UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

2° Parziale di MATEMATICA (A)

San Floriano, 17/01/2019

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ___________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio compitino venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio compitino non venga corretto nè valutato. **NOTA:** *Ritirandosi da un parziale, lo studente è tenuto a presentarsi in appello.*

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/3)
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2x \cdot y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

QUESITO 2 (_____/3)
Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

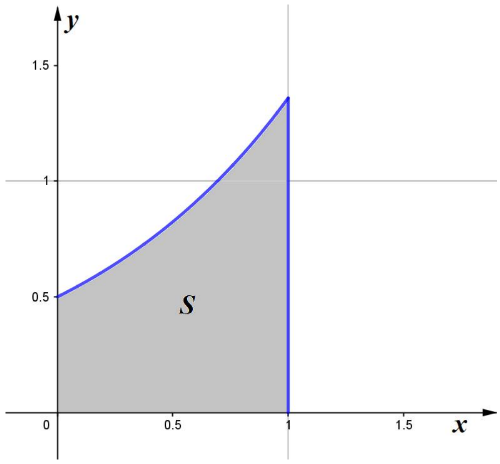
$$y'' - 3y' + 2y = x + 1$$

QUESITO 3 (_____/3)
Dopo aver verificato che esistono una coppia di coefficienti reali A e B tali che:

$$\frac{5}{2x^2-3x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{2x+1}$$

studiare la convergenza dell'integrale $\int_3^{+\infty}\frac{5}{2x^2-3x-2}dx$ e scriverne il valore, in caso di convergenza.

QUESITO 4 (_____/3)
La superficie S in figura è delimitata dagli assi cartesiani, dalla funzione $f(x)=\frac{e^x}{2}$ e dalla retta $x=1$.



a) Calcolare l'area della regione S.

Calcolare inoltre il volume del solido generato da una rotazione completa della superficie S rappresentata in figura:

b) attorno all'asse x;
c) attorno all'asse y.

QUESITO 5 (_____/4)
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x+7y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x-4y-5z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2z=1 \\ -x+2y+6z=11 \\ 2y+2z=6 \end{cases}$

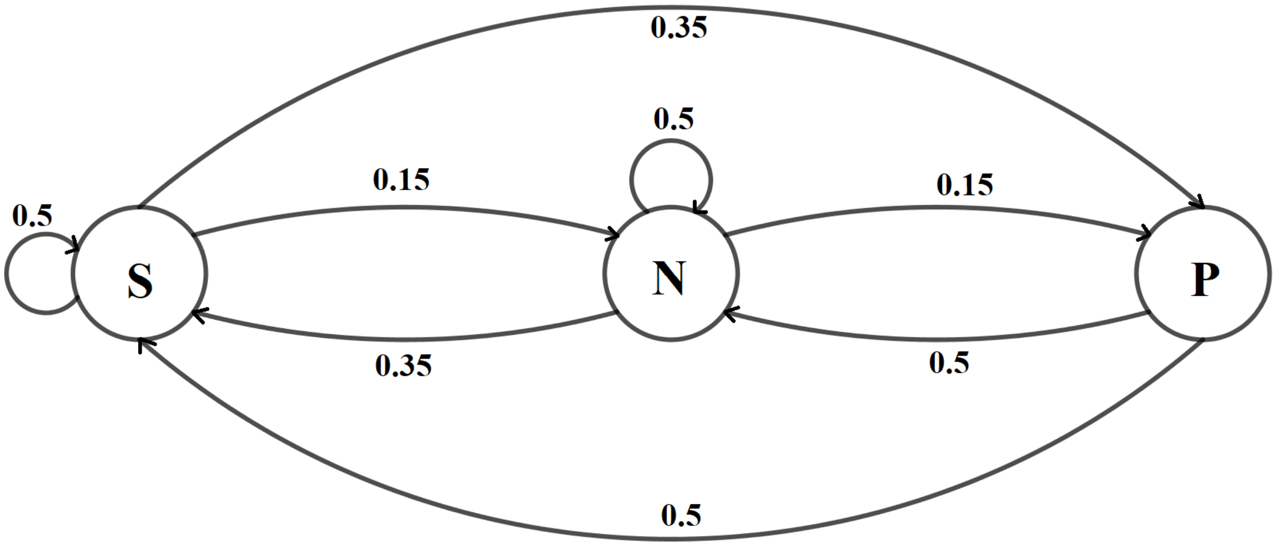
QUESITO 6 (_____/3)

Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & \pi \\ -2 & 1 & 0 & -\pi \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

QUESITO 7 (_____/3)
Una certa specie di trote viene suddivisa in tre classi di età; la percentuale di sopravvivenza dalla prima alla seconda classe è il 50% e quella dalla seconda alla terza è il 30%. Ciascuna femmina di trota genera 5 femmine durante il secondo periodo e 2 durante il terzo. La prima classe di età non è riproduttiva.

a) Scrivere la matrice di Leslie e disegnare il diagramma di vita della popolazione.
b) In un certo istante t la popolazione è espressa dal vettore $\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix}70\\10\\3\end{pmatrix}$. Qual è la composizione $\overrightarrow{N}_{t+1}$ della popolazione dopo un intervallo di previsione? Qual era la composizione $\overrightarrow{N}_{t-1}$ nell'intervallo di previsione precedente?

QUESITO 8 (_____/5)
Dallo studio del clima in una certa zona si è notato che le condizioni meteo del giorno $t+1$ dipendano solo da quelle del giorno t, ma non da quelle dei giorni precedenti. Per semplicità di costruzione del modello, supponiamo che vi siano solo tre possibili condizioni meteorologiche: sereno (S), nuvoloso (N), pioggia (P).
Il diagramma di flusso che rappresenta la situazione climatica è il seguente:



e lo stato climatico al giorno t è rappresentato dal vettore $\vec{C}(t)=\begin{pmatrix} S_t \\ N_t \\ P_t \end{pmatrix}$.

a) Scrivere la matrice di transizione del sistema.

b) Oggi il tempo è $\vec{C}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Come sarà il tempo tra due giorni?

Sereno: ________ % Nuvoloso: ________ % Pioggia: ________ %

QUESITO 9 (_____/4)

Due vasche contengono orate di taglie diverse. La composizione percentuale è rappresentata in tabella:

	Lunghezza		
	L < 30 cm	30 cm ≤ L < 40 cm	L ≥ 40 cm
Vasca 1	35%	45%	20%
Vasca 2	40%	35%	25%

Ad un certo punto le due popolazioni vengono mischiate. Determinare le proporzioni della nuova popolazione, costituita dall'unione delle precedenti, sapendo che nella prima vasca ci sono 320 pesci in tutto, mentre quelli della seconda sono 480.

TOT: ____________/30

Traccia di soluzione – fila A

N. 1
Separando le variabili otteniamo:

$$y' = 2x \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2x \cdot dx$$

da cui

$$\ln|y| = x^2 + c \Leftrightarrow |y| = e^{x^2+c} = e^c \cdot e^{x^2} \Leftrightarrow y = k \cdot e^{x^2}$$

Affinchè risulti:

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = k \cdot e^0 \Leftrightarrow k = 2$$

La soluzione cercata è, quindi:

$$y = 2 \cdot e^{x^2}$$

N. 2
Consideriamo l'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = x + 1$; cerchiamo innanzitutto la soluzione generale della omogenea associata:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

La soluzione è:

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ la soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$\varphi = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Cerchiamo una soluzione particolare all'equazione non omogenea; proviamo con un polinomio di grado 1:

$$\psi = ax + b \qquad \psi' = a \qquad \psi'' = 0$$

Sostituendo:

$$0 - 3a + 2(ax + b) = x + 1 \Leftrightarrow 2ax + (2b - 3a) = x + 1$$

L'uguaglianza è un'identità se e solo se:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 2b - \frac{3}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow$ soluzione generale: $y = \varphi + \psi = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

N. 3
Cerchiamo A e B in modo che l'uguaglianza $\frac{5}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{2x + 1}$ sia un'identità.

Dev'essere:

$$\frac{5}{2x^2-3x-2}=\frac{A(2x+1)+B(x-2)}{(x-2)(2x+1)}=\frac{(2A+B)x+(A-2B)}{2x^2-3x-2}$$

Abbiamo un'identità se e solo se:

$$\begin{cases}2A+B=0\\A-2B=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2A+B=0\\2A-4B=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{B}{2}\\5B=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-2\end{cases}$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{5}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{2x+1}$$

e pertanto:

$$\int_3^k\frac{5}{2x^2-3x-2}dx=\int_3^k\frac{1}{x-2}-\frac{2}{2x+1}dx=\left[\ln|x-2|-\ln|2x+1|\right]_3^k=\left[\ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right|\right]_3^k=$$

$$=\ln\left|\frac{k-2}{2k+1}\right|-\ln\frac{1}{7}=\ln\left|\frac{k-2}{2k+1}\right|+\ln 7$$

$$\int_3^{+\infty}\frac{5}{2x^2-3x-2}dx=\lim_{k\to+\infty}\int_3^k\frac{5}{2x^2-3x-2}dx=\lim_{k\to+\infty}\ln\left|\frac{k-2}{2k+1}\right|+\ln 7=\ln\frac{7}{2}$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $\ln\frac{7}{2}$.

N. 4

a) L'area è $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{e^x}{2}dx=\left[\frac{e^x}{2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}u^2$

b) Il solido ottenuto da una rotazione attorno all'asse x della superficie S ha volume:

$$V_x=\pi\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{8}\left(e^2-1\right)u^3$$

c) Il solido ottenuto da una rotazione attorno all'asse y della superficie S ha volume:

$$V_y=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx=2\pi\int_0^1 x\frac{e^x}{2}dx=\pi\int_0^1 xe^x dx$$

Integrando per parti:

$$\int_0^1 xe^x dx=\left[x\cdot e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-0-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

e quindi:

$$V_y=\pi\int_0^1 xe^x dx=\pi\cdot 1=\pi\,u^3$$

N. 5

a) $\begin{cases}x+7y+2z=0\\x+y-z=0\\2x-4y-5z=0\end{cases}$

Sottraendo membro a membro la 2° eq. dalla prima:

$$\begin{cases}6y+3z=0\\x+y-z=0\\2x-4y-5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2y\\x+y+2y=0\\2x-4y+10y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2y\\x=-3y\\-6y-4y+10y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2y\\x=-3y\end{cases}$$

Quindi la soluzione generale è:

$$\left(-3y, y, -2y\right), \forall y \in \mathbb{R}$$

b) $\begin{cases} x+2z=1 \\ -x+2y+6z=11 \\ 2y+2z=6 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+4z=6 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ y+4=6 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\left(-1,2,1\right)$$

N. 6

Osservando la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & \pi \\ -2 & 1 & 0 & -\pi \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si nota immediatamente che la 4° riga è la somma delle righe 2 e 3.

$\Rightarrow$ il rango non può essere massimo, dal momento che il determinante della matrice è nullo, sotto queste ipotesi.

Consideriamo ora il minore:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

e calcoliamone il determinante mediante il teorema di Laplace (rispetto alla seconda colonna):

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & -\pi \end{vmatrix} = 1\cdot\left(-1\right)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -\pi \end{vmatrix} = \pi - 3 \neq 0$$

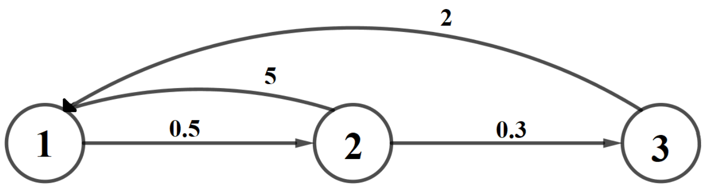
$\Rightarrow$ il rango è 3.

N.7

a) In base ai dati del problema, la matrice di Leslie è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il diagramma di vita della popolazione è:



b) Per trovare la composizione $\overrightarrow{N}_{t+1}$ della popolazione all'istante $t+1$ è sufficiente applicare la matrice A al vettore $\overrightarrow{N}_t$:

$$\overrightarrow{N}_{t+1} = A\overrightarrow{N}_t = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 35 \\ 3 \end{pmatrix}$$

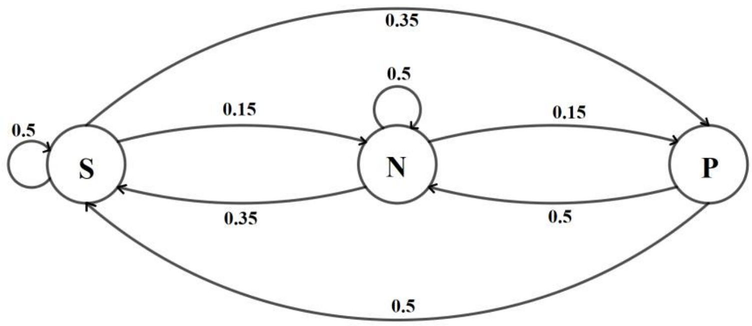
Se invece vogliamo calcolare la composizione della popolazione all'istante $t-1$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$A \cdot \overrightarrow{N}_{t-1} = \overrightarrow{N}_t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y+2z=70 \\ \dfrac{x}{2}=10 \\ \dfrac{3}{10}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y+2z=70 \\ x=20 \\ y=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=10 \\ 50+2z=70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=10 \\ z=10 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

N. 8

Traduciamo il diagramma di flusso



in matrice:

		Passa da...		
		S_t	N_t	P_t
Passa a...	S_{t+1}	0.5	0.35	0.5
	N_{t+1}	0.15	0.5	0.5
	P_{t+1}	0.35	0.15	0

$\Rightarrow$ la matrice di transizione è:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.5 \\ 0.15 & 0.5 & 0.5 \\ 0.35 & 0.15 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 \\ 3 & 10 & 10 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando la matrice A al vettore $\vec{C}(0)$ otteniamo:

$$\vec{C}(1) = A \cdot \vec{C}(0) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 \\ 3 & 10 & 10 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Applicando la matrice A al vettore $\vec{C}(1)$ otteniamo:

$$\vec{C}(2) = A \cdot \vec{C}(1) = \frac{1}{400}\begin{pmatrix} 10 & 7 & 10 \\ 3 & 10 & 10 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{400}\begin{pmatrix} 191 \\ 130 \\ 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4775 \\ 0.325 \\ 0.1975 \end{pmatrix}$$

<u>Sereno: 47.75 %</u> <u>Nuvoloso: 32.5 %</u> <u>Pioggia: 19.75 %</u>

N. 9

Il vettore $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.45 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ rappresenta la proporzione dei pesci della popolazione nella vasca 1; analogamente il vettore $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix}$. Pertanto, la popolazione risultante una volta collegate le due vasche è composta da:

$$\vec{v} = 320\vec{v}_1 + 480\vec{v}_2 = 320\begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.45 \\ 0.2 \end{pmatrix} + 480\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112 \\ 144 \\ 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 192 \\ 168 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 304 \\ 312 \\ 184 \end{pmatrix}$$

- 304 pesci di lunghezza inferiore a 30 cm;
- 312 pesci di lunghezza minore di 40 cm e non inferiore a 30 cm;
- 184 pesci di lunghezza non inferiore a 40 cm

$\Rightarrow$ la nuova proporzione della popolazione è:

$$\vec{v} = \frac{1}{800}\begin{pmatrix} 304 \\ 312 \\ 184 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.39 \\ 0.23 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

2° Parziale di MATEMATICA (B)

San Floriano, 17/01/2019

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio compitino venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio compitino non venga corretto nè valutato. **NOTA:** *Ritirandosi da un parziale, lo studente è tenuto a presentarsi in appello.*

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/3)
Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -4x \cdot y \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

QUESITO 2 (_____/3)
Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y'' + 3y' + 2y = x - 1$$

QUESITO 3 (_____/3)

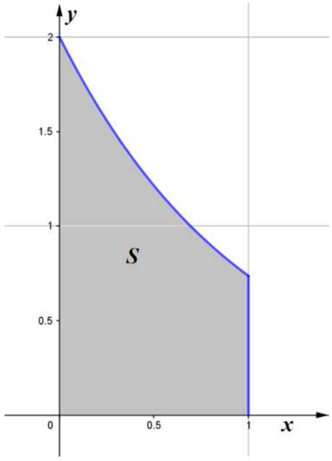
Dopo aver verificato che esistono una coppia di coefficienti reali A e B tali che:

$$\frac{10}{3x^2+8x-3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{3x-1}$$

studiare la convergenza dell'integrale $\int_2^{+\infty}\frac{10}{3x^2+8x-3}dx$ e scriverne il valore, in caso di convergenza.

QUESITO 4 (_____/3)

La superficie S in figura è delimitata dagli assi cartesiani, dalla funzione $f(x)=2e^{-x}$ e dalla retta $x=1$.



a) Calcolare l'area della regione S.

Calcolare inoltre il volume del solido generato da una rotazione completa della superficie S rappresentata in figura:

b) attorno all'asse x;

c) attorno all'asse y.

QUESITO 5 (_____/4)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases}7x+y+2z=0\\x+y-z=0\\4x-2y+5z=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-2z=-3\\x-2y-6z=-11\\2y+8z=12\end{cases}$

QUESITO 6 (_____/3)

Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix}-1&2&3&e\\1&1&0&-e\\0&3&3&0\\0&1&2&3\end{pmatrix}$

QUESITO 7 (_____/3)

Una certa specie di trote viene suddivisa in tre classi di età; la percentuale di sopravvivenza dalla prima alla seconda classe è il 50% e quella dalla seconda alla terza è il 40%. Ciascuna femmina di trota genera 4 femmine durante il secondo periodo e 3 durante il terzo. La prima classe di età non è riproduttiva.

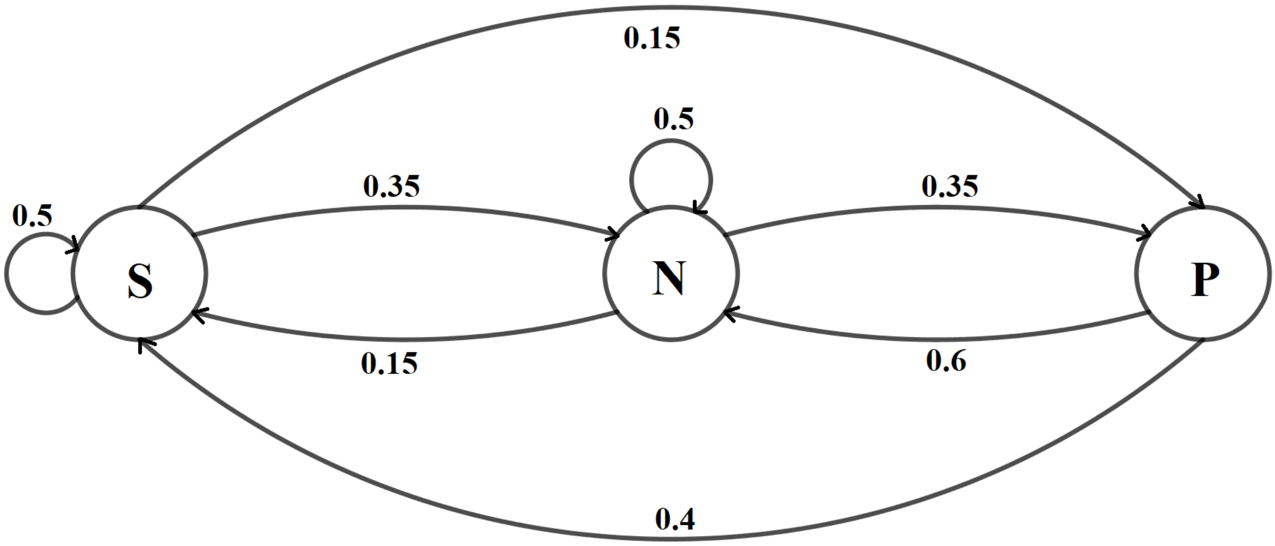
a) Scrivere la matrice di Leslie e disegnare il diagramma di vita della popolazione.

b) In un certo istante t la popolazione è espressa dal vettore $\overrightarrow{N}_t=\begin{pmatrix}44\\50\\2\end{pmatrix}$. Qual è la composizione $\overrightarrow{N}_{t+1}$ della popolazione dopo un intervallo di previsione? Qual era la composizione $\overrightarrow{N}_{t-1}$ nell'intervallo di previsione precedente?

QUESITO 8 (_____/5)

Dallo studio del clima in una certa zona si è notato che le condizioni meteo del giorno $t+1$ dipendano solo da quelle del giorno *t*, ma non da quelle dei giorni precedenti. Per semplicità di costruzione del modello, supponiamo che vi siano solo tre possibili condizioni meteorologiche: sereno (S), nuvoloso (N), pioggia (P).

Il diagramma di flusso che rappresenta la situazione climatica è il seguente:



e lo stato climatico al giorno t è rappresentato dal vettore $\vec{C}(t)=\begin{pmatrix} S_t \\ N_t \\ P_t \end{pmatrix}$.

a) Scrivere la matrice di transizione del sistema.

b) Oggi il tempo è $\vec{C}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Come sarà il tempo tra due giorni?

Sereno: _______ % Nuvoloso: _______ % Pioggia: _______ %

QUESITO 9 (_____/4)

Due vasche contengono dentici di taglie diverse. La composizione percentuale è rappresentata in tabella:

	Lunghezza		
	L < 30 cm	30 cm ≤ L < 65 cm	L ≥ 65 cm
Vasca 1	25%	45%	30%
Vasca 2	45%	30%	25%

Ad un certo punto le due popolazioni vengono mischiate. Determinare le proporzioni della nuova popolazione, costituita dall'unione delle precedenti, sapendo che nella prima vasca ci sono 480 pesci in tutto, mentre quelli della seconda sono 320.

TOT: ____________/30

Traccia di soluzione – fila B

N. 1
Separando le variabili otteniamo:

$$y' = -4x \cdot y \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = -4x \cdot y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -4x \cdot dx$$

da cui

$$\ln|y| = -2x^2 + c \;\Leftrightarrow\; |y| = e^{-2x^2+c} = e^c \cdot e^{-2x^2} \;\Leftrightarrow\; y = k \cdot e^{-2x^2}$$

Affinchè risulti:

$$y(0) = 4 \;\Leftrightarrow\; 4 = k \cdot e^0 \;\Leftrightarrow\; k = 4$$

La soluzione cercata è, quindi:

$$y = 4 \cdot e^{-2x^2}$$

N. 2
Consideriamo l'equazione differenziale $y''+3y'+2y = x-1$; cerchiamo innanzitutto la soluzione generale della omogenea associata:

$$y''+3y'+2y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

La soluzione è:

$$\Delta = 9-8 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{-3\pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ la soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$\varphi = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Cerchiamo una soluzione particolare all'equazione non omogenea; proviamo con un polinomio di grado 1:

$\psi = ax+b$ $\qquad\qquad$ $\psi' = a$ $\qquad\qquad$ $\psi'' = 0$

Sostituendo:

$$0 + 3a + 2(ax+b) = x-1 \;\Leftrightarrow\; 2ax + (2b+3a) = x-1$$

L'uguaglianza è un'identità se e solo se:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b+3a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ 2b + \dfrac{3}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \wedge b = -\frac{5}{4}$$

$\Rightarrow \psi = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow$ soluzione generale: $y = \varphi + \psi = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$

N. 3
Cerchiamo A e B in modo che l'uguaglianza $\dfrac{10}{3x^2+8x-3} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{3x-1}$ sia un'identità.

Dev'essere:

$$\frac{10}{3x^2+8x-3}=\frac{A(3x-1)+B(x+3)}{(x+3)(3x-1)}=\frac{(3A+B)x+(3B-A)}{3x^2+8x-3}$$

Abbiamo un'identità se e solo se:

$$\begin{cases}3A+B=0\\3B-A=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-3A\\-9A-A=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=3\end{cases}$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{10}{3x^2+8x-3}=\frac{3}{3x-1}-\frac{1}{x+3}$$

e pertanto:

$$\int_2^k\frac{10}{3x^2+8x-3}dx=\int_2^k\frac{3}{3x-1}-\frac{1}{x+3}dx=\left[\ln|3x-1|-\ln|x+3|\right]_2^k=\left[\ln\left|\frac{3x-1}{x+3}\right|\right]_2^k=$$

$$=\ln\left|\frac{3k-1}{k+3}\right|-\ln 1=\ln\left|\frac{3k-1}{k+3}\right|$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{10}{3x^2+8x-3}dx=\lim_{k\to+\infty}\int_2^k\frac{10}{3x^2+8x-3}dx=\lim_{k\to+\infty}\ln\left|\frac{3k-1}{k+3}\right|=\ln 3$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $\ln 3$.

N. 4

a) L'area è $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 2e^{-x}dx=2\left[-e^{-x}\right]_0^1=2\left(1-e^{-1}\right)u^2$

b) Il solido ottenuto da una rotazione attorno all'asse x della superficie S ha volume:

$$V_x=\pi\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx=4\pi\int_0^1 e^{-2x}dx=4\pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1=2\pi\left(1-e^{-2}\right)u^3$$

c) Il solido ottenuto da una rotazione attorno all'asse y della superficie S ha volume:

$$V_y=2\pi\int_0^1 xf(x)dx=2\pi\int_0^1 x\left(2e^{-x}\right)dx=4\pi\int_0^1 xe^{-x}dx$$

Integrando per parti:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-x\cdot e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=\left[-e^{-1}+0\right]-\left[e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}-\left(e^{-1}-1\right)=1-2e^{-1}$$

e quindi

$$V_y=4\pi\int_0^1 xe^{-x}dx=4\pi\left(1-2e^{-1}\right)u^3$$

N. 5

a) $\begin{cases}7x+y+2z=0\\x+y-z=0\\4x-2y+5z=0\end{cases}$

Sottraendo membro a membro la 2° eq. dalla prima:

$$\begin{cases}6x+3z=0\\x+y-z=0\\4x-2y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2x\\x+y+2x=0\\4x-2y-10x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2x\\y=-3x\\-2y-6x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2x\\y=-3x\end{cases}$$

Quindi la soluzione generale è:

$$(x,-3x,-2x),\forall x\in\mathbb{R}$$

b) $\begin{cases} x-2z=-3 \\ x-2y-6z=-11 \\ 2y+8z=12 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -6 & -11 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi:

$$\begin{cases} x-2z=-3 \\ y+2z=4 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-3 \\ y+2=4 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$(-1,2,1)$$

N. 6

Osservando la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & e \\ 1 & 1 & 0 & -e \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

si nota immediatamente che la 3° riga è la somma delle righe 1 e 2.

$\Rightarrow$ il rango non può essere massimo, dal momento che il determinante della matrice è nullo, sotto queste ipotesi.

Consideriamo ora il minore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e calcoliamone il determinante mediante il teorema di Laplace (rispetto alla prima colonna):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-3 \neq 0$$

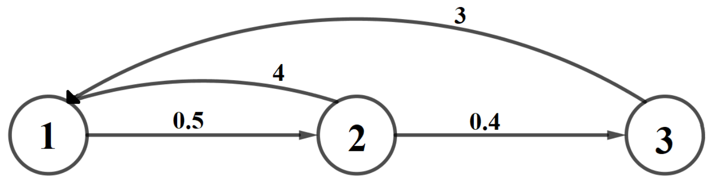
$\Rightarrow$ il rango è 3.

N.7

a) In base ai dati del problema, la matrice di Leslie è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il diagramma di vita della popolazione è:



b) Per trovare la composizione $\overrightarrow{N}_{t+1}$ della popolazione all'istante $t+1$ è sufficiente applicare la matrice A al vettore $\overrightarrow{N}_t$:

$$\overrightarrow{N}_{t+1} = A\overrightarrow{N}_t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 44 \\ 50 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 \\ 22 \\ 20 \end{pmatrix}$$

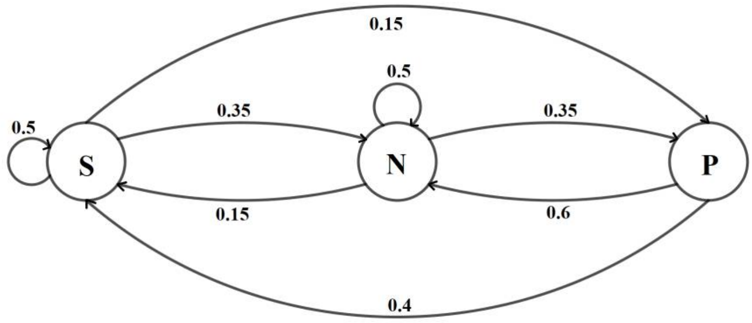
Se invece vogliamo calcolare la composizione della popolazione all'istante $t-1$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$A \cdot \overrightarrow{N}_{t-1} = \overrightarrow{N}_t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 50 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+3z=44 \\ \dfrac{x}{2}=50 \\ \dfrac{2}{5}y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20+3z=44 \\ x=100 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=5 \\ 3z=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=5 \\ z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

N. 8

Traduciamo il diagramma di flusso



in matrice:

		Passa da…		
		S_t	N_t	P_t
Passa a…	S_{t+1}	0.5	0.15	0.4
	N_{t+1}	0.35	0.5	0.6
	P_{t+1}	0.15	0.35	0

$\Rightarrow$ la matrice di transizione è:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.15 & 0.4 \\ 0.35 & 0.5 & 0.6 \\ 0.15 & 0.35 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 7 & 10 & 12 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando la matrice A al vettore $\overrightarrow{C}(0)$ otteniamo:

$$\overrightarrow{C}(1) = A \cdot \overrightarrow{C}(0) = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 7 & 10 & 12 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Applicando la matrice A al vettore $\overrightarrow{C}(1)$ otteniamo:

$$\vec{C}(2) = A \cdot \vec{C}(1) = \frac{1}{400}\begin{pmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 7 & 10 & 12 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{400}\begin{pmatrix} 145 \\ 176 \\ 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3625 \\ 0.44 \\ 0.1975 \end{pmatrix}$$

Sereno: 36.25 % Nuvoloso: 44 % Pioggia: 19.75 %

N. 9

Il vettore $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.45 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ rappresenta la proporzione dei pesci della popolazione nella vasca 1; analogamente il vettore $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.3 \\ 0.25 \end{pmatrix}$. Pertanto, la popolazione risultante una volta collegate le due vasche è composta da:

$$\vec{v} = 480\vec{v}_1 + 320\vec{v}_2 = 480\begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.45 \\ 0.2 \end{pmatrix} + 320\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 216 \\ 144 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 \\ 96 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 264 \\ 312 \\ 224 \end{pmatrix}$$

- 264 pesci di lunghezza inferiore a 30 cm;
- 312 pesci di lunghezza minore di 65 cm e non inferiore a 30 cm;
- 224 pesci di lunghezza non inferiore a 65 cm

$\Rightarrow$ la nuova proporzione della popolazione è:

$$\vec{v} = \frac{1}{800}\begin{pmatrix} 264 \\ 312 \\ 224 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0.39 \\ 0.28 \end{pmatrix}$$