Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009

Algebra Lineare per il Corso di Laurea in Bioinformatica

Programma svolto

0. Introduzione al linguaggio matematico

§1. Insiemi

1.1 Esempi

1.2 Come si denota un insieme

1.3 Altri esempi

1.4 Sottoinsieme, sottoinsieme proprio

1.5 Principio di doppia inclusione

1.6 Esempi

1.7 L'insieme delle parti

1.8 Esempi

1.9 Teorema: se M ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n.

1.10 Unione, intersezione, differenza, complemento, prodotto cartesiano

1.11 Esempi

1.12 Alcune proprietà

(*vedi anche* Precorso on-line, LEZIONI: Capitolo Insiemi)

§2. Tecniche dimostrative

2.1 Dimostrazione diretta

2.2 Dimostrazione indiretta o "per assurdo"

2.3 Come si dimostra un'equivalenza

2.4 Assiomi e Teoremi

2.5 Gli assiomi di Peano

2.6 Principio di induzione

2.7 La somma dei primi n numeri naturali

2.8 Dimostrazione del Teorema 1.9

2.9 $n\,!$ e coefficienti binomiali

2.10 Formula di Stifel

2.11 Formula del binomio (Newton)

2.12 Interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali

(*vedi anche* [GS, Appendice B])

§3. Numeri complessi

3.1 Il campo $\mathbb{C}$

3.2 Numeri immaginari

3.3 Coniugato e modulo di un numero complesso

3.4 Esempi

I. MATRICI E SISTEMI LINEARI

§4. Matrici e loro operazioni

§5. Sistemi lineari e matrici

§6. Matrici inverse

§7. Decomposizione LU

7.1 Definizione di matrice triangolare inferiore /superiore

7.2 Teorema

7.3 Esempi

7.4 Lemma

7.5 Lemma

(*vedi* [GS, Capitolo I])

II. Spazi vettoriali

§8. Spazi vettoriali e basi

8.1 Spazio vettoriale

8.2 Osservazioni

8.3 Esempi

8.4 Combinazioni lineari

8.5 Esempi

8.6 Sistema di generatori, base

8.7 Esempi

8.8 Spazi vettoriali finitamente generati

8.9 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§9. Dipendenza e indipendenza lineare

9.1 Definizione di indipendenza lineare

9.2 Osservazione

9.3 Esempi

9.4 Caratterizzazione di dipendenza lineare

9.5 Esempi

9.6 Proposizione

9.7 Caratterizzazioni di una base

9.8 Proposizione

§10. Dimensione di uno spazio vettoriale

10.1 Esistenza della base.

10.2 Teorema di Steinitz

10.3 Corollario

10.4 Dimensione.

10.5 Esempi

10.6 Corollario: completamento della base

10.7 Proprietá di uno spazio vettoriale di dimensione n

10.8 Esempi

§11. Sottospazi di uno spazio vettoriale

11.1 Definizione di sottospazio

11.2 Esempi

11.3 Un sottospazio di V coincide con V se e solo se ha la stessa dimensione.

11.4 L'intersezione di due sottospazi

11.5 Esempio (unione di sottospazi)

11.6 La somma di due sottospazi

11.7 Esempio

11.8 Formula di Grassmann

11.9 Somma diretta di due sottospazi

§12. Applicazioni lineari

12.1 Definizione

12.2 Alcune proprietà

12.3 Esempi

12.4 Teorema: Ogni spazio vettoriale su K di dimensione n è isomorfo a K^n.

12.5 Osservazioni

12.6 Spazio nullo e immagine

12.7 Esempi

12.8 Osservazione

12.9 Teorema (nullità + rango)

12.10 Corollario

§13. Quattro spazi associati a una matrice

13.1 L'applicazione $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ associata a $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

13.2 Proposizione

13.3 Teorema sul rango

13.4 Corollario

13.5 Osservazione

13.6 Teorema: $K^m = C(A) \oplus N(A^H)$ e $K^n = C(A^H) \oplus N(A)$

13.7 Esempio

13.8 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$

13.9 Esempio

13.10 Teorema di Rouché - Capelli

13.11 Teorema: le soluzioni di Ax=b sono i vettori di forma $p + u$ con $u \in N(A)$

13.12 Esempi

13.13 Procedimento per la risoluzione di un sistema lineare

§14. Applicazioni lineari e matrici

14.1 La matrice associata a un'applicazione lineare rispetto alla base canonica

14.2 Esempi

14.3 Proposizione

14.4 La matrice del cambio di base

14.5 Esempio

14.6 La matrice associata a un'applicazione lineare $f : V \to U$ (rispetto a una base di V e una di U)

14.7 Esempi

14.8 Teorema sul cambio di basi

14.9 Esempio

14.10 rango di una applicazione lineare

14.11 Proposizione

14.12 Esempio

(*vedi anche* [GS, Capitolo II])

III. Il determinante

§15. Il determinante di una matrice quadrata

15.1 Definizione

15.2 Regola di Sarrus

15.3 Seconda definizione

15.4 Altre proprietà

15.5 Esempio

15.6 Teorema di Laplace

15.7 Teorema di Binet e altre regole di calcolo per il determinante

15.8 Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

15.9 Calcolo della matrice inversa

15.10 Esempio

15.11 Teorema di Cramer

15.12 Esempio

(*vedi* [GS, Capitolo IV])

IV. Autovalori e autovettori

§16. Gli autovalori di una matrice

16.1 Definizione di autovalore e autovettore

16.2 Esempi

16.3 Osservazione

16.4 Definizione di polinomio caratteristico.

16.5 Teorema

16.6 Corollario: A possiede n autovalori (non necessariamente reali, né necessariamente distinti)

16.7 Autospazi e molteplicità algebriche e geometriche

16.8 Esempi

16.9 Proprietà del polinomio caratteristico

§17. Diagonalizzazione di una matrice

17.1 Osservazione

17.2 Definizione: matrici simili, diagonalizzabili

17.3 Teorema sulla diagonalizzazione.

17.4 Esempi

17.5 Proprietà delle matrici simili.

17.6 Esempio

17.8 Corollario

§18. Criteri di diagonalizzazione

18.1 Lemma sugli autospazi

18.2 Corollario: $A \in M_{n\times n}$ è diagonalizzabile se possiede n autovalori distinti.

18.3 Lemma sulle molteplicità

18.4 Teorema: $A \in M_{n\times n}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $m_\lambda = d_\lambda$ per ogni autovalore λ.

18.5 Osservazione

18.6 Algoritmo per la diagonalizzazione

(*vedi* [GS, Capitolo V])

§19. Prodotti interni e norme

19.1 Prodotto interno standard

19.2 Esempi

19.3 Norma euclidea

19.4 vettori orotogonali, complemento ortogonale

19.5 Osservazione: Per $A \in m_{m\times n}$ si ha $N(A) = C(A^H)^{\perp}$

19.6 Teorema: Per un sottospazio $U \subset \mathbb{K}^n$ si ha $\mathbb{K}^n = U \oplus U^{\perp}$

§20. Basi ortonormali e trigonalizzazione

20.1 ortogonale, ortonormale

20.2 Esempi

20.3 Algoritmo di Gram-Schmidt

20.4 Corollario: Ogni sotsottospazio $U \subset \mathbb{K}^n$ possiede una base ortonormale

20.5 Osservazione sulle matrici unitarie

20.6 Esempio

20.7 Teorema di Schur

(*vedi* [GS, Capitolo III])

Bibliografia:

[GS] E. Gregorio, L. Salce: Algebra lineare. Libreria Progetto, 2005.

Precorso on-line: sito web http://precorso.dicom.uninsubria.it/