Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Soluzioni per il Foglio 4
3 dicembre 2008

(Per il Foglio 5, vedere le pagine seguenti!)

10. (a) Per verificare se $\mathcal{W}$ è un sottospazio, dobbiamo verificare se ogni combinazione lineare di due elementi di $\mathcal{W}$ cade in $\mathcal{W}$. Il generico elemento di $\mathcal{W}$ è della forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$, al variare di $x, y \in \mathbb{R}$. Si verifica facilmente che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}.$$

(b) Un sistema di generatori per $\mathcal{W}$ è dato da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, poiché ogni elemento $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$ di $\mathcal{W}$ si scrive come $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; inoltre i due generatori sono indipendenti e quindi danno una base per $\mathcal{W}$. Se ne deduce che $\dim \mathcal{W} = 2$.

(c) $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$ perché $x = z = 3$; le sue componenti rispetto alla base prescelta sono $(3, 2)$, poiché

$$w = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. (a) L'affermazione è vera; per dimostrarlo, proviamo che $\{v_1, 2v_2, ..., nv_n\}$ è linearmente indipendente:

$$\begin{aligned} 0_V &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2(2v_2) + \lambda_3(3v_3) + \ ... \ + \lambda_n(nv_n) \\ \text{(assiomi sp. vett.)} &= \lambda_1 v_1 + 2\lambda_2 v_2 + 3\lambda_3 v_3 + \ ... \ + n\lambda_n v_n \end{aligned}$$

implica, dal momento che per ipotesi $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ è indipendente,

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 = 3\lambda_3 = ... = n\lambda_n = 0,$$

cioè

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0,$$

e quindi l'insieme di n vettori $\{v_1, 2v_2, ..., nv_n\}$ è indipendente e pertanto una base per V.

(b) Sia $n = 5$, siano U, W due sottospazi di V tali che $dim\ U = 4$, $dim\ W = 2$. Per la formula di Grassman

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W),$$

ma poiché $U + W$ è un sottospazio di V, $\dim(U + W) \leq 5$, e quindi

$$5 \geq 4 + 2 - \dim(U \cap W),$$

da cui $\dim(U \cap W) \geq 1$, e concludiamo che $U \cap W$ non è il sottospazio nullo $\{0_V\}$.

12. La matrice A associata a f è un elemento di $\mathbb{R}^{3\times 3}$; le sue colonne si trovano come immagini dei tre vettori della base canonica mediante f:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(è immediato verificare che $A\ x = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$).
Per calcolare il rango di A, osserviamo che l'ultima riga è nulla, quindi rk $A \ \leq 2$; inoltre le prime due righe sono indipendenti, e quindi rk $A \ = 2$.

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Foglio 5

3 dicembre 2008

13. In $\mathbb{R}^4$ si considerino $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

    e i sottospazi $U =< u_1, u_2 >$ e $W =< w_1, w_2 >$.

    (a) Si determini $\dim(U + W)$.

    (b) Si determini $\dim(U \cap W)$.

14. Si risolva il seguente sistema lineare usando il Teorema di Cramer

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 & = & 9 \\ 2\,x_1 + x_3 & = & 4 \\ 2\,x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

15. Si calcoli la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$