Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Soluzioni per il Foglio 3
26 novembre 2008

(Per il Foglio 4, vedere le pagine seguenti!)

7. (a) Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $v \in V$

$$\begin{aligned} 0_V &= \lambda 0_V \\ &= \lambda(v + (-v)) \\ &= \lambda v + \lambda(-v); \end{aligned}$$

quindi $\lambda(-v)$ è l'inverso di λv rispetto alla somma in V, cioè $\lambda(-v) = -\lambda v$, come richiesto.

(b) L'affermazione è vera; scriviamo una combinazione lineare di u e z e poniamola uguale al vettore nullo (per mostrare l'indipendenza dobbiamo dedurre che necessariamente i due coefficienti sono nulli):

$$\begin{aligned} 0_V &= \lambda u + \mu z \\ &= \lambda(v - w) + \mu(2v + 3w) \\ &= (\lambda + 2\mu)v + (-\lambda + 3\mu)w; \end{aligned}$$

per ipotesi v e w sono indipendenti, quindi deve essere

$$\lambda + 2\mu = -\lambda + 3\mu = 0;$$

l'unica coppia (λ, μ) che soddisfa le due equazioni è $\lambda = \mu = 0$. Dunque l'unica combinazione lineare di u e z che dà il vettore nullo è quella con entrambi i coefficienti nulli, cioè $\{u, z\}$ è indipendente.

8. Per $k=0$. Infatti:

   se esistono coefficienti λ e μ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   cioè

$$\begin{cases} \lambda & = & 1 \\ \lambda+\mu & = & 1 \\ \mu & = & k \end{cases},$$

   dalle prime due equazioni si ricava

$$\lambda = 1 \qquad\qquad \mu = 0,$$

   dunque il sistema è risolubile se e solo se $k=0$.

9. (a) indipendente (altrimenti uno dei vettori sarebbe un multiplo dell'altro)

   (b) dipendente: si verifica facilmente che

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

   (c) indipendente:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda & = & 0 \\ \lambda+\mu & = & 0 \\ \lambda+\mu+\nu & = & 0 \end{cases}$$

   $\Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$

   (d) dipendente: l'insieme dato contiene, ad esempio, $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ che è ovviamente dipendente.

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Foglio 4
26 novembre 2008

10. Sia $\mathcal{W}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito come
$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \right\}$$
    (a) Provare che $\mathcal{W}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$;
    (b) Calcolare la dimensione di $\mathcal{W}$ e determinare una sua base;
    (c) provare che $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{W}$ e determinare le sue componenti rispetto alla base prescelta.

11. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
    (a) Dire se è vera o falsa la seguente affermazione: se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ è una base per V, allora è una base per V anche $\{v_1, 2v_2, ..., nv_n\}$.
    (b) Sia $n = 5$, siano U, W due sottospazi di V tali che $dim\ U = 4$, $dim\ W = 2$. Provare che necessariamente $U \cap W$ non è il sottospazio nullo $\{0_V\}$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare
$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2z - y \\ y - \frac{1}{2}x + z \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Determinare la matrice A corrispondente a f e calcolare il rango di A.