Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Compito A

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+1 \\ y+z \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e immagine di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare iniettiva $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche biiettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha+1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2\alpha+3 & 1+2\alpha \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-1})$ e una base di $N(\mathbf{A}_{-1})$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \ \ 1 \ \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [0 \ \ 0 \ \ -1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [2 \ \ 0 \ \ 1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [2 \ \ -1 \ \ 0]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta-1 & -1 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito B

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x+1 \\ y-x \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è un insieme linearmente indipendente di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e immagine di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare suriettiva $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche biiettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2\alpha - 2 & 2\alpha + 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base di $N(\mathbf{A}_1)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \;\; -1 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_3 = [1 \;\; 1 \;\; -1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(e_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $f(e_2) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $f(e_3) = \mathbf{v}_2 - 2v_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice $(\beta \in \mathbb{C})$

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 1 & -1 & \beta - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Compito C

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+z \\ y-1 \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e spazio nullo di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche suriettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha - 2 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 2 - \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$ e una base di $N(\mathbf{A}_2)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [2 \;\; 0 \;\; 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(e_1) = 2v_1$, $f(e_2) = v_1 + v_2 - v_3$, $f(e_3) = v_1 + v_2 + v_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [0 \;\; -1 \;\; 1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta - 2 & -1 & \beta - 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 gennaio 2009

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Compito D

☐ (1) Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

☐ (2) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ y-1 \end{bmatrix}$. È una applicazione lineare?

☐ (3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Esistono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$ tali che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ è un insieme di generatori di V?

T1) Si diano le definizioni di applicazione lineare e spazio nullo di un'applicazione lineare. Si dimostri che ogni applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è anche iniettiva.

T2) Si diano le definizioni di autovalore e autovettore per una matrice quadrata $\mathbf{A}$ ($n \times n$). Si dimostri che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$, allora $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha - 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3\alpha - 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 1$ si trovino una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_1)$ e una base di $N(\mathbf{A}_1)$. Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dove $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [-2 \;\; 0 \;\; -1]^T$. Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

Sia $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ e si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

(1) Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.
(2) Si calcoli il rango di f.
(3) Il vettore $\mathbf{y} = [1 \;\; 0 \;\; -1]^T$ appartiene all'immagine di f? Se sì, si trovi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$.
(4) Si trovi una base dello spazio nullo e dell'immagine di f.
(5) La matrice B è diagonalizzabile?

E3) Si consideri la matrice ($\beta \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta + 2 & -1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β la matrice è diagonalizzabile e, per uno di tali valori, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$.