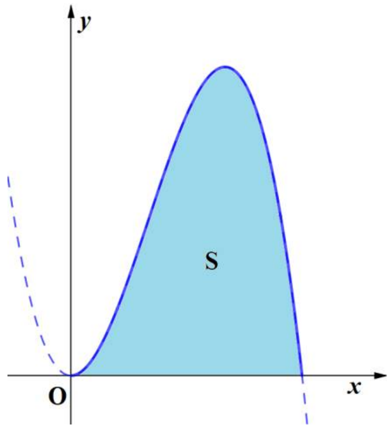
QUESITO 9 (_____/5)

Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 50% degli insetti che sono nel primo mese di vita non raggiunge il secondo mese e solo il 25% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Inoltre, gli insetti diventano fertili solo nel secondo mese; ogni insetto nel secondo mese di vita ne genera altri 4 e ciascuno di quelli arrivati al terzo mese ne genera un altro.

a) Disegnare il grafo di vita e trovare la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione.
b) In un dato istante, la popolazione è costituita da 720 insetti nel primo mese, 100 nel secondo mese e 40 nel terzo. Come evolve la popolazione nel mese successivo? Qual era la composizione all'inizio del periodo precedente?

QUESITO 10 (____/5)

Determinare il valor medio della funzione $f(x) = 4x^2 - 2x^3$, il cui grafico è rappresentato in figura a fianco, nell'intervallo delimitato dai suoi zeri.
Calcolare, inoltre, il volume del solido generato da una rotazione della regione S intorno all'asse y.

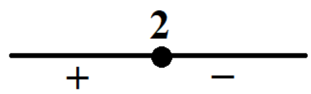


PUNTEGGIO TOTALE: ______/30

Traccia sintetica di soluzione – A

N. 1

- La funzione $f(x)=(2-x)e^{\frac{x}{2}}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, poiché è prodotto di funzioni ivi continue.
- PARITÀ: $f(-x)=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$ è diversa sia da $-f(x)=(x-2)e^{\frac{x}{2}}$ che da $f(x) \Rightarrow f(x)$ non è né pari né dispari
- SEGNO ED INTERSEZIONE CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{x}{2}}\geq 0 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow 2-x\geq 0$, essendo $e^{\frac{x}{2}}>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$f(0)=(2-0)e^{0}=2$

$\Rightarrow$ la funzione taglia gli assi cartesiani in $(2,0)$ e $(0,2)$

- LIMITI ED ASINTOTI:

$$\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^{\frac{x}{2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x}{x}e^{\frac{x}{2}}=-\infty$$

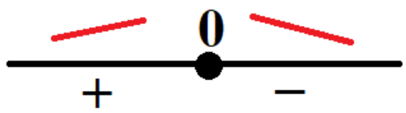
$\Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(2-x)e^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-\frac{x}{2}}}=_H\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}=0$$

$\Rightarrow$ asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to-\infty$

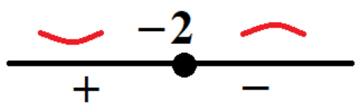
- MONOTONIA:

$$f'(x)=-e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(2-x)=e^{\frac{x}{2}}\left[-1+1-\frac{x}{2}\right]=-e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}\geq 0$$



$\Rightarrow$ Max in $(0,2)$

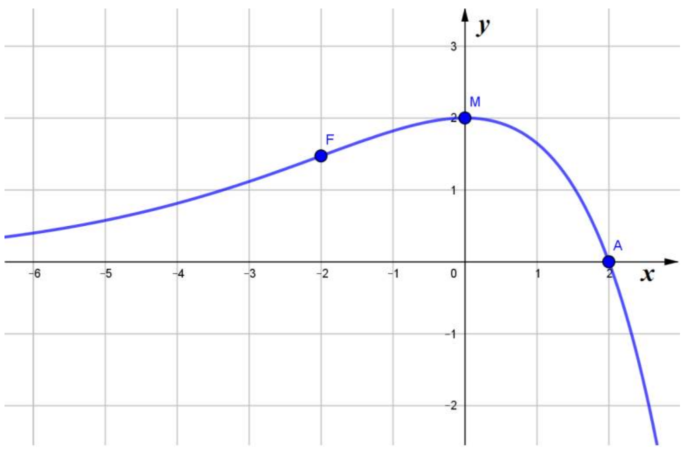
- CONCAVITÀ:



$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot x+e^{\frac{x}{2}}\right]=-\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+2)\geq 0$$

$f(-2)=4e^{-1}\Rightarrow$ Flesso in $\left(-2,4e^{-1}\right)$

GRAFICO:



N. 2

$f(x) = e^{3x} + x^2$

Quindi:

$$g(x) = f(x) - f(-x) = e^{3x} + x^2 - e^{-3x} - x^2 = e^{3x} - e^{-3x}$$

Verifica disparità:

$$g(-x) = e^{-3x} - e^{3x} = -\left(e^{3x} - e^{-3x}\right) = -g(x)$$

$\Rightarrow g(x)$ è dispari

- $g(0) = e^0 - e^0 = 0$
- $g'(x) = 3e^{3x} + 3e^{-3x} \Rightarrow m = g'(0) = 3 + 3 = 6$

$\Rightarrow$ la tangente cercata è $y = 6x$

N. 3

a) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right)} = \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} = \dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{\ln(3x + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{x} \cdot \dfrac{x}{\ln(3x + 1)} = \lim\limits_{x \to 0} -2 \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \dfrac{3x}{\ln(3x + 1)} \cdot \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x - 6)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 6}{x + 2} = -\dfrac{4}{4} = -1$

N. 4

$N(t) = \dfrac{A}{1 + 24e^{-\alpha t}}$

- $N(0) = \dfrac{A}{1 + 24e^0} = \dfrac{A}{25} = 400 \Rightarrow A = 10000$

$\Rightarrow N(t) = \dfrac{10000}{1 + 24e^{-\alpha t}}$

- $N(12) = \dfrac{10000}{1 + 24e^{-12\alpha}} = 1200 \Rightarrow 25 = 3\left(1 + 24e^{-12\alpha}\right) \Rightarrow 22 = 72e^{-12\alpha} \Rightarrow e^{-12\alpha} = \dfrac{11}{36} \Rightarrow$

  $\Rightarrow -12\alpha = \ln\left(\dfrac{11}{36}\right) \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{36}{11}\right) \simeq 0.098802$

La capacità ambientale è:

$$\lim_{x \to +\infty} N(t) = \lim_{x \to +\infty} \frac{10000}{1 + 24e^{-\alpha t}} = 10000$$

Per calcolare il tasso istantaneo di crescita della popolazione dobbiamo valutare la derivata prima della funzione $N(t) = 10000\left(1 + 24e^{-\alpha t}\right)^{-1}$.

$$N'(t) = -10000\left(1 + 24e^{-\alpha t}\right)^{-2}\left(-24\alpha e^{-\alpha t}\right) = 2.4 \cdot 10^5 \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\left(1 + 24e^{-\alpha t}\right)^2}$$

- $N'(0) = 2.4 \cdot 10^5 \dfrac{\alpha e^0}{\left(1+24e^0\right)^2} = \dfrac{2.4 \cdot 10^5 \alpha}{625} = \ldots = 32 \ln\left(\dfrac{36}{11}\right) \simeq 37.94 \dfrac{pesci}{mese}$
- $N'(12) = 2.4 \cdot 10^5 \dfrac{\alpha e^{-12\alpha}}{\left(1+24e^{-12\alpha}\right)^2}$

  Dal momento che $\alpha = \dfrac{1}{12} \ln\left(\dfrac{36}{11}\right)$ risulta $12\alpha = \ln\left(\dfrac{36}{11}\right)$ e quindi $e^{-12\alpha} = \left(e^{12\alpha}\right)^{-1} = \left(\dfrac{36}{11}\right)^{-1} = \dfrac{11}{36}$.

  Pertanto:

$$N'(12) = \frac{24 \cdot 10^4 \alpha \cdot \dfrac{11}{36}}{\left(1+24 \cdot \dfrac{11}{36}\right)^2} = \frac{\dfrac{22}{3} \cdot 10^4 \alpha}{\left(1+\dfrac{22}{3}\right)^2} = \frac{9}{625} \cdot \frac{22}{3} \cdot 10^4 \alpha = 66 \cdot 16 \cdot \frac{1}{12} \ln\left(\frac{36}{11}\right) = 88 \ln\left(\frac{36}{11}\right) \simeq$$

$$\simeq 104.33 \frac{pesci}{mese}$$

N. 5

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\left|e^x - 1\right|}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x^2+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{1-e^x}{x^2+1} & x < 0 \end{cases}$

Calcoliamo la derivata di $y = \dfrac{e^x-1}{x^2+1}$:

$$y' = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - 2x\left(e^x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x\left(x-1\right)^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Quindi:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x\left(x-1\right)^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2} & x \geq 0 \\ -\dfrac{e^x\left(x-1\right)^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2} & x < 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x\left(x-1\right)^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{e^0\left(-1\right)^2+0}{\left(0+1\right)^2} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{e^x\left(x-1\right)^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{e^0\left(-1\right)^2+0}{\left(0+1\right)^2} = -1$

$\Rightarrow$ la funzione ha un punto angoloso in $x = 0$

N. 6

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dal momento che:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 21 - (3+8) = 10 \neq 0$$

concludiamo che $rg(C) = 3$

N. 7

$$\begin{cases} y' = x \cdot e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Integrando per parti, calcoliamo $\int x \cdot e^{2x} dx = \frac{x}{2} \cdot e^{2x} - \int \frac{1}{4} \cdot 2e^{2x} dx = \frac{x}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + c$

$$y(0) = \frac{0}{2} \cdot e^0 - \frac{1}{4} \cdot e^0 + c = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{5}{4}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{e^{2x}(2x-1)+5}{4}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x}(2x-1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{e^{-2x}} =_H \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-2e^{-2x}} = 0$$

e pertanto

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}(2x-1)+5}{4} = \frac{5}{4}$$

N. 8

a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ sottraendo membro a membro la 2° equazione dalla 1° otteniamo:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2y = 0 \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

Soluzioni:

$(-y, y, -2y)$, per ogni $y \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + y - 3z = -5 \\ y + 3z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$ sottraendo membro a membro la 2° equazione dalla 1° otteniamo:

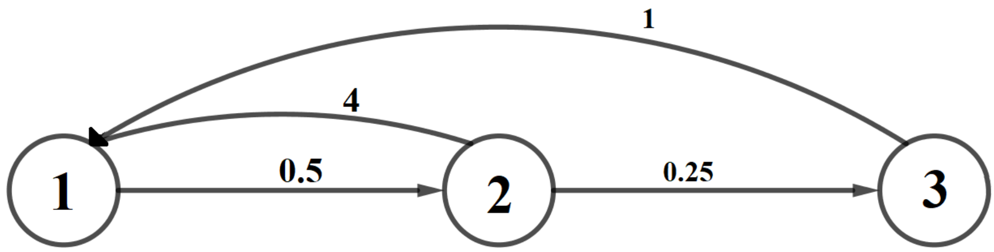
$$\begin{cases}2x+y+3z=7\\6z=12\\y+3z=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+6=7\\z=2\\y+6=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-11+6=7\\z=2\\y=-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=12\\z=2\\y=-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\z=2\\y=-11\end{cases}$$

Soluzione:

$$(6,-11,2)$$

N. 9

Il grafo di vita è:



Da questo si deduce facilmente la matrice di Leslie della popolazione:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\0.5 & 0 & 0\\0 & 0.25 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$$

È noto che $\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix}720\\100\\40\end{pmatrix}$. Allora

$$\overrightarrow{N}_{t+1}=A\cdot\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}720\\100\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}440\\360\\25\end{pmatrix}$$

Per determinare $\overrightarrow{N}_{t-1}$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases}4y+z=720\\\frac{x}{2}=100\\\frac{y}{4}=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}640+z=720\\x=200\\y=160\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=80\\x=200\\y=160\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{N}_{t-1}=\begin{pmatrix}200\\160\\80\end{pmatrix}$$

N. 10

Calcoliamo gli zeri della funzione $f(x)=4x^2-2x^3$:

$$4x^2-2x^3=0 \Leftrightarrow 2x^2(2-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2$$

$\Rightarrow$ Il valor medio è:

$$v.m.=\frac{\int_0^2 f(x)\,dx}{2-0}=\frac{\int_0^2\left(4x^2-2x^3\right)dx}{2}=\frac{2\int_0^2\left(2x^2-x^3\right)dx}{2}=\int_0^2\left(2x^2-x^3\right)dx=$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{16}{3}-\frac{16}{4}=16\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

Per calcolare il volume del solido richiesto, utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici:

$$dV=2\pi x\cdot f(x)\,dx$$

e quindi

$$V=2\pi\int_0^2 x\cdot f(x)\,dx=4\pi\int_0^2\left(2x^3-x^4\right)dx=2\pi\left[x^4-\frac{2x^5}{5}\right]_0^2=2\pi\left(16-\frac{64}{5}\right)=\frac{32}{5}\pi\,u^3$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (B)

San Floriano, 21/02/2019

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: __________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta dal n. 2 al n. 5 + 3 quesiti a scelta dal n. 6 al n. 10

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (____/6)

Studiare la funzione $f(x)=(x+3)e^{-\frac{x}{3}}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver trovato anche le coordinate del punto di flesso, se ne disegni il grafico.

QUESITO 2 (____/5)

Sia $f(x)=x^2+e^{2x}$, si consideri $g(x)=f(-x)-f(x)$. Verificare che $g(x)$ è una funzione dispari e determinare l'equazione della tangente al grafico di $g(x)$ nel suo punto di ascissa nulla.

QUESITO 3 (____/5)

Calcolare i seguenti limiti, senza utilizzare il teorema di de l'Hospital.

a) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{\ln(2x+1)}$ c) $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-36}$

QUESITO 4 (____/5)

Una popolazione di carpe è modellizzata mediante una funzione del tipo

$$N(t)=\frac{A}{1+24e^{-\alpha t}}$$

ove il tempo è espresso in mesi. Determinare:

a) il valore dei parametri reali A,α sapendo che all'inizio dello studio la popolazione è composta da 500 individui e che la popolazione è triplicata in 12 mesi;
b) la capacità ambientale, cioè il numero massimo di esemplari che l'ambiente è potenzialmente in grado di ospitare;
c) il tasso istantaneo di crescita della popolazione all'inizio dello studio e dopo 12 mesi.

QUESITO 5 (____/5)

Studiare la derivabilità della funzione $f(x)=\frac{|e^{3x}-1|}{x^2+2}$ per $x=0$.

Parte B

QUESITO 6 (____/5)

Date le matrici $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ calcolare il prodotto $C=A\cdot B$.

Determinare il rango di C.

QUESITO 7 (____/5)

Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y'=x\cdot e^{-3x}\\y(0)=1\end{cases}$. Detta $f(x)$ la soluzione trovata, calcolare il $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

QUESITO 8 (____/5)

Risolvere i sistemi lineari:

a) $\begin{cases}x+y=0\\x-3y-2z=0\\4x+2y-z=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y+3z=5\\2x+y-3z=-5\\y+3z=-5\end{cases}$

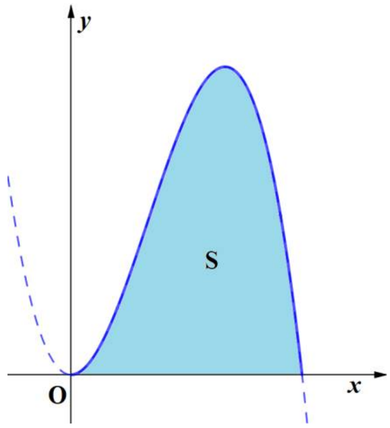
QUESITO 9 (____/5)

Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 40% degli insetti che sono nel primo mese di vita non raggiunge il secondo mese e solo il 30% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Inoltre, gli insetti diventano fertili solo nel secondo mese; ogni insetto nel secondo mese di vita ne genera altri 3 e ciascuno di quelli arrivati al terzo mese ne genera altri due.

a) Disegnare il grafo di vita e trovare la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione.
b) In un dato istante, la popolazione è costituita da 280 insetti nel primo mese, 90 nel secondo mese e 18 nel terzo. Come evolve la popolazione nel mese successivo? Qual era la composizione all'inizio del periodo precedente?

QUESITO 10 (_____/5)

Determinare il valor medio della funzione $f(x) = 3x^2 - x^3$, il cui grafico è rappresentato in figura a fianco, nell'intervallo delimitato dai suoi zeri.
Calcolare, inoltre, il volume del solido generato da una rotazione della regione S intorno all'asse y.

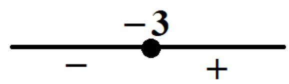


PUNTEGGIO TOTALE: _______/30

Traccia sintetica di soluzione – B

N. 1

- La funzione $f(x)=(x+3)e^{-\frac{x}{3}}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, poiché è prodotto di funzioni ivi continue.
- PARITÀ: $f(-x)=(-x+3)e^{\frac{x}{3}}$ è diversa sia da $-f(x)=-(x+3)e^{-\frac{x}{3}}$ che da $f(x) \Rightarrow f(x)$ non è né pari né dispari
- SEGNO ED INTERSEZIONE CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x+3)e^{-\frac{x}{3}}\geq 0 \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x+3\geq 0$, essendo $e^{-\frac{x}{3}}>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$f(0)=(0+3)e^{0}=3$

$\Rightarrow$ la funzione taglia gli assi cartesiani in $(-3,0)$ e $(0,3)$

- LIMITI ED ASINTOTI:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3)e^{-\frac{x}{3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{e^{\frac{x}{3}}}=_H\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=0 \Rightarrow \text{asintoto orizzontale } y=0 \text{ per } x\to+\infty$$

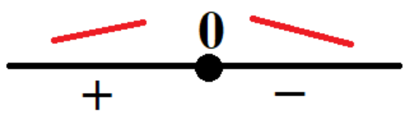
$$\lim_{x\to-\infty}(x+3)e^{-\frac{x}{3}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x}e^{-\frac{x}{3}}=+\infty$$

$\Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti per $x\to-\infty$

- MONOTONIA:

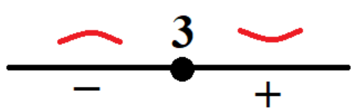
$$f'(x)=e^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}(x+3)e^{-\frac{x}{3}}=-\frac{x}{3}e^{-\frac{x}{3}}\geq 0$$



$\Rightarrow$ Max in $(0,3)$

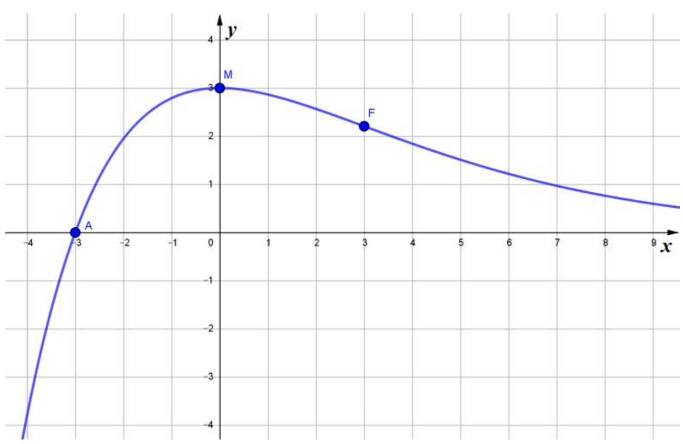
- CONCAVITÀ:

$$f''(x)=-\frac{1}{3}\left[e^{-\frac{x}{3}}-\frac{x}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right]=\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(x-3)\geq 0$$



$f(3)=6e^{-1} \Rightarrow$ Flesso in $(3,6e^{-1})$

GRAFICO:



N. 2

$f(x)=x^2+e^{2x}$

Quindi:

$$g(x)=f(-x)-f(x)=x^2+e^{-2x}-x^2-e^{2x}=e^{-2x}-e^{2x}$$

Verifica disparità:

$$g(-x)=e^{-2(-x)}-e^{2(-x)}=e^{2x}-e^{-2x}=-\left(e^{-2x}-e^{2x}\right)=-g(x)$$

$\Rightarrow g(x)$ è dispari

- $g(0)=e^0-e^0=0$
- $g'(x)=-2e^{-2x}-2e^{2x} \Rightarrow m=g'(0)=-(2+2)=-4$

$\Rightarrow$ la tangente cercata è $y=-4x$

N. 3

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{3x}}{\ln(2x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{3x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(2x+1)}=\lim\limits_{x\to0}-3\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\dfrac{2x}{\ln(2x+1)}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-36}=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{(x-2)(x-6)}{(x-6)(x+6)}=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x-2}{x+6}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

N. 4

$N(t)=\dfrac{A}{1+24e^{-\alpha t}}$

- $N(0)=\dfrac{A}{1+24e^0}=\dfrac{A}{25}=500 \Rightarrow A=12500$

$\Rightarrow N(t)=\dfrac{12500}{1+24e^{-\alpha t}}$

- $N(12)=\dfrac{12500}{1+24e^{-12\alpha}}=1500 \Rightarrow 25=3\left(1+24e^{-12\alpha}\right) \Rightarrow 22=72e^{-12\alpha} \Rightarrow e^{-12\alpha}=\dfrac{11}{36} \Rightarrow$

  $\Rightarrow -12\alpha=\ln\left(\dfrac{11}{36}\right) \Rightarrow \alpha=\dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{36}{11}\right)\simeq 0.098802$

La capacità ambientale è:

$$\lim_{x\to+\infty}N(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{12500}{1+24e^{-\alpha t}}=12500$$

Per calcolare il tasso istantaneo di crescita della popolazione dobbiamo valutare la derivata prima della funzione $N(t)=12500\left(1+24e^{-\alpha t}\right)^{-1}$.

$$N'(t)=-12500\left(1+24e^{-\alpha t}\right)^{-2}\left(-24\alpha e^{-\alpha t}\right)=3\cdot10^5\,\frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\left(1+24e^{-\alpha t}\right)^2}$$

- $N'(0) = 3\cdot 10^5 \dfrac{\alpha e^0}{\left(1+24e^0\right)^2} = \dfrac{3\cdot 10^5 \alpha}{625} = \ldots = 40\ln\left(\dfrac{36}{11}\right) \simeq 47.42\,\dfrac{pesci}{mese}$
- $N'(12) = 2.4\cdot 10^5 \dfrac{\alpha e^{-12\alpha}}{\left(1+24e^{-12\alpha}\right)^2}$

  Dal momento che $\alpha = \dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{36}{11}\right)$ risulta $12\alpha = \ln\left(\dfrac{36}{11}\right)$ e quindi $e^{-12\alpha} = \left(e^{12\alpha}\right)^{-1} = \left(\dfrac{36}{11}\right)^{-1} = \dfrac{11}{36}$.

  Pertanto:

$$N'(12) = \frac{3\cdot 10^5 \alpha \cdot \frac{11}{36}}{\left(1+24\cdot\frac{11}{36}\right)^2} = \ldots = \frac{9}{625}\cdot\frac{11}{144}\cdot 10^5\alpha = 110\ln\left(\frac{36}{11}\right) \simeq 130.42\,\frac{pesci}{mese}$$

N. 5

Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{\left|e^{3x}-1\right|}{x^2+2} = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x^2+2} & x \geq 0 \\ \dfrac{1-e^{3x}}{x^2+2} & x < 0 \end{cases}$

Calcoliamo la derivata di $y = \dfrac{e^{3x}-1}{x^2+2}$:

$$y' = \frac{3e^{3x}\left(x^2+2\right)-2x\left(e^{3x}-1\right)}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{e^x\left(3x^2-2x+6\right)+2x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

Quindi:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x\left(3x^2-2x+6\right)+2x}{\left(x^2+2\right)^2} & x \geq 0 \\ -\dfrac{e^x\left(3x^2-2x+6\right)+2x}{\left(x^2+2\right)^2} & x < 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x\left(3x^2-2x+6\right)+2x}{\left(x^2+2\right)^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{e^x\left(3x^2-2x+6\right)+2x}{\left(x^2+2\right)^2} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ la funzione ha un punto angoloso in $x = 0$

N. 6

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Dal momento che:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 28+2-(8+12)=10 \neq 0$$

concludiamo che $rg(C)=3$

N. 7

$$\begin{cases} y' = x \cdot e^{-3x} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Integrando per parti, calcoliamo $\int x \cdot e^{-3x} dx = -\frac{x}{3} \cdot e^{-3x} - \int -\frac{1}{9} \cdot \left(-3e^{-3x}\right) dx = -\frac{x}{3} \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x} + c$

$$y(0) = -\frac{0}{3} \cdot e^{0} - \frac{1}{9} \cdot e^{0} + c = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{9} + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{10}{9}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = -\frac{x}{3} \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{-3x} + \frac{10}{9} = \frac{10-(3x+1)e^{-3x}}{9}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x+1)e^{-3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{e^{3x}} =_H \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{3e^{3x}} = 0$$

e pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{10-(3x+1)e^{-3x}}{9} = \frac{10}{9}$$

N. 8

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-3y-2z=0 \\ 4x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -y-3y-2z=0 \\ -4y+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 4y+2z=0 \\ -2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-2y \end{cases}$

Soluzioni:

$(-y, y, -2y)$, per ogni $y \in \mathbb{R}$

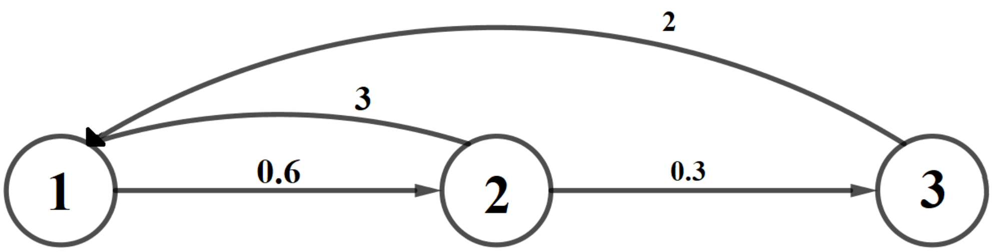
b) $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+y-3z=-5 \\ y+3z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$ sommando membro a membro la 2° equazione alla 1° otteniamo:

$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 3x+3y=0 \\ y+3z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+2y+3z=5 \\ x=-y \\ y+3z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y+3z=5 \\ y+3z=-5 \end{cases}$

La 2° e la 3° equazione non sono compatibili. Il sistema non ha soluzione.

N. 9

Il grafo di vita è:



Da questo si deduce facilmente la matrice di Leslie della popolazione:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

È noto che $\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix} 280 \\ 90 \\ 18 \end{pmatrix}$. Allora

$$\overrightarrow{N}_{t+1}=A\cdot\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 280 \\ 90 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 306 \\ 168 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Per determinare $\overrightarrow{N}_{t-1}$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 3y+2z=280 \\ \frac{3}{5}x=90 \\ \frac{3y}{10}=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180+2z=280 \\ x=150 \\ y=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=50 \\ x=150 \\ y=60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{N}_{t-1}=\begin{pmatrix} 150 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

N. 10

Calcoliamo gli zeri della funzione $f(x)=3x^2-x^3$:

$$3x^2-x^3=0 \Leftrightarrow x^2(3-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

$\Rightarrow$ Il valor medio è:

$$v.m.=\frac{\int_0^3 f(x)\,dx}{3-0}=\frac{\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx}{3}=\frac{1}{3}\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3=\frac{1}{3}\left(27-\frac{81}{4}\right)=\frac{27}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$$

Per calcolare il volume del solido richiesto, utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici $dV = 2\pi x \cdot f(x)\,dx$ e quindi

$$V = 2\pi\int_0^3 x \cdot f(x)\,dx = 2\pi\int_0^3 \left(3x^3 - x^4\right)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = 2\pi\left(\frac{243}{4} - \frac{243}{5}\right) = \frac{243}{10}\pi\, u^3$$