Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Soluzioni per il Foglio 1
12 novembre 2008

(Per il Foglio 2, vedere la pagina seguente!)

1. (a) $\dfrac{7-2i}{2+i} = \dfrac{(7-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{14-2+i\,(-7-4)}{4+1} = \dfrac{12}{5} - \dfrac{11}{5}\,i.$

   (b) Gli zeri di $f = x^4+1 \in \mathbb{R}[x]$ sono le radici quarte di $-1 = \cos\pi + i\,\sin\pi$ e si calcolano quindi come

   $$z_k = \cos\frac{\pi+2\pi\,k}{4} + i\,\sin\frac{\pi+2\pi\,k}{4} \quad \text{per} \quad k = 0,1,2,3.$$

   Abbiamo dunque
   $z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4} = \cos 45° + i\,\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i)$
   $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4} = \cos 135° + i\,\sin 135° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-1+i)$
   $z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4} = \cos 225° + i\,\sin 225° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-1-i) = \overline{z_1}$
   $z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4} = \cos 315° + i\,\sin 315° = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1-i) = \overline{z_0}$

2. Osserviamo che $A \in M_{2\times 2}$ e $B \in M_{2\times 3}$, quindi è definito il prodotto AB; il risultato sarà un elemento di $M_{2\times 3}$:

   $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice aumentata associata al sistema è

   $$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   di rango 1 e il sistema ammette un numero infinito di soluzioni. Assegnando alle variabili libere x_2, x_3 i parametri s, t, si ottiene

   $$\begin{cases} x_1 = 1+s-2t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Foglio 2
12 novembre 2008

4. Con il metodo di eliminazione di Gauss

   (a) determinare il rango della matrice B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

   (b) calcolare la matrice inversa di

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Si decida se il seguente enunciato è vero o falso:

   Se $A \in \mathbb{R}^{6\times 7}$, allora il sistema lineare $Ax = 0$ possiede sempre un numero infinito di soluzioni.

6. Si determini una decomposizione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   in forma $A = P^{-1}\, L\, U$ con P invertibile, L triangolare inferiore invertibile e U forma ridotta di A.