UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (A)

San Floriano, 06/02/2020

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: __________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

- o **APPELLO:** Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta dal n. 2 al n. 6 + 3 quesiti a scelta dal n. 8 al n. 12
- o **RECUPERO 1° PARZIALE:** quesiti dal n. 1 al n. 6
- o **RECUPERO 2° PARZIALE:** quesiti dal n. 7 al n. 12

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame
Parte A

Svolgere il quesito 1 (studio di funzione) più 2 quesiti a scelta tra i restanti 4.

QUESITO 1 (____/6)

Studiare la funzione $f(x)=2\frac{x^2-1}{x^2+1}$, determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=8\frac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$, determinare i punti di flesso della funzione. Disegnare il grafico.

QUESITO 2 (____/5)

Scrivere l'equazione della tangente t al grafico della funzione $f(x)=x-\dfrac{e^x}{x}$ nel suo punto di ascissa $x=2$.

Tra le rette ortogonali a t determinare quella passante per il punto $P\left(2,\dfrac{8}{e^2-4}\right)$.

QUESITO 3 (____/5)

Tra i seguenti limiti, uno non può essere calcolato mediante il Teorema di de l'Hospital. Specificare quale dopo averli calcolati, motivando esaurientemente la risposta:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2+2x}=$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x-1\right)}{\ln\left(4x^2+1\right)}=$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x^4}{x^3}=$

QUESITO 4 (____/5)

Classificare i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni.

a) $f(x)=\left|x^3-3x^2\right|$ b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$

QUESITO 5 (____/5)

L'uva fragola è un'uva a bacca rotondeggiante. Si è notato che tra la superficie S di un acino (in cm^2) ed il suo volume V (in cm^3) esiste una relazione, che può essere espressa, in scala logaritmica, da

$$\ln S=1.5761+0.6667\ln V$$

Applicando le proprietà dei logaritmi, determinare i coefficienti α e β della relazione allometrica $S=\alpha\cdot V^{\beta}$ (approssimati alla 4° cifra decimale). Stimare, inoltre:

a) la superficie di un acino di volume $0.37\,cm^3$;
b) il volume di un acino la cui superficie è di $2.2\,cm^2$.

QUESITO 6 (____/5)

In un parco naturale vengono immessi 80 caprioli. A causa della scarsità di risorse ambientali, si prevede che a lungo andare la popolazione possa avvicinarsi alla soglia limite di 1600 esemplari, senza però superarla.

Sapendo che la crescita della popolazione è modellizzata tramite la curva logistica $N(t)=A\left(1+Be^{-\frac{t}{4}}\right)^{-1}$,

ove il tempo è misurato in anni, determinare i parametri incogniti della funzione; successivamente calcolare il tempo necessario, dall'introduzione dei caprioli nel parco per superare la soglia critica di 1490 caprioli.

In quale anno è massima la rapidità di crescita della popolazione? Quanto vale?

Parte B

Svolgere 3 quesiti a scelta tra quelli proposti.

QUESITO 7 (____/6) – ESCLUSIVAMENTE PER CHI DEVE RIFARE IL 2° PARZIALE

a) Verificare che esistono due numeri reali A e B tali che $\dfrac{1}{6x^2+5x-6}=\dfrac{A}{3x-2}+\dfrac{B}{2x+3}$ per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3}\right\}$. Determinare, quindi, l'area della regione piana racchiusa dal grafico della funzione $f(x)=\dfrac{1}{6x^2+5x-6}$, dall'asse x e dalle rette $x=1$ e $x=k$, per $k>1$.
b) Detta $A(k)$ l'area calcolata al punto precedente, calcolare $\lim\limits_{k\to+\infty}A(k)$
c) Determinare il volume del solido generato da una rotazione completa della funzione $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ attorno all'asse x, nel suo dominio di definizione.

QUESITO 8 (____/5)

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale: $y''-3y'-4y=e^{2x}$

QUESITO 9 (____/5)

a) Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Dopo aver calcolato il prodotto $C = A \cdot B$ tra le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcoli il determinante della matrice C.

QUESITO 10 (____/5)

Una popolazione di insetti ha le seguenti caratteristiche: ciascun insetto non vive più di 3 mesi, il 60% degli insetti che sono nel primo mese di vita non raggiunge il secondo mese e solo il 30% di quelli che sono nel secondo mese di vita arriva al terzo. Inoltre, gli insetti diventano fertili solo nel secondo mese; ogni insetto nel secondo mese di vita ne genera altri 4 e ciascuno di quelli arrivati al terzo mese ne genera altri 3.

a) Disegnare il grafo di vita e trova la matrice di Leslie che descrive la dinamica della popolazione.
b) Una popolazione è inizialmente costituita da 1800 insetti nel primo mese, 160 nel secondo mese e 90 nel terzo. Come evolve la popolazione nel mese successivo? Qual era la composizione all'inizio del periodo precedente?

QUESITO 11 (____/5)

Risolvere i seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} 2x-y-2z=-6 \\ x+3y-z=4 \\ -x+z=2 \end{cases}$

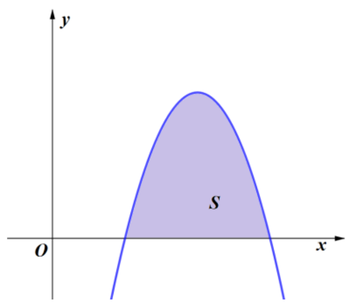
b) $\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ x+y-z=0 \\ 4x-5y+2z=0 \end{cases}$

QUESITO 12 (____/5)

La regione S in figura è delimitata dalla parabola $f(x)=-2x^2+8x-6$ e dall'asse x. S è la base di un solido W le cui intersezioni, ottenute con piani ortogonali all'asse x, sono dei rettangoli di altezza $h(x)=\frac{1}{x}$.

Determinare il volume del solido W.

Determinare, inoltre, il volume del solido W′ ottenuto facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse y.



PUNTEGGIO TOTALE: ____/30

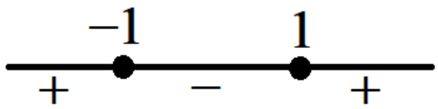
N. 1

$$f(x)=2\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ:

  $$f(x)=2\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=2\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)\ \Rightarrow\ f(x)\text{ pari}\Rightarrow\text{il grafico ha una simmetria rispetto all'asse } y$$

- SEGNO/INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

  $f(0)=-2\ \Rightarrow\ A(0,-2)$

  $f(x)\geq 0\ \Leftrightarrow\ x^2-1\geq 0$

  Il grafico passa per $(\pm 1,0)$

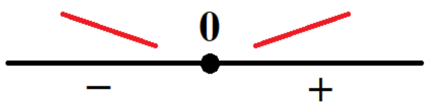
- LIMITI/ASINTOTI:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty} 2\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=2$$

  $\Rightarrow$ la retta $y=2$ è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ (e per simmetria anche per $x\to-\infty$)

- MONOTONIA:

  $$f'(x)=2\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=4x\frac{x^2+1-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{8x}{(x^2+1)^2}\geq 0$$

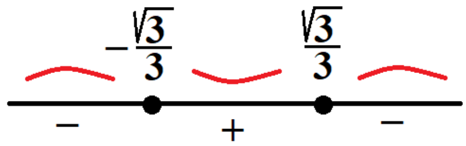
  $\Leftrightarrow\ x\geq 0$

  $\Rightarrow$ minimo in $A(0,-2)$

- CONCAVITÀ:

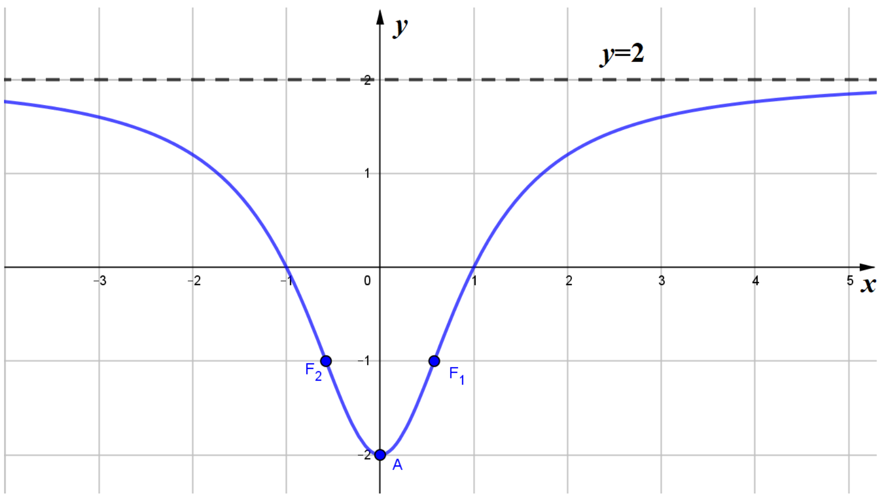
  $$f''(x)=8\frac{(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot x}{(x^2+1)^4}=8\frac{x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^3}=8\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}\geq 0\ \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow\ 1-3x^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ x^2\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

  $$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=-1\ \Rightarrow\ \text{flessi: } F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},-1\right)$$

- GRAFICO:



Sol. A1

N. 2

Consideriamo $f\left(x\right) = x - \dfrac{e^x}{x}$.

$\Rightarrow f\left(2\right) = 2 - \dfrac{e^2}{2} \Rightarrow$ punto di tangenza: $T\left(2;2 - \dfrac{e^2}{2}\right)$

$f'\left(x\right) = 1 - \dfrac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è:

$$m = f'\left(2\right) = 1 - \frac{2e^2 - e^2}{4} = \frac{4 - e^2}{4}$$

$\Rightarrow$ tangente:

$$y - \left(2 - \frac{e^2}{2}\right) = \frac{4 - e^2}{4}\left(x - 2\right) \Leftrightarrow y = 2 - \frac{e^2}{2} + \frac{4 - e^2}{4}x - \frac{4 - e^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{4 - e^2}{4}x}$$

Una retta ortogonale a *t* ha coefficiente angolare $m' = \dfrac{4}{e^2 - 4}$; imponendo il passaggio per il punto P otteniamo:

$$y - \frac{8}{e^2 - 4} = \frac{4}{e^2 - 4}\left(x - 2\right) \Leftrightarrow y - \frac{8}{e^2 - 4} = \frac{4}{e^2 - 4}x - \frac{8}{e^2 - 4} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{4}{e^2 - 4}x}$$

N. 3

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 + 2x} =_H \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x + 1} =_H \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = +\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\left(e^x - 1\right)}{\ln\left(4x^2 + 1\right)} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{\ln\left(4x^2 + 1\right)} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to0} \underbrace{\frac{4x^2}{\ln\left(4x^2 + 1\right)}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. In questo caso il limite non può essere calcolato mediante il Teorema di de l'Hospital dal momento che è ottenuto mediante il prodotto di due limiti notevoli.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \ln x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 4\ln x}{x^3} =_H \lim_{x\to+\infty} \frac{4\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{3x^3} = 0$

N. 4

a) $f\left(x\right) = \left|x^3 - 3x^2\right| = x^2\left|x - 3\right| = \begin{cases} x^2\left(x - 3\right) & x \geq 3 \\ x^2\left(3 - x\right) & x < 3 \end{cases}$ da cui otteniamo $f\left(x\right) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ 3x^2 - x^3 & x < 3 \end{cases}$

La derivata è, quindi:

$$f'\left(x\right) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ 6x - 3x^2 & x < 3 \end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to3^-} f'\left(x\right) = \lim_{x\to3^-} 6x - 3x^2 = -9$
- $\displaystyle\lim_{x\to3^+} f'\left(x\right) = \lim_{x\to3^+} 3x^2 - 6x = 9$

$\Rightarrow$ in $x = 3$ la funzione presenta un punto angoloso.

b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2-x}=\left(x^2-x\right)^{\frac{1}{3}}$. Dominio: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-x\right)^{-\frac{2}{3}}(2x-1)=\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{\left(x^2-x\right)^2}}$. Dominio: $D'=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

- $\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{\left(x^2-x\right)^2}}=-\infty$
- $\lim_{x\to 1} g'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{\left(x^2-x\right)^2}}=+\infty$

$\Rightarrow$ in $x=0$ e in $x=1$ la funzione presenta un flesso a tangente verticale.

N. 5

Dalla relazione $\ln S=1.5761+0.6667\ln V$ otteniamo:

$$\ln S=\ln 4.8361+\ln V^{0.6667} \Leftrightarrow \ln S=\ln 4.8361\cdot V^{0.6667} \Leftrightarrow S=4.8361\cdot V^{0.6667}$$

Pertanto:

$$\alpha\simeq 4.8361 \quad \text{e} \quad \beta\simeq 0.6667$$

a) Se $V=0.37\,cm^3$ allora

$$S=4.8361\cdot 0.37^{0.6667}\simeq 2.49\,cm^2$$

b) Se $S=2.2\,cm^2$ allora:

$$2.2=4.8361\cdot V^{0.6667} \Leftrightarrow V^{0.6667}\simeq 0.4549 \Leftrightarrow V\simeq 0.4549^{\frac{1}{0.6667}}\simeq 0.307\,cm^3$$

N. 6

Consideriamo la funzione

$$N(t)=A\left(1+Be^{-\frac{t}{4}}\right)^{-1}$$

- $N(0)=80 \Rightarrow A\left(1+Be^0\right)^{-1}=80 \Rightarrow \frac{A}{1+B}=80 \Rightarrow A=80+80B$
- Soglia limite di 1600 esemplari:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t)=1600 \Rightarrow 1600=\lim_{t\to+\infty} N(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{A}{1+Be^{-\frac{t}{4}}}=A$$

Pertanto:

$$1600=80+80B \Leftrightarrow 80B=1520 \Leftrightarrow B=19$$

Il modello di crescita della popolazione è, pertanto:

$$N(t)=\frac{1600}{1+19e^{-\frac{t}{4}}}$$

- $N(t)\geq 1490 \Leftrightarrow \frac{1600}{1+19e^{-\frac{t}{4}}}\geq 1490 \Leftrightarrow \frac{160}{1+19e^{-\frac{t}{4}}}\geq 149 \Leftrightarrow \frac{160}{149}\geq 1+19e^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow 19e^{-\frac{t}{4}}\leq\frac{11}{149} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{4}}\leq\frac{11}{2831} \Leftrightarrow -\frac{t}{4}\leq\ln\frac{11}{2831} \Leftrightarrow t\geq 22.2\,anni$

- La massima rapidità di crescita si ottiene nel punto di flesso della funzione; per trovare l'istante in cui la funzione presenta il punto di flesso è sufficiente risolvere l'equazione

$$N(t)=\frac{A}{2}=800 \Leftrightarrow \frac{1600}{1+19e^{-\frac{t}{4}}}=800 \Leftrightarrow 2=1+19e^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow 19e^{-\frac{t}{4}}=1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{4}}=\frac{1}{19} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{4}=-\ln 19 \Leftrightarrow t=4\cdot\ln 19 \simeq 11.78\,anni$$

Il valore del massimo tasso di crescita si calcola derivando la funzione $N(t)=1600\left(1+19e^{-\frac{t}{4}}\right)^{-1}$:

$$N'(t)=1600\left[-\left(1+19e^{-\frac{t}{4}}\right)^{-2}\left(-\frac{19}{4}e^{-\frac{t}{4}}\right)\right]=\frac{7600e^{-\frac{t}{4}}}{\left(1+19e^{-\frac{t}{4}}\right)^2}$$

Pertanto:

$$N'(4\cdot\ln 19)=\frac{7600\cdot\frac{1}{19}}{\left(1+19\cdot\frac{1}{19}\right)^2}=\frac{400}{4}=100\frac{camosci}{anno}$$

N. 7

(a)

Consideriamo: $\frac{1}{6x^2+5x-6}=\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{2x+3}$

Affinchè possa essere un'identità, per $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right\}$:

$$\frac{1}{6x^2+5x-6}=\frac{A(2x+3)+B(3x-2)}{(3x-2)(2x+3)}=\frac{(2A+3B)x+(3A-2B)}{6x^2+5x-6}$$

deve accadere che:

$$\begin{cases}2A+3B=0\\3A-2B=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6A+9B=0\\6A-4B=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=-\frac{2}{13}\\A=-\frac{3}{2}B=\frac{3}{13}\end{cases}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{6x^2+5x-6}=\frac{3}{13(3x-2)}-\frac{2}{13(2x+3)}$$

Calcoliamo l'area:

$$\int_1^k f(x)dx=\int_1^k\frac{1}{6x^2+5x-6}dx=\frac{1}{13}\int_1^k\frac{3}{3x-2}-\frac{2}{2x+3}dx=\frac{1}{13}\left[\ln|3x-2|-\ln|2x+3|\right]_1^k=$$

$$=\frac{1}{13}\left[\ln\left|\frac{3x-2}{2x+3}\right|\right]_1^k=\frac{1}{13}\left[\ln\left|\frac{3k-2}{2k+3}\right|-\ln\left|\frac{1}{5}\right|\right]=\frac{1}{13}\left[\ln\left|\frac{3k-2}{2k+3}\right|+\ln 5\right]$$

(b)

$$A(k)=\frac{1}{13}\left[\ln\left|\frac{3k-2}{2k+3}\right|+\ln 5\right]$$

Calcoliamo:

$$\lim_{k\to+\infty}A(k)=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{13}\left[\ln\left|\frac{3k-2}{2k+3}\right|+\ln 5\right]=\frac{1}{13}\left[\ln\frac{3}{2}+\ln 5\right]=\frac{1}{13}\ln\frac{15}{2}$$

(c)
Dominio della funzione $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$:

$$3x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$$

Volume del solido di rotazione:
l'elemento di volume è

$$dV=\pi\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\left(3x-x^2\right)dx$$

Pertanto:

$$V=\pi\int_0^3 3x-x^2dx=\pi\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\pi\left[\frac{27}{2}-\frac{27}{3}\right]=27\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{27}{6}\pi=\frac{9}{2}\pi\,u^3$$

N. 8

Ricordiamo che per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''-3y'-4y=e^{2x}$, dobbiamo:

- ***determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata*** $y''-3y'-4y=0$***:***
  equazione caratteristica $\lambda^2-3\lambda-4=0$

$$\Delta=9+16=25 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2}= \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

  $\Rightarrow$ L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è:

$$\varphi=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}$$

- ***trovare una soluzione particolare dell'equazione data:***
  consideriamo la funzione $\psi=ke^{2x}$ ed imponiamo che sia soluzione dell'equazione data.
  - $\psi'=2ke^{2x}$
  - $\psi''=4ke^{2x}$

  Sostituendo nell'equazione data otteniamo:

$$4ke^{2x}-3\cdot 2ke^{2x}-4ke^{2x}=e^{2x} \Leftrightarrow -6ke^{2x}=e^{2x} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{6}$$

- ***sommare le funzioni così ottenute:***
  La soluzione dell'equazione differenziale data è:

$$y=\varphi+\psi=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}-\frac{e^{2x}}{6}$$

N. 9

a) Il rango della matrice data non può essere superiore a 3, dal momento che la matrice ha 3 righe e 4 colonne. Per calcolarlo consideriamo il minore 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando il Teorema di Laplace rispetto alla 2° colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left(-1\right)^{3+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\left(1+2\right) = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\left(A\right) = 3$

b) Calcoliamo la matrice C:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante cercato è:

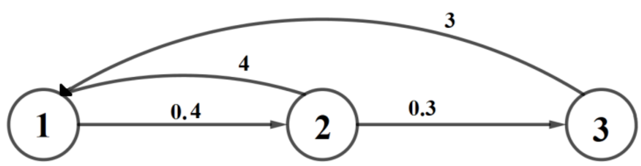
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{array} = 2 - 9 - \left(-4-3\right) = -7 + 7 = 0$$

$\Rightarrow \det\left(C\right) = 0$

N. 10

a) Il grafo di vita della popolazione è:



La matrice di Leslie è:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{N_t} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 160 \\ 90 \end{pmatrix}$

Applicando la matrice di Leslie:

$$\overrightarrow{N_{t+1}} = L \cdot \overrightarrow{N_t} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1800 \\ 160 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 910 \\ 720 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Per trovare la composizione della popolazione nel mese precedente, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4y+3z=1800 \\ \frac{2}{5}x=160 \\ \frac{3}{10}y=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+3z=1800 \\ x=400 \\ y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=300 \\ 1200+3z=1800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=300 \\ z=200 \end{cases}$$

Quindi:

$$\overrightarrow{N_{t-1}} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

N. 11

a) $\begin{cases} 2x-y-2z=-6 \\ x+3y-z=4 \\ -x+z=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ sommando tra loro la 2° e la 3° otteniamo: $\begin{cases} 2x-y-2z=-6 \\ 3y=6 \\ -x+z=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-2-2z=-6 \\ y=2 \\ -x+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2z=-4 \\ y=2 \\ -x+z=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ sommando tra loro la 1° e la 3° otteniamo: $\begin{cases} x-z=-2 \\ y=2 \\ 0=0 \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x=z-2 \\ y=2 \end{cases}$ ed il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Pertanto:

$$\begin{cases} x=k-2 \\ y=2 \\ z=k \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono, quindi:

$$(k-2,2,k), \forall k \in \mathbb{R}$$

b) $\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ x+y-z=0 \\ 4x-5y+2z=0 \end{cases}$. Sottraendo la 2° equazione dalla 1°: $\begin{cases} 3y-2z=0 \\ x+y-z=0 \\ 4x-5y+2z=0 \end{cases}$. Sommando la 1° equazione alla 3°:

$$\begin{cases} 3y-2z=0 \\ x+y-z=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2z=0 \\ x+2x-z=0 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3x \\ z=3x \\ y=2x \end{cases}$$

Il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

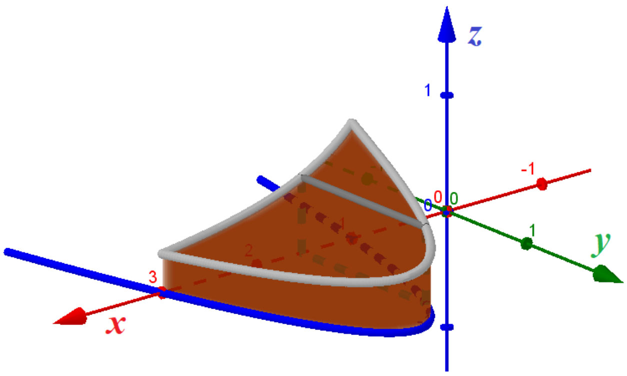
$$(x,2x,3x), \forall x \in \mathbb{R}$$

N. 12

Innanzitutto determiniamo gli zeri della funzione $f(x)$:

$$x^2-4x+3=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=4-3=1 \Rightarrow x_{1,2}=2\pm1= \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$



Il solido descritto dal testo è quello rappresentato in figura. Per calcolarne il volume dobbiamo integrare l'elemento di volume:

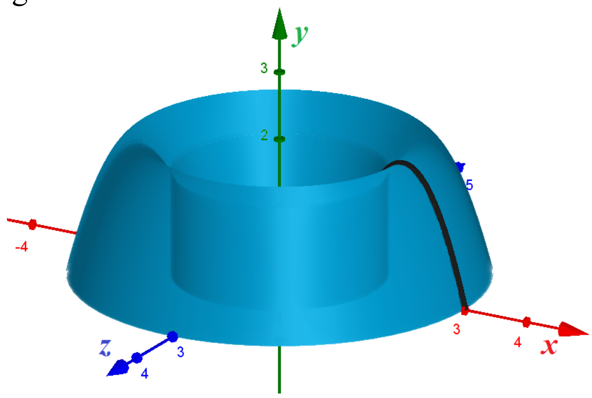
$$dV = S(x)dx = f(x)\cdot h(x)dx = -2\left(x-4+\frac{3}{x}\right)dx$$

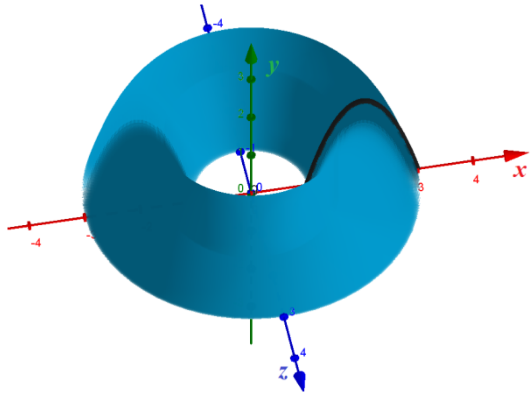
Pertanto il volume cercato è:

$$V = -2\int_1^3\left(x-4+\frac{3}{x}\right)dx = -2\left[\frac{x^2}{2}-4x+3\ln|x|\right]_1^3 = -2\left[\left(\frac{9}{2}-12+3\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}-4+3\ln 1\right)\right]=$$

$$= -2\left[-\frac{15}{2}+\ln 27-\left(-\frac{7}{2}\right)\right] = -2(\ln 27-4) = 2(4-\ln 27)u^3$$

Facendo ruotare la superficie S attorno all'asse y otteniamo il solido W' rappresentato nelle figure seguenti:





L'elemento di volume da integrare è:

$$dV = 2\pi x\cdot f(x)dx = -4\pi\left(x^3-4x^2+3x\right)dx$$

Integrando otteniamo:

$$V' = -4\pi\int_1^3\left(x^3-4x^2+3x\right)dx = -4\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = -4\pi\left[\left(\frac{81}{4}-\frac{4}{3}\cdot 27+\frac{3}{2}\cdot 9\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)\right]=$$

$$= -4\pi\left[-\frac{9}{4}-\frac{5}{12}\right] = -4\pi\cdot\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi\, u^3$$