UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

2° Parziale di MATEMATICA (A)

San Floriano, 30/01/2020

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio compitino venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio compitino non venga corretto nè valutato. **NOTA:** *Ritirandosi da un parziale, lo studente è tenuto a presentarsi in appello.*

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/3)
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

QUESITO 2 (_____/3)
Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y'' + 3y' + 2y = x - 2$$

QUESITO 3 (_____/3)
Dopo aver verificato che esistono una coppia di coefficienti reali A e B tali che:

$$\frac{6}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

studiare la convergenza dell'integrale $\int_5^{+\infty}\frac{6}{x^2-2x-8}dx$ e scriverne il valore, in caso di convergenza.

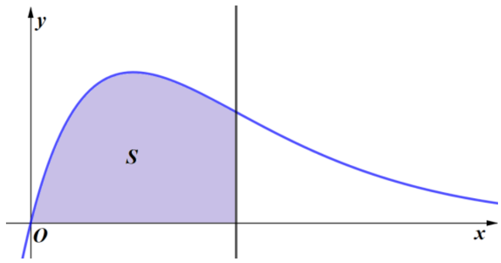
QUESITO 4 (_____/4)
La superficie S in figura è delimitata dagli assi cartesiani, dalla funzione $f(x)=4xe^{-x}$ e dalla retta $x=2$.

a) Calcolare l'area della regione S.

Calcolare inoltre il volume del solido generato da una rotazione completa della superficie S rappresentata in figura:

b) attorno all'asse x;

c) attorno all'asse y.



QUESITO 5 (_____/4)
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=8 \\ 2x+5y-z=9 \\ 6x+2y-3z=1 \end{cases}$

QUESITO 6 (_____/3)

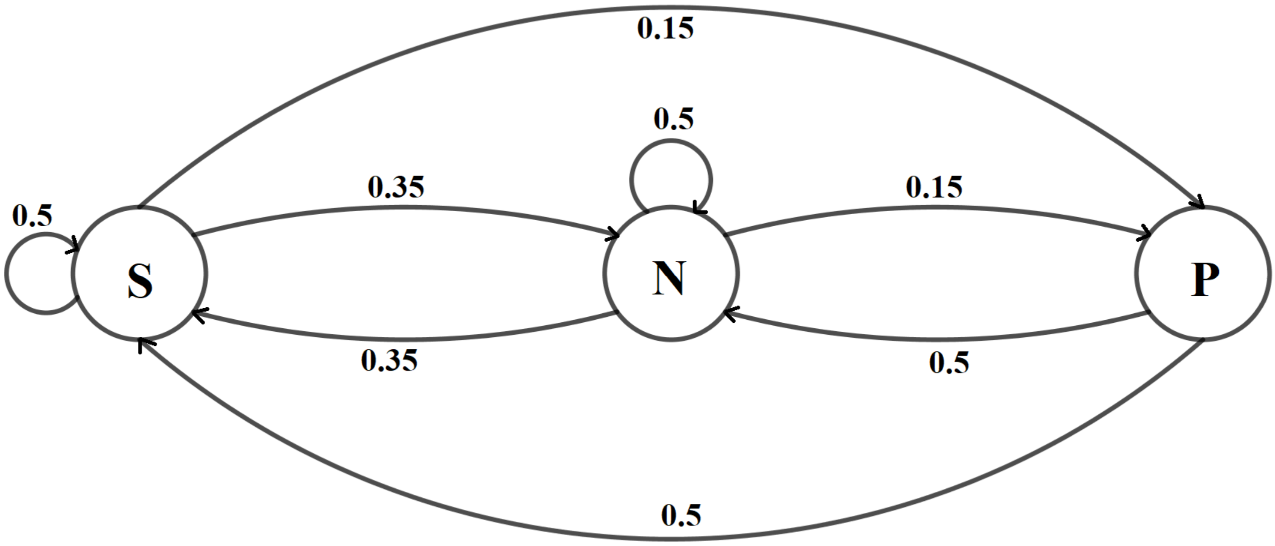
Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & e \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -e \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

QUESITO 7 (_____/3)
In un allevamento vi sono trote suddivise in tre diverse classi di età; la percentuale di sopravvivenza dalla prima alla seconda classe è il 60% e quella dalla seconda alla terza è il 50%. Ciascuna femmina di trota genera 4 femmine durante il secondo periodo e 3 durante il terzo. La prima classe di età non è riproduttiva.

a) Scrivere la matrice di Leslie e disegnare il diagramma di vita della popolazione.

b) In un certo istante t la popolazione è espressa dal vettore $\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix}190\\30\\20\end{pmatrix}$. Qual è la composizione $\overrightarrow{N}_{t+1}$ della popolazione dopo un intervallo di previsione? Qual era la composizione $\overrightarrow{N}_{t-1}$ nell'intervallo di previsione precedente?

QUESITO 8 (_____/5)
Dallo studio del clima in una certa zona si è notato che le condizioni meteo del giorno $t+1$ dipendano solo da quelle del giorno t, ma non da quelle dei giorni precedenti. Per semplicità di costruzione del modello, supponiamo che vi siano solo tre possibili condizioni meteorologiche: sereno (S), nuvoloso (N), pioggia (P).
Il diagramma di flusso che rappresenta la situazione climatica è il seguente:



e lo stato climatico al giorno t è rappresentato dal vettore $\vec{C}(t)=\begin{pmatrix} S_t \\ N_t \\ P_t \end{pmatrix}$.

a) Scrivere la matrice di transizione del sistema.

b) Oggi il tempo è $\vec{C}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Come sarà il tempo tra due giorni?

Sereno: ________ %   Nuvoloso: ________ %   Pioggia: ________ %

QUESITO 9 (_____/3)

Il territorio di due comunità montane può essere suddiviso percentualmente come nella seguente tabella.

	Lunghezza		
	(1) bosco	(2) arbusti	(3) prato
Comunità 1	35%	20%	45%
Comunità 2	40%	35%	25%

Dal prossimo anno le due comunità verranno accorpate, in una comunità unica. Determinare le proporzioni della nuova comunità, costituita dall'unione delle precedenti, sapendo che il territorio della prima è di 320 ettari, mentre quello della seconda ne misura 480.

TOT: ____________/30

Soluzione (A)

n. 1

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

L'equazione differenziale $y' = -\dfrac{y}{x^2}$ è a variabili separabili. Infatti:

$$y' = -\frac{y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x^2}dx$$

Integrando ad ambo i membri otteniamo:

$$\ln|y| + c_1 = \frac{1}{x} + c_2 ,$$

ove c_1 e c_2 sono costanti reali arbitrarie; otteniamo quindi:

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + c_2 - c_1 \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{x} + c ,$$

ove $c = c_2 - c_1$ è una costante reale arbitraria.
Passando all'esponenziale otteniamo:

$$|y| = e^{\frac{1}{x}+c} = e^c \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Concludendo: la soluzione generale dell'equazione differenziale è del tipo

$$y = k \cdot e^{\frac{1}{x}} ,$$

ove *k* è una costante reale arbitraria.
Dobbiamo determinare *k* in modo che valga la condizione $y(1) = 1$:

$$1 = k \cdot e \Leftrightarrow k = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = e^{\frac{1}{x}-1}$$

n. 2
Risolviamo l'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y = x - 2 . \tag{1}$$

L'equazione omogenea associata è

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{2}$$

ed il suo polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Dal momento che:

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione (2) è:

$$\varphi = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1); proviamo con un polinomio di 1° grado:

$$\psi = ax + b$$

Derivando otteniamo $\psi' = a$ e $\psi'' = 0$.
Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$0 + 3 \cdot a + 2 \cdot (ax + b) = x - 2 ,$$

che dev'essere soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dev'essere, quindi:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Quindi $\psi = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ e l'integrale generale della (1) è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$$

n. 3

Affinchè $\dfrac{6}{x^2 - 2x - 8} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x+2}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$ dev'essere:

$$\frac{6}{(x-4)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A - 4B)}{(x-4)(x+2)}$$

ovvero

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 4B = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -2B - 4B = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -6B = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Risulta, quindi:

$$\frac{6}{x^2 - 2x - 8} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2}$$

Studiamo la convergenza di:

$$\int_5^{+\infty} \frac{6}{x^2 - 2x - 8} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_5^b \frac{6}{x^2 - 2x - 8} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_5^b \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} dx$$

Integrando otteniamo:

$$\int_5^b \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} dx = \left[\ln|x-4| - \ln|x+2|\right]_5^b = \left[\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|\right]_5^b = \ln\left|\frac{b-4}{b+2}\right| - \ln\left|\frac{1}{7}\right| = \ln\left|\frac{b-4}{b+2}\right| + \ln 7$$

e quindi:

$$\int_5^{+\infty} \frac{6}{x^2 - 2x - 8} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_5^b \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln\left|\frac{b-4}{b+2}\right| + \ln 7 = \ln 1 + \ln 7 = \ln 7$$

$\Rightarrow$ l'integrale è convergente a $\ln 7$

n. 4

a) L'area cercata è:

$$Area = \int_0^2 f(x)\, dx = 4\int_0^2 xe^{-x} dx$$

Integrando per parti otteniamo:

$$\int_0^2 xe^{-x} dx = \left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx = -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2} - \left(e^{-2} - e^0\right) = 1 - 3e^{-2}$$

e quindi

$$Area = 4\int_0^2 xe^{-x} dx = 4\left(1 - 3e^{-2}\right) u^2$$

b) Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando S di un giro completo attorno all'asse x utilizziamo il *metodo delle fette*; l'elemento di volume è:

$$dV_x = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[4xe^{-x}\right]^2 dx = 16\pi x^2 e^{-2x} dx$$

Integrando otteniamo:

$$V_x = 16\pi\int_0^2 x^2 e^{-2x}dx = 16\pi\left[\left[x^2\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2 - \int_0^2 2x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}dx\right] =$$

$$= 16\pi\left[-2e^{-4} + \int_0^2 x\cdot e^{-2x}dx\right] = -32\pi e^{-4} + 16\pi\left[\left[x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{-2x}}{-2}dx\right] =$$

$$= -32\pi e^{-4} + 16\pi\left[2\cdot\frac{e^{-4}}{-2} - \int_0^2\frac{e^{-2x}}{-2}dx\right] = -32\pi e^{-4} - 16\pi e^{-4} + 8\pi\int_0^2 e^{-2x}dx =$$

$$= -48\pi e^{-4} + 8\pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^2 = -48\pi e^{-4} + 8\pi\left(-\frac{e^{-4}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 4\pi - 52\pi e^{-4} = 4\pi\left(1 - 13e^{-4}\right)u^3$$

c) Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando S di un giro completo attorno all'asse y utilizziamo il *metodo dei gusci cilindrici*; l'elemento di volume è:

$$dV_y = 2\pi x\cdot f(x)dx = 8\pi x^2 e^{-x}dx$$

Integrando otteniamo:

$$V_y = \int_0^2 2\pi x\cdot f(x)dx = 8\pi\int_0^2 x^2 e^{-x}dx = 8\pi\left[\left[x^2\left(-e^{-x}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 2x\left(-e^{-x}\right)dx\right] =$$

$$= 8\pi\left[-4e^{-2} + 2\int_0^2 xe^{-x}dx\right] = -32\pi e^{-2} + 16\pi\int_0^2 xe^{-x}dx =$$

$$= -32\pi e^{-2} + 16\pi\left[\left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^2 - \int_0^2\left(-e^{-x}\right)dx\right] = -32\pi e^{-2} + 16\pi\left(-2e^{-2}\right) - 16\pi\left[e^{-x}\right]_0^2 =$$

$$= -64\pi e^{-2} - 16\pi\left(e^{-2} - 1\right) = 16\pi - 80\pi e^{-2} = 16\pi\left(1 - 5e^{-2}\right)u^3$$

n. 5

a) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sommando la 1° con la 2°: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sommando la 1° con la 3°:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+z=0 \\ 4x+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Il sistema si è ridotto a 2 equazioni (tra loro indipendenti) in 3 incognite ed ammette pertanto ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} -z+y+2z=0 \\ x=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

Soluzioni: $(-k,-k,k)$, per ogni $k\in\mathbb{R}$

b) $$\begin{cases} x-y+3z=8 \\ 2x+5y-z=9 \\ 6x+2y-3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+6z=16 \\ 2x+5y-z=9 \\ 6x+2y-3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-6y+18z=48 \\ 7y-7z=-7 \\ 6x+2y-3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+3z=8 \\ y-z=-1 \\ 8y-21z=-47 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z+1+3z=8 \\ y=z-1 \\ 8z-8-21z=-47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=7 \\ y=z-1 \\ -13z=-39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-6=1 \\ y=3-1=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Soluzione: $(1,2,3)$

n. 6

Osservando con attenzione la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & e \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -e \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si nota facilmente che la 4° riga è la somma della 1° con la 3°. Pertanto il rango della matrice è minore di 4. Calcoliamo il determinante della sotto-matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

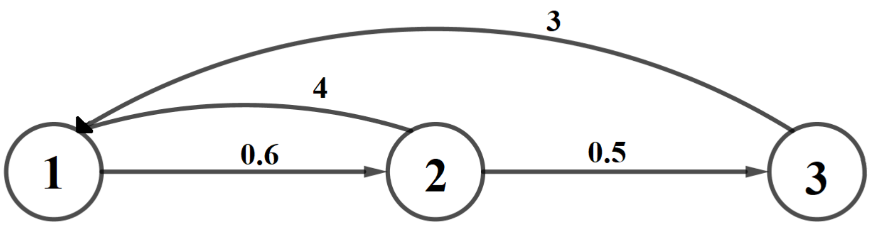
utilizzando il Teorema di Laplace. Otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ il rango della matrice è 3.

n. 7

Iniziamo disegnando il diagramma di vita delle trote della popolazione.



Sulla base del diagramma disegnato, la matrice di Leslie della popolazione è $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo:

$$\overrightarrow{N}_{t+1} = L \cdot \overrightarrow{N}_t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 114 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora trovare la composizione $\overrightarrow{N}_{t-1}$ della popolazione nel periodo precedente.

Poniamo $\overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ed applichiamo la matrice L; $\overrightarrow{N}_t = L \cdot \overrightarrow{N}_{t-1}$ se e solo se:

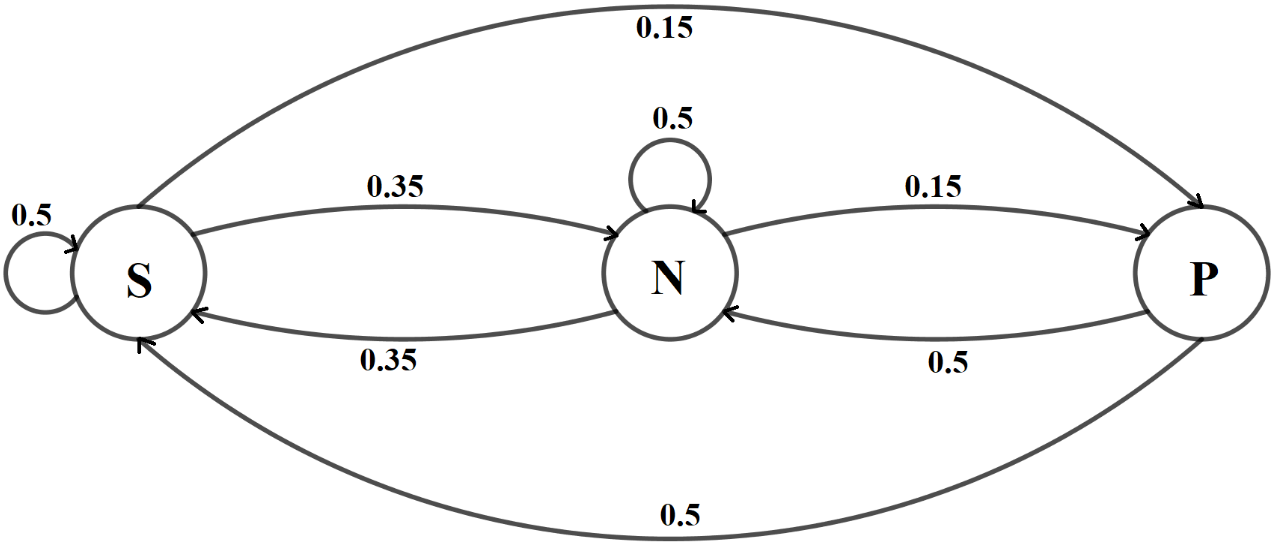
$$\begin{cases} 4y + 3z = 190 \\ \dfrac{3}{5}x = 30 \\ \dfrac{y}{2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ 4y + 3z = 190 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ 160 + 3z = 190 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \\ z = 10 \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$\overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$$

n. 8

Consideriamo il diagramma:



La tabella seguente mostra le transizioni che si possono dedurre dal diagramma:

	S_t	N_t	P_t
S_{t+1}	0.5	0.35	0.5
N_{t+1}	0.35	0.5	0.5
P_{t+1}	0.15	0.15	0

Dalla tabella si ottiene la matrice di transizione

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.35 & 0.5 & 0.5 \\ 0.15 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}$$

Le condizioni metereologi che richieste sono $\overrightarrow{C}(2) = M \cdot \overrightarrow{C}(1) = M \cdot \left[M \cdot \overrightarrow{C}(0) \right]$ (tra due giorni):

- $\overrightarrow{C}(1) = M \cdot \overrightarrow{C}(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.35 & 0.5 & 0.5 \\ 0.15 & 0.15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.35 \\ 0.15 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{C}(2) = M \cdot \overrightarrow{C}(1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.35 & 0.5 & 0.5 \\ 0.15 & 0.15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.35 \\ 0.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4475 \\ 0.425 \\ 0.1275 \end{pmatrix}$

Sereno: 44.75 % Nuvoloso: 42.5 % Pioggia: 12.75 %

n. 9

La composizione del territorio della 1° comunità montana è:

$$\overrightarrow{C_1} = 320 \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.2 \\ 0.45 \end{pmatrix} ettari = \begin{pmatrix} 112 \\ 64 \\ 144 \end{pmatrix} ettari\,;$$

quella della 2° è:

$$\overrightarrow{C_2} = 480\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix} ettari = \begin{pmatrix} 192 \\ 168 \\ 120 \end{pmatrix} ettari$$

La composizione del territorio della comunità montana risultante dalla fusione delle due precedenti è:

$$\vec{C} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2} = \begin{pmatrix} 112 \\ 64 \\ 144 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 192 \\ 168 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 304 \\ 232 \\ 264 \end{pmatrix} ettari$$

La superficie complessiva del territorio è $S = (320 + 480) = 800\, ettari$.

La nuova proporzione vale:

- Bosco: $\frac{304}{800} \cdot 100 = 38\%$
- Arbusti: $\frac{168}{800} \cdot 100 = 21\%$
- Prato: $\frac{264}{800} \cdot 100 = 33\%$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

2° Parziale di MATEMATICA (B)

San Floriano, 30/01/2020

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: __________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio compitino venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio compitino non venga corretto nè valutato. **NOTA:** *Ritirandosi da un parziale, lo studente è tenuto a presentarsi in appello.*

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/3)
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2}{x^3}\,y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

QUESITO 2 (_____/3)
Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

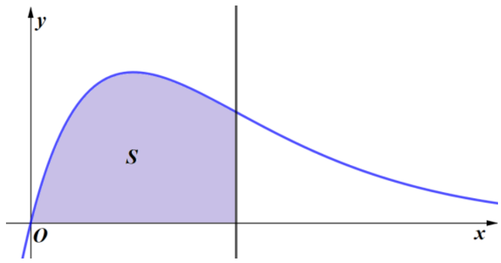
$$y'' + y' - 2y = 2x - 1$$

QUESITO 3 (_____/3)
Dopo aver verificato che esistono una coppia di coefficienti reali A e B tali che:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

studiare la convergenza dell'integrale $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}dx$ e scriverne il valore, in caso di convergenza.

QUESITO 4 (_____/4)
La superficie S in figura è delimitata dagli assi cartesiani, dalla funzione $f(x)=4xe^{-2x}$ e dalla retta $x=1$.



a) Calcolare l'area della regione S.

Calcolare inoltre il volume del solido generato da una rotazione completa della superficie S rappresentata in figura:

b) attorno all'asse x;
c) attorno all'asse y.

QUESITO 5 (_____/4)
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+3z=8 \\ 2x+5y-z=9 \\ -5x+4y-6z=-15 \end{cases}$

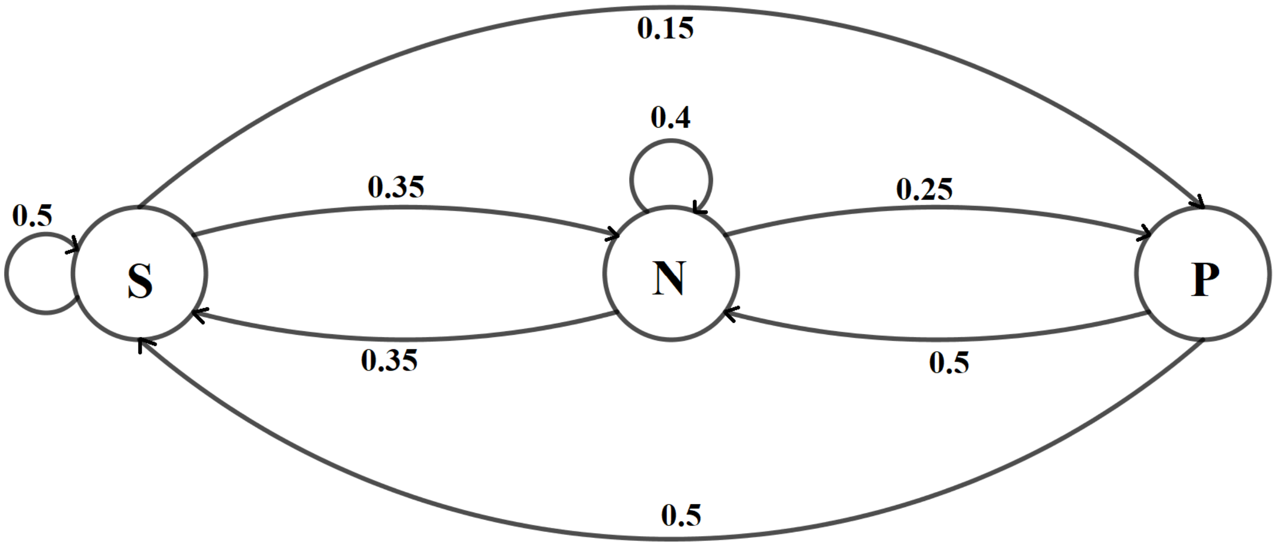
QUESITO 6 (_____/3)

Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -\sqrt{\pi} & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & \sqrt{\pi} & 1 \end{pmatrix}$

QUESITO 7 (_____/3)
In un allevamento vi sono trote suddivise in tre diverse classi di età; la percentuale di sopravvivenza dalla prima alla seconda classe è il 60% e quella dalla seconda alla terza è il 40%. Ciascuna femmina di trota genera 5 femmine durante il secondo periodo e 3 durante il terzo. La prima classe di età non è riproduttiva.

a) Scrivere la matrice di Leslie e disegnare il diagramma di vita della popolazione.
b) In un certo istante t la popolazione è espressa dal vettore $\overrightarrow{N_t}=\begin{pmatrix}210\\30\\12\end{pmatrix}$. Qual è la composizione $\overrightarrow{N_{t+1}}$ della popolazione dopo un intervallo di previsione? Qual era la composizione $\overrightarrow{N_{t-1}}$ nell'intervallo di previsione precedente?

QUESITO 8 (_____/5)
Dallo studio del clima in una certa zona si è notato che le condizioni meteo del giorno $t+1$ dipendano solo da quelle del giorno t, ma non da quelle dei giorni precedenti. Per semplicità di costruzione del modello, supponiamo che vi siano solo tre possibili condizioni meteorologiche: sereno (S), nuvoloso (N), pioggia (P).
Il diagramma di flusso che rappresenta la situazione climatica è il seguente:



e lo stato climatico al giorno t è rappresentato dal vettore $\vec{C}(t)=\begin{pmatrix} S_t \\ N_t \\ P_t \end{pmatrix}$.

a) Scrivere la matrice di transizione del sistema.

b) Oggi il tempo è $\vec{C}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Come sarà il tempo tra due giorni?

Sereno: ________ % Nuvoloso: ________ % Pioggia: ________ %

QUESITO 9 (_____/3)

Il territorio di due comunità montane può essere suddiviso percentualmente come nella seguente tabella.

	Lunghezza		
	(1) bosco	(2) arbusti	(3) prato
Comunità 1	25%	30%	45%
Comunità 2	50%	25%	25%

Dal prossimo anno le due comunità verranno accorpate, in una comunità unica. Determinare le proporzioni della nuova comunità, costituita dall'unione delle precedenti, sapendo che il territorio della prima è di 350 ettari, mentre quello della seconda ne misura 450.

TOT: ____________/30

Soluzione (B)

n. 1

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2}{x^3} y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

L'equazione differenziale $y' = -\dfrac{2}{x^3} y$ è a variabili separabili. Infatti:

$$y' = -\frac{2}{x^3} y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2x^{-3} dx$$

Integrando ad ambo i membri otteniamo:

$$\ln|y| + c_1 = x^{-2} + c_2,$$

ove c_1 e c_2 sono costanti reali arbitrarie; otteniamo quindi:

$$\ln|y| = \frac{1}{x^2} + c_2 - c_1 \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{x^2} + c,$$

ove $c = c_2 - c_1$ è una costante reale arbitraria.
Passando all'esponenziale otteniamo:

$$|y| = e^{\frac{1}{x^2}+c} = e^c \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$$

Concludendo: la soluzione generale dell'equazione differenziale è del tipo

$$y = k \cdot e^{\frac{1}{x^2}},$$

ove k è una costante reale arbitraria.
Dobbiamo determinare k in modo che valga la condizione $y(1) = 2$:

$$2 = k \cdot e \Leftrightarrow k = \frac{2}{e} = 2e^{-1}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = 2e^{\frac{1}{x^2}-1}$$

n. 2
Risolviamo l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = 2x - 1. \tag{1}$$

L'equazione omogenea associata è

$$y'' + y' - 2y = 0 \tag{2}$$

ed il suo polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Dal momento che:

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione (2) è:

$$\varphi = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1); proviamo con un polinomio di 1° grado:

$$\psi = ax + b$$

Derivando otteniamo $\psi' = a$ e $\psi'' = 0$.
Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$0 + a - 2 \cdot (ax + b) = 2x - 1,$$

che dev'essere soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dev'essere, quindi:

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ a - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Quindi $\psi = -x$ e l'integrale generale della (1) è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - x$$

n. 3

Affinchè $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ dev'essere:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-4)(x+2)}$$

ovvero

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -2B + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Risulta, quindi:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

Studiamo la convergenza di:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} dx$$

Integrando otteniamo:

$$\int_3^b \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x-1| \right]_3^b = \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \right]_3^b = \ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| - \ln\left|\frac{1}{2}\right| = \ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| + \ln 2$$

e quindi:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right| + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

$\Rightarrow$ l'integrale è convergente a $\ln 2$

n. 4

a) L'area cercata è:

$$Area = \int_0^1 f(x)\, dx = 4\int_0^1 x e^{-2x} dx$$

Integrando per parti otteniamo:

$$\int_0^1 x e^{-2x} dx = \left[x\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2} e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2} - e^0 \right) = \frac{1 - 3e^{-2}}{4}$$

e quindi

$$Area = 4\int_0^1 x e^{-2x} dx = 4\left(\frac{1 - 3e^{-2}}{4} \right) = \left(1 - 3e^{-2} \right) u^2$$

b) Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando S di un giro completo attorno all'asse x utilizziamo il *metodo delle fette*; l'elemento di volume è:

$$dV_x = \pi \left[f(x) \right]^2 dx = \pi \left[4x e^{-2x} \right]^2 dx = 16\pi x^2 e^{-4x} dx$$

Integrando otteniamo:

$$V_x = 16\pi \int_0^1 x^2 e^{-4x} dx = 16\pi \left[\left[x^2 \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} dx \right] =$$

$$=16\pi\left[-\frac{e^{-4}}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot e^{-4x}dx\right]=-4\pi e^{-4}+8\pi\left[\left[x\cdot\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{-4x}}{-4}dx\right]=$$

$$=-4\pi e^{-4}+8\pi\left[-\frac{e^{-4}}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-4x}dx\right]=-4\pi e^{-4}-2\pi e^{-4}+2\pi\int_0^1 e^{-4x}dx=$$

$$=-6\pi e^{-4}+2\pi\left[-\frac{e^{-4x}}{4}\right]_0^1=-6\pi e^{-4}+2\pi\left(-\frac{e^{-4}}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{13}{2}\pi e^{-4}=\frac{\pi}{2}\left(1-13e^{-4}\right)u^3$$

c) Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando S di un giro completo attorno all'asse y utilizziamo il *metodo dei gusci cilindrici*; l'elemento di volume è:

$$dV_y=2\pi x\cdot f(x)dx=8\pi x^2e^{-2x}dx$$

Integrando otteniamo:

$$V_y=\int_0^1 2\pi x\cdot f(x)dx=8\pi\int_0^1 x^2e^{-2x}dx=8\pi\left[\left[x^2\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\right]_0^1-\int_0^1 2x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx\right]=$$

$$=8\pi\left[-\frac{e^{-2}}{2}+\int_0^1 xe^{-2x}dx\right]=-4\pi e^{-2}+8\pi\int_0^1 xe^{-2x}dx=$$

$$=-4\pi e^{-2}+8\pi\left[\left[x\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx\right]=-4\pi e^{-2}+4\pi\left(-e^{-2}\right)-8\pi\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1=$$

$$=-8\pi e^{-2}-2\pi\left(e^{-2}-1\right)=2\pi-10\pi e^{-2}=2\pi\left(1-5e^{-2}\right)u^3$$

n. 5

a) $\begin{cases}x-y+2z=0\\2x+y+z=0\\x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow$ sommando la 1° con la 2°: $\begin{cases}x-y+2z=0\\3x+3z=0\\x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+2z=0\\x+z=0\\x+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+2z=0\\x+z=0\end{cases}$

Il sistema si è ridotto a 2 equazioni (tra loro indipendenti) in 3 incognite ed ammette pertanto ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases}-z-y+2z=0\\x=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-y+z=0\\x=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-z\\y=z\end{cases}$$

Soluzioni: $(-k,k,k)$, per ogni $k\in\mathbb{R}$

b) $\begin{cases}x-y+3z=8\\2x+5y-z=9\\-5x+4y-6z=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y+6z=16\\2x+5y-z=9\\-5x+4y-6z=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-5y+15z=40\\7y-7z=-7\\-5x+4y-6z=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+3z=8\\y-z=-1\\-y+9z=25\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+3z=8\\y-z=-1\\8z=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2+9=8\\y=z-1=2\\z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$$

Soluzione: $(1,2,3)$

n. 6

Osservando con attenzione la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -\sqrt{\pi} & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & \sqrt{\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

si nota facilmente che la 4° riga è la differenza tra la 3° con la 2° $\Rightarrow$ il rango della matrice è minore di 4. Calcoliamo il determinante della sotto-matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

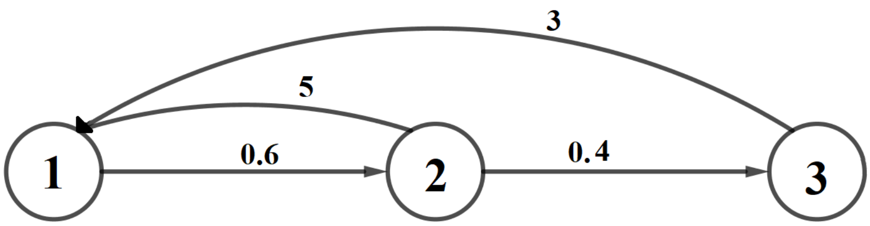
utilizzando il Teorema di Laplace. Otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)-(4-2) = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ il rango della matrice è 3.

n. 7

Iniziamo disegnando il diagramma di vita delle trote della popolazione.



Sulla base del diagramma disegnato, la matrice di Leslie della popolazione è $L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo:

$$\overrightarrow{N}_{t+1} = L\cdot\overrightarrow{N}_t = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 210 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 \\ 126 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora trovare la composizione $\overrightarrow{N}_{t-1}$ della popolazione nel periodo precedente.

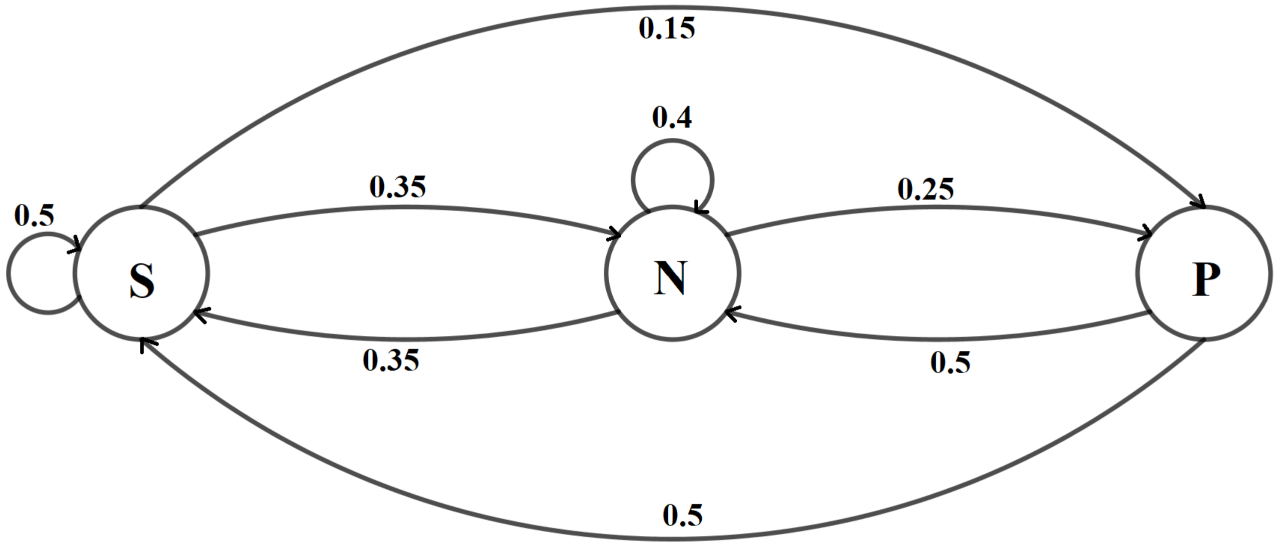
Poniamo $\overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ed applichiamo la matrice L; $\overrightarrow{N}_t = L\cdot\overrightarrow{N}_{t-1}$ se e solo se:

$$\begin{cases} 5y+3z=210 \\ \frac{3}{5}x=30 \\ \frac{2}{5}y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=30 \\ 5y+3z=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=30 \\ 150+3z=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=30 \\ 3z=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=30 \\ z=20 \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$\overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

n. 8
Consideriamo il diagramma:



La tabella seguente mostra le transizioni che si possono dedurre dal diagramma:

	S_t	N_t	P_t
S_{t+1}	0.5	0.35	0.5
N_{t+1}	0.35	0.4	0.5
P_{t+1}	0.15	0.25	0

Dalla tabella si ottiene la matrice di transizione

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.35 & 0.4 & 0.5 \\ 0.15 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

Le condizioni metereologi che richieste sono $\vec{C}(2) = M \cdot \vec{C}(1) = M \cdot \left[M \cdot \vec{C}(0) \right]$ (tra due giorni):

- $\vec{C}(1) = M \cdot \vec{C}(0) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.35 & 0.4 & 0.5 \\ 0.15 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.35 \\ 0.15 \end{pmatrix}$
- $\vec{C}(2) = M \cdot \vec{C}(1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.35 & 0.4 & 0.5 \\ 0.15 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.35 \\ 0.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4475 \\ 0.39 \\ 0.1625 \end{pmatrix}$

Sereno: 44.75 % Nuvoloso: 39 % Pioggia: 16.75 %

n. 9
La composizione del territorio della 1° comunità montana è:

$$\overrightarrow{C_1} = 350 \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.45 \end{pmatrix} ettari = \begin{pmatrix} 87.5 \\ 105 \\ 157.5 \end{pmatrix} ettari \,;$$

quella della 2° è:

$$\overrightarrow{C_2} = 450 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} ettari = \begin{pmatrix} 225 \\ 112.5 \\ 112.5 \end{pmatrix} ettari$$

La composizione del territorio della comunità montana risultante dalla fusione delle due precedenti è:

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2} = \begin{pmatrix} 87.5 \\ 105 \\ 157.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 225 \\ 112.5 \\ 112.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 312.5 \\ 217.5 \\ 270 \end{pmatrix} ettari$$

La superficie complessiva del territorio è $S = (350 + 450) = 800\, ettari$.

La nuova proporzione vale:

- Bosco: $\frac{312.5}{800} \cdot 100 \simeq 39.06\%$
- Arbusti: $\frac{217.5}{800} \cdot 100 \simeq 27.19\%$
- Prato: $\frac{270}{800} \cdot 100 = 33.75\%$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

2° Parziale di MATEMATICA (C)

San Floriano, 30/01/2020

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: __________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio compitino venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio compitino non venga corretto nè valutato. **NOTA:** *Ritirandosi da un parziale, lo studente è tenuto a presentarsi in appello.*

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/3)
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3}{x^4}y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

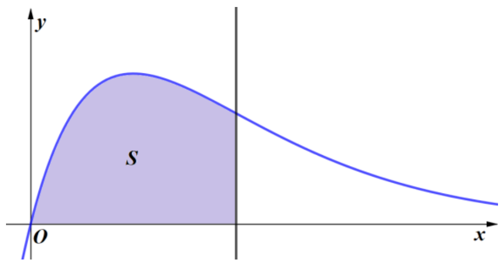
QUESITO 2 (_____/3)
Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y'' - y' - 2y = x + 1$$

QUESITO 3 (_____/3)
Dopo aver verificato che esistono una coppia di coefficienti reali A e B tali che:
$$\frac{2}{x^2-8x+15}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}$$
studiare la convergenza dell'integrale $\int_6^{+\infty}\frac{2}{x^2-8x+15}dx$ e scriverne il valore, in caso di convergenza.

QUESITO 4 (_____/4)
La superficie S in figura è delimitata dagli assi cartesiani, dalla funzione

$f(x)=2xe^{-\frac{x}{2}}$ e dalla retta $x=4$.



a) Calcolare l'area della regione S.

Calcolare inoltre il volume del solido generato da una rotazione completa della superficie S rappresentata in figura:

b) attorno all'asse x;
c) attorno all'asse y.

QUESITO 5 (_____/4)
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} y+z=0 \\ 2x-7y-3z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y+3z=8 \\ 2x-2y-z=-5 \\ -6x+y-2z=0 \end{cases}$

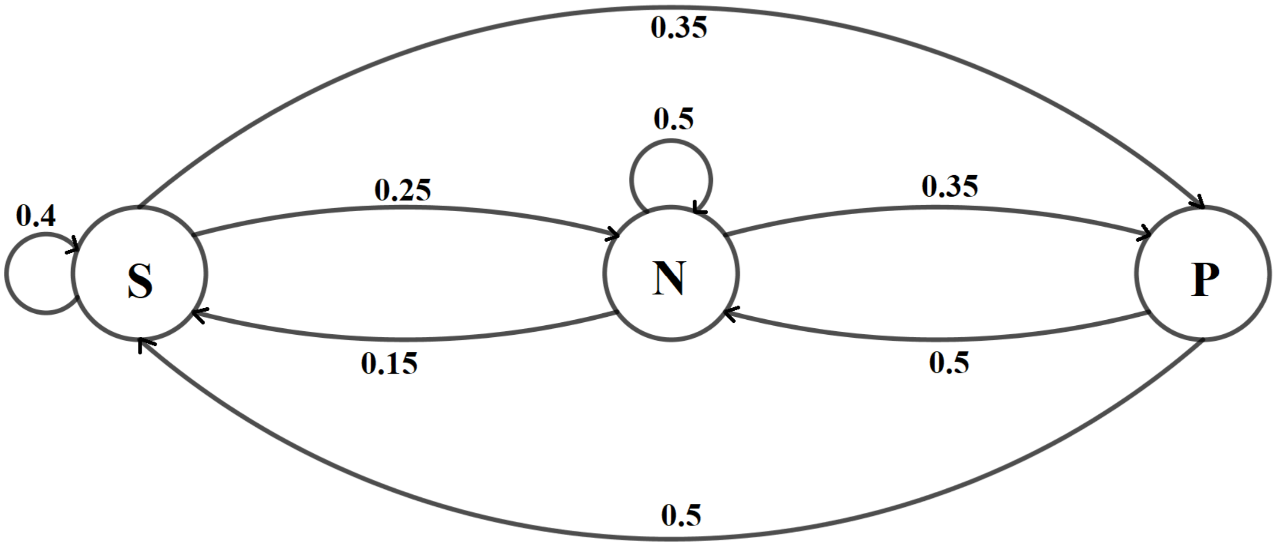
QUESITO 6 (_____/3)

Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

QUESITO 7 (_____/3)
In un allevamento vi sono trote suddivise in tre diverse classi di età; la percentuale di sopravvivenza dalla prima alla seconda classe è il 50% e quella dalla seconda alla terza è il 40%. Ciascuna femmina di trota genera 4 femmine durante il secondo periodo e 3 durante il terzo. La prima classe di età non è riproduttiva.

a) Scrivere la matrice di Leslie e disegnare il diagramma di vita della popolazione.
b) In un certo istante t la popolazione è espressa dal vettore $\vec{N}_t=\begin{pmatrix}210\\20\\12\end{pmatrix}$. Qual è la composizione $\vec{N}_{t+1}$ della popolazione dopo un intervallo di previsione? Qual era la composizione $\vec{N}_{t-1}$ nell'intervallo di previsione precedente?

QUESITO 8 (_____/5)
Dallo studio del clima in una certa zona si è notato che le condizioni meteo del giorno $t+1$ dipendano solo da quelle del giorno t, ma non da quelle dei giorni precedenti. Per semplicità di costruzione del modello, supponiamo che vi siano solo tre possibili condizioni meteorologiche: sereno (S), nuvoloso (N), pioggia (P).
Il diagramma di flusso che rappresenta la situazione climatica è il seguente:



e lo stato climatico al giorno t è rappresentato dal vettore $\vec{C}(t) = \begin{pmatrix} S_t \\ N_t \\ P_t \end{pmatrix}$.

a) Scrivere la matrice di transizione del sistema.

b) Oggi il tempo è $\vec{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Come sarà il tempo tra due giorni?

Sereno: ________ %　　　　Nuvoloso: ________ %　　　　Pioggia: ________ %

QUESITO 9 (_____/3)

Il territorio di due comunità montane può essere suddiviso percentualmente come nella seguente tabella.

	Lunghezza		
	(1) bosco	(2) arbusti	(3) prato
Comunità 1	45%	20%	35%
Comunità 2	35%	25%	40%

Dal prossimo anno le due comunità verranno accorpate, in una comunità unica. Determinare le proporzioni della nuova comunità, costituita dall'unione delle precedenti, sapendo che il territorio della prima è di 360 ettari, mentre quello della seconda ne misura 440.

TOT: ____________/30

Soluzione (C)

n. 1

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3}{x^4} y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

L'equazione differenziale $y' = \dfrac{3}{x^4} y$ è a variabili separabili. Infatti:

$$y' = \frac{3}{x^4} y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4} y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^{-4} dx$$

Integrando ad ambo i membri otteniamo:

$$\ln|y| + c_1 = -x^{-3} + c_2,$$

ove c_1 e c_2 sono costanti reali arbitrarie; otteniamo quindi:

$$\ln|y| = -\frac{1}{x^3} + c_2 - c_1 \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{x^3} + c,$$

ove $c = c_2 - c_1$ è una costante reale arbitraria.
Passando all'esponenziale otteniamo:

$$|y| = e^{-\frac{1}{x^3}+c} = e^c \cdot e^{-\frac{1}{x^3}}$$

Concludendo: la soluzione generale dell'equazione differenziale è del tipo

$$y = k \cdot e^{-\frac{1}{x^3}},$$

ove *k* è una costante reale arbitraria.
Dobbiamo determinare *k* in modo che valga la condizione $y(1) = 1$:

$$1 = k \cdot e \Leftrightarrow k = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = e^{-\frac{1}{x^3}-1}$$

n. 2
Risolviamo l'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = x + 1. \qquad (1)$$

L'equazione omogenea associata è

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad (2)$$

ed il suo polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Dal momento che:

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{cases}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione (2) è:

$$\varphi = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1); proviamo con un polinomio di 1° grado:

$$\psi = ax + b$$

Derivando otteniamo $\psi' = a$ e $\psi'' = 0$.
Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$0 - a - 2 \cdot (ax + b) = x + 1,$$

che dev'essere soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dev'essere, quindi:

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Quindi $\psi = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ e l'integrale generale della (1) è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

n. 3

Affinchè $\frac{2}{x^2 - 8x + 15} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{3,5\}$ dev'essere:

$$\frac{2}{x^2 - 8x + 15} = \frac{A(x-5) + B(x-3)}{(x-3)(x-5)} = \frac{(A+B)x - (5A+3B)}{(x-3)(x-5)}$$

ovvero

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 5A + 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -5B + 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -2B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Risulta, quindi:

$$\frac{2}{x^2 - 8x + 15} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$$

Studiamo la convergenza di:

$$\int_6^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 8x + 15} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_6^b \frac{2}{x^2 - 8x + 15} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_6^b \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3} dx$$

Integrando otteniamo:

$$\int_6^b \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3} dx = \left[\ln|x-5| - \ln|x-3| \right]_6^b = \left[\ln\left|\frac{x-5}{x-3}\right| \right]_6^b = \ln\left|\frac{b-5}{b-3}\right| - \ln\left|\frac{1}{3}\right| = \ln\left|\frac{b-5}{b-3}\right| + \ln 3$$

e quindi:

$$\int_6^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 8x + 15} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_6^b \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln\left|\frac{b-5}{b-3}\right| + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3$$

$\Rightarrow$ l'integrale è convergente a $\ln 3$

n. 4

a) L'area cercata è:

$$Area = \int_0^4 f(x)\, dx = 2\int_0^4 x e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Integrando per parti otteniamo:

$$\int_0^4 x e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[x\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right) \right]_0^2 - \int_0^4 -2e^{-\frac{x}{2}} dx = -8e^{-2} + 2\left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^4 = -8e^{-2} + 2\left(-2e^{-2} + 2e^0\right) = -12e^{-2} + 4$$

e quindi

$$Area = 2\int_0^4 x e^{-\frac{x}{2}} dx = 8\left(1 - 3e^{-2}\right) u^2$$

b) Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando S di un giro completo attorno all'asse x utilizziamo il *metodo delle fette*; l'elemento di volume è:

$$dV_x = \pi \left[f(x) \right]^2 dx = \pi \left[2xe^{-\frac{x}{2}} \right]^2 dx = 4\pi x^2 e^{-x} dx$$

Integrando otteniamo:

$$V_x = 4\pi\int_0^4 x^2e^{-x}dx = 4\pi\left[\left[x^2\left(-e^{-x}\right)\right]_0^4 - \int_0^4 2x\left(-e^{-x}\right)dx\right] =$$

$$= 4\pi\left[-16e^{-4} + 2\int_0^4 x\cdot e^{-x}dx\right] = -64\pi e^{-4} + 8\pi\left[\left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^4 - \int_0^4 -e^{-x}dx\right] =$$

$$= -64\pi e^{-4} + 8\pi\left[-4e^{-4} + \int_0^4 e^{-x}dx\right] = -64\pi e^{-4} - 32\pi e^{-4} + 8\pi\int_0^4 e^{-x}dx =$$

$$= -96\pi e^{-4} + 8\pi\left[-e^{-x}\right]_0^4 = -96\pi e^{-4} + 8\pi\left(-e^{-4}+1\right) = 8\pi - 104\pi e^{-4} = 8\pi\left(1-13e^{-4}\right)u^3$$

c) Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando S di un giro completo attorno all'asse y utilizziamo il *metodo dei gusci cilindrici*; l'elemento di volume è:

$$dV_y = 2\pi x\cdot f(x)dx = 4\pi x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$$

Integrando otteniamo:

$$V_y = \int_0^4 2\pi x\cdot f(x)dx = 4\pi\int_0^4 x^2e^{-\frac{x}{2}}dx = 4\pi\left[\left[x^2\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]_0^4 - \int_0^4 2x\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)dx\right] =$$

$$= 4\pi\left[-32e^{-2} + 4\int_0^4 xe^{-\frac{x}{2}}dx\right] = -128\pi e^{-2} + 16\pi\int_0^4 xe^{-\frac{x}{2}}dx =$$

$$= -128\pi e^{-2} + 16\pi\left[\left[x\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]_0^4 - \int_0^4\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)dx\right] = -128\pi e^{-2} + 16\pi\left(-8e^{-2}\right) - 32\pi\left[2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4 =$$

$$= -256\pi e^{-2} - 64\pi\left(e^{-2}-1\right) = 64\pi - 320\pi e^{-2} = 64\pi\left(1-5e^{-2}\right)u^3$$

n. 5

a) $\begin{cases} y+z=0 \\ 2x-7y-3z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ sottraendo la 3° dalla 2°: $\begin{cases} y+z=0 \\ 2x-7y-3z=0 \\ -4y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7y-3z=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x-7y-3z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

Il sistema si è ridotto a 2 equazioni (tra loro indipendenti) in 3 incognite ed ammette pertanto ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 2x-7y-3z=0 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \end{cases}$$

Soluzioni: $(-2k,-k,k)$, per ogni $k\in\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x-y+3z=8 \\ 2x-2y-z=-5 \\ -6x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+6z=16 \\ 2x-2y-z=-5 \\ -6x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ sottraendo tra loro le prime due equazioni:

$$\begin{cases}7z=21\\2x-2y-z=-5\\-6x+y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=3\\2x-2y-3=-5\\-6x+y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=3\\x-y=-1\\-6x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=3\\x-y=-1\\-6x+y=6\end{cases}$$ sommando membro a membro la 2° equazione con la 3°: $$\begin{cases}z=3\\x-y=-1\\-5x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\-1-y=-1\\z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\\z=3\end{cases}$$ Soluzione: $(-1,0,3)$

n. 6

Osservando con attenzione la matrice

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & \sqrt{2} & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

si nota facilmente che la 3° riga è la somma tra la 1° e la 4° $\Rightarrow$ il rango della matrice è minore di 4. Calcoliamo il determinante della sotto-matrice

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

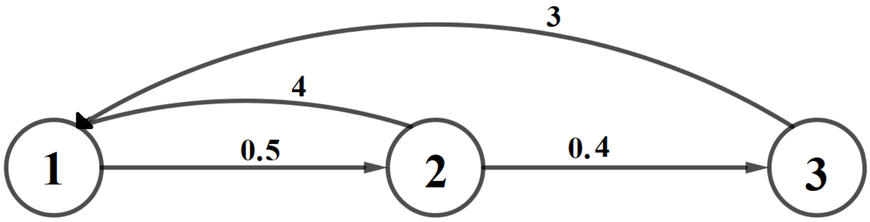
utilizzando il Teorema di Laplace. Otteniamo:

$$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2+(2-2)=-2\neq 0$$

$\Rightarrow$ il rango della matrice è 3.

n. 7

Iniziamo disegnando il diagramma di vita delle trote della popolazione.



Sulla base del diagramma disegnato, la matrice di Leslie della popolazione è $L=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0\end{pmatrix}$

Calcoliamo:

$$\overrightarrow{N}_{t+1}=L\cdot\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}210\\ 20\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}116\\ 105\\ 8\end{pmatrix}$$

Vogliamo ora trovare la composizione $\overrightarrow{N}_{t-1}$ della popolazione nel periodo precedente.

Poniamo $\overrightarrow{N}_{t-1}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ ed applichiamo la matrice L; $\overrightarrow{N}_t=L\cdot\overrightarrow{N}_{t-1}$ se e solo se:

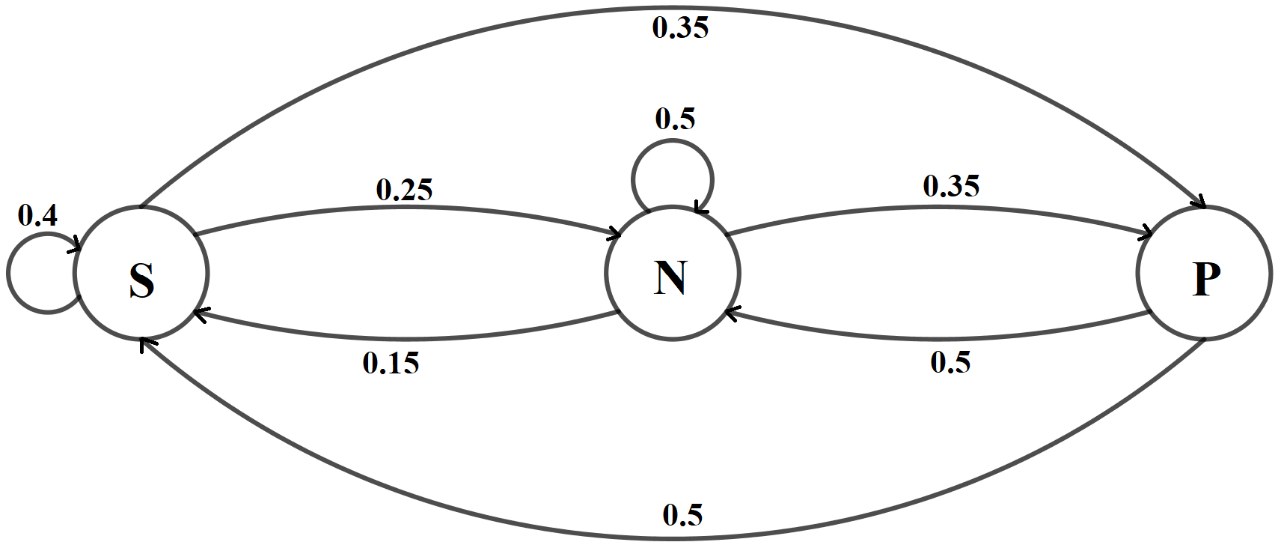
$$\begin{cases} 4y+3z=210 \\ \frac{1}{2}x=20 \\ \frac{2}{5}y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=30 \\ 120+3z=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=30 \\ 3z=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=30 \\ z=30 \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$\vec{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

n. 8

Consideriamo il diagramma:



La tabella seguente mostra le transizioni che si possono dedurre dal diagramma:

	S_t	N_t	P_t
S_{t+1}	0.4	0.15	0.5
N_{t+1}	0.25	0.5	0.5
P_{t+1}	0.35	0.35	0

Dalla tabella si ottiene la matrice di transizione

$$M = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.15 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0.35 & 0.35 & 0 \end{pmatrix}$$

Le condizioni metereologi che richieste sono $\vec{C}(2) = M \cdot \vec{C}(1) = M \cdot \left[M \cdot \vec{C}(0) \right]$ (tra due giorni):

- $\vec{C}(1) = M \cdot \vec{C}(0) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.15 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0.35 & 0.35 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix}$
- $\vec{C}(2) = M \cdot \vec{C}(1) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.15 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 \\ 0.35 & 0.35 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3725 \\ 0.4 \\ 0.2275 \end{pmatrix}$

<u>Sereno: 37.25 %</u> <u>Nuvoloso: 40 %</u> <u>Pioggia: 22.75 %</u>

n. 9

La composizione del territorio della 1° comunità montana è:

$$\overrightarrow{C_1} = 360\begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.2 \\ 0.35 \end{pmatrix} ettari = \begin{pmatrix} 162 \\ 72 \\ 126 \end{pmatrix} ettari\,;$$

quella della 2° è:

$$\overrightarrow{C_2} = 440\begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.25 \\ 0.4 \end{pmatrix} ettari = \begin{pmatrix} 154 \\ 110 \\ 176 \end{pmatrix} ettari$$

La composizione del territorio della comunità montana risultante dalla fusione delle due precedenti è:

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{C_2} = \begin{pmatrix} 162 \\ 72 \\ 126 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 154 \\ 110 \\ 176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 316 \\ 182 \\ 302 \end{pmatrix} ettari$$

La superficie complessiva del territorio è $S = (360 + 440) = 800\,ettari$.

La nuova proporzione vale:

- Bosco: $\frac{316}{800} \cdot 100 = 39.5\%$
- Arbusti: $\frac{182}{800} \cdot 100 \simeq 22.75\%$
- Prato: $\frac{302}{800} \cdot 100 = 37.75\%$