Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di ALGEBRA LINEARE

Soluzioni per il Foglio 2
19 novembre 2008

(Per il Foglio 3, vedere le pagine seguenti!)

4. (a) Procediamo alla riduzione di B in una matrice a scala:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix},$$

concludiamo che $\operatorname{rk} B = 3$.

(b) Per trovare l'inversa di C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

quindi

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & 1/7 \\ -2/7 & 1/7 & -2/7 \\ -6/7 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

5. Vero. Infatti, sia $A \in \mathbb{R}^{6\times 7}$. Il sistema lineare $Ax = 0$ possiede sempre la soluzione banale $x = 0$. Inoltre il sistema lineare $Ax = 0$ possiede un'unica soluzione se e solo se $\operatorname{rk} A$ coincide con il numero di colonne di A. Ma in questo caso A ha 7 colonne e $\operatorname{rk} A \leq 6$ é sicuramente minore di 7, quindi il sistema possiede un numero infinito di soluzioni.

6. Eseguiamo EG sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = U.$$

Abbiamo eseguito uno scambio di righe dato dalla matrice elementare $P = E_{23}$.

Eseguendo adesso EG su $PA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = U$, vediamo che la prima operazione è data dalla premoltiplicazione con la matrice elementare $E_{21}(-3)$, e la seconda dalla premoltiplicazione con la matrice elementare $E_{31}(-2)$. In altre parole

$$E_{31}(-2)\, E_{21}(-3)\, PA = U$$

e ponendo

$$L = (E_{31}(-2)\, E_{21}(-3))^{-1} = E_{21}(3)\, E_{31}(2)$$
$$P^{-1} = P = E_{23}$$

otteniamo $A = P^{-1}LU$.

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Foglio 3
19 novembre 2008

7. Sia V uno spazio vettoriale.
   (a) Si dimostri per λ in $\mathbb{K}$ e v in V che $-\lambda\, v = \lambda\,(-v)$.
   (b) Decidere se la seguente affermazione è vera o falsa.
   Se $v, w \in V$ e l'insieme $\{v, w\}$ è linearmente indipendente, allora lo è anche $\{u, z\}$ per
   $$u = v - w \qquad\qquad z = 2v + 3w.$$

8. Stabilire per quali valori $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti?
   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;
   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$;
   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;
   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \;\; / \;\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.