

# Probabilità II

## Variabili casuali discrete

- Definizioni principali.
- Valore atteso e Varianza.
- Teorema di Bienaymé - Čebičev.
- V.C. Notevoli: Bernoulli e Binomiale.

1

## Concetto di variabile casuale

- Cos'è una variabile casuale?

**Idea di massima:** una grandezza il cui valore dipende dall'esito di un accadimento dal risultato incerto.

- Perché abbia senso (e sia utile) debbo:
  - Definire cosa sia un accadimento dall'esito incerto
  - Distinguere i valori possibili da quello assunto.
  - Trovare un modo per discernere quali siano i valori più o meno probabili.

2

## Concetto di variabile casuale

- Cos'è una variabile casuale?

**Idea di massima:** una grandezza il cui valore dipende dall'esito di un accadimento dal risultato incerto.

- Perché abbia senso (e sia utile) debbo:
  - Definire cosa sia un accadimento dall'esito incerto (Nozioni di Esperimento, Esito ed Evento)
  - Distinguere i valori possibili da quello assunto. (Modalità ed osservazione)
  - Trovare un modo per discernere quali siano i valori più o meno probabili. (Calcolo delle probabilità)

3

## Variabile casuale: definizione

**Definizione:** una variabile casuale è una grandezza il cui valore è legato al verificarsi di un evento.

- Una v.c. viene descritta completamente associando ad ogni modalità la probabilità che questa sia osservata.
- Il tipo di associazione cambia a seconda del tipo di v.c.
  - Discrete: distribuzione di probabilità.
  - Continue: densità di probabilità.
- **Nota:** a volte si parla di variabili stocastiche o aleatorie. Esse sono sinonime di v.c.

## Variabile casuale: notazioni

- Una v.c. viene identificata con una lettera maiuscola
  - $Y$ : esito del lancio di un dado a 6 facce.
  - $X$ : # mezzi pubblici usati da un veronese l'8/11/2010.
- Le modalità si indicano con la lettera minuscola.
  - $y_1 = 1; y_2 = 2; y_3 = 3; y_4 = 4; y_5 = 5; y_6 = 6.$
  - $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4; \dots$
- L'evento "osservazione della  $i$ -sima modalità" si indica
  - $Y = y_i \Rightarrow P(Y=y_i)$ : probabilità che si osservi la modalità  $y_i$ .
  - $X = x_i \Rightarrow P(X=x_i)$ : probabilità l'estratto abbia preso un mezzo.

## Variabile casuale discreta

Definita univocamente dalla distribuzione di probabilità.

- Distribuzione di probabilità: possiamo considerarla come una funzione reale di numeri reali così definita

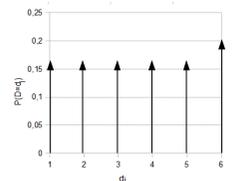
$$p(x) = P(X=x)$$

- Esempio  $D$ : esito del lancio di un dado a 6 facce truccato.

- tabellare

$d_i$	$P(D=d_i)$
1	0,160
2	0,160
3	0,160
4	0,160
5	0,160
6	0,200
tot	1,000

- grafica



## Valore atteso E[.]

- Anche per una v.c. si può definire un indice di posizione che sintetizzi la distribuzione di probabilità.

- Valore atteso  $E[X]$  a volte indicato con  $\mu$

$$E[X] = \sum_{i=1}^M P(X=x_i) x_i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^M p(x_i) x_i$$

- Esempio di calcolo

- D: lancio di un dado a 6 facce truccato.

$$E[D] = \sum_{i=1}^M d_i p(d_i)$$

$$E[D] = 1 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,16 + 4 \cdot 0,16 + 5 \cdot 0,16 + 6 \cdot 0,2$$

$$E[D] = 3,6$$

$d_i$	$P(D=d_i)$	$p(d_i)d_i$
1	0,160	0,160
2	0,160	0,320
3	0,160	0,480
4	0,160	0,640
5	0,160	0,800
6	0,200	1,200
	1,000	3,600

## Valore atteso E[.]: interpretazione

- Osservazione:  $E[.]$  non è una modalità, come la media.
- Osservazione:  $E[X]$  descrive l'esito di diverse estrazioni tutte uguali (concetto da definire) di  $X$ .
- Prove indipendenti ed identicamente distribuite (i. i. d.):
  - Indipendenti: l'esito di una prova non influenza le successive.
  - Identicamente distribuite: tutte le prove hanno la stessa  $p(x)$ .
- $E[X]$  descrive l'esito medio atteso a fronte di tante prove i.i.d.

8

## Valore atteso E[.]: proprietà - I

- I valori attesi di due vv.cc. lineari fra loro, hanno lo stesso legame.

$$Y = cX \rightarrow E[Y] = cE[X] \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Esempio:

- $X$  = costo del pane in euro al kg in Italia.  $E[X] = 2,1$
- $Y$  = costo del pane in euro all'etto in Italia.

$$Y = \frac{1}{10} X \rightarrow E[Y] = \frac{1}{10} E[X] = 0,21$$

- I valori attesi di due vv. cc. affini, hanno lo stesso legame.

$$Y = aX + b \rightarrow E[Y] = aE[X] + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- Esempio

- $X$  = temperatura a Verona misurata in °C.  $E[X] = 14,7$
- $Y$  = temperatura a Verona misurata in °F.

$$Y = 1,8X + 57,6 \rightarrow E[Y] = 1,8E[X] + 57,6 = 80,06$$

## Valore atteso E[.]: proprietà - II

- Il valore atteso di una combinazione lineare di due vv. cc. è dato dalla stessa combinazione lineare dei loro valori attesi.

$$Z = c_1 X + c_2 Y \rightarrow E[Z] = c_1 E[X] + c_2 E[Y] \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Esempio:

- $X$  = consumo al km di una auto gpl  $E[X] = 0,10$
- $Y$  = pedaggio al km di una autostrada.  $E[Y] = 0,07$
- $Z$  = costo di un viaggio di 40 km di cui 30 in autostrada.

$$Z = 40X + 30Y \rightarrow E[Z] = 40E[X] + 30E[Y] = 6,1$$

- La proprietà si estende alla combinazione lineare di un numero qualunque (purché finito) di vv. cc.

$$Y = \sum_{i=1}^K c_i X_i \rightarrow E[Y] = \sum_{i=1}^K c_i E[X_i] \quad \forall c_i \in \mathbb{R} \quad 10$$

## Varianza Var[.] e deviazione standard

- Anche per le v.c. si può definire un indice di variabilità.
  - Varianza  $Var[X]$   $Var[X] = \sum_{i=1}^M P(X=x_i)(x_i - E[X])^2$
  - $Var[X] = \sum_{i=1}^M p(x_i)(x_i - E[X])^2$
  - $Var[X] = \left( \sum_{i=1}^M x_i^2 p(x_i) \right) - (E[X])^2$
  - Deviazione Standard  $sd = \sigma = \sqrt{Var[X]}$

- Esempio di calcolo

- D: lancio di un dado truccato.  $E[D] = 3,6$

$$Var[D] = \left( \sum_{i=1}^M d_i^2 p(d_i) \right) - (E[D])^2$$

$$Var[D] = (16) - (3,6)^2 = 16 - 12,96 = 3,04$$

$$sd[D] = \sqrt{Var[D]} = \sqrt{3,04} = 1,74$$

$d_i$	$p(d_i)$	$d_i^2$	$p(d_i)d_i^2$
1	0,160	1	0,160
2	0,160	4	0,640
3	0,160	9	1,440
4	0,160	16	2,560
5	0,160	25	4,000
6	0,200	36	7,200
	1,000		16,000

## Varianza Var[.]: proprietà - I

- Date due vv. cc. affini si ha la seguente relazione

$$Y = aX + b \rightarrow Var[Y] = a^2 Var[X] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- Esempio:

- $X$  = temperatura a Verona misurata in °C.  $Var[X] = 4,7$
- $Y$  = temperatura a Verona misurata in °F.

$$Y = 1,8X + 57,6 \rightarrow Var[Y] = (1,8)^2 Var[X] = 15,228$$

- Osservazione: La costante di proporzionalità fra le vv. cc.  $a$  compare al quadrato nel legame fra le varianze. Questo fatto è facilmente interpretabile ricodando come la varianza esprima la media del quadrato degli scarti.
- Osservazione: La somma di una quantità nota ad una v.c. influenza il valore atteso ma non la varianza (e quindi la variabilità).

12

## Varianza Var[.]: proprietà - II

- La varianza della somma o delle differenze di 2 vv. cc. indipendenti è data dalla somma delle varianze delle due vv. cc.

$$Z = X + Y \rightarrow \text{Var}[Z] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

$$Z = X - Y \rightarrow \text{Var}[Z] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

- Osservazione: la varianza della somma algebrica di due vv. cc. è destinata a crescere rispetto a quelle originali indipendentemente dal fatto che si le vv. cc. siano sommate o sottratte.

13

## Valore atteso, varianza e probabilità

- Consideriamo un intervallo simmetrico rispetto al valore atteso di una v.c.  $X$

$$I := [E[X] - \varepsilon; E[X] + \varepsilon]$$

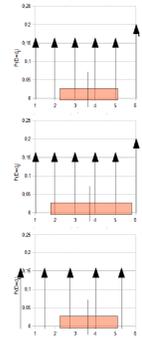
- Come sarà la probabilità

$$p_s = P(X \in I)$$

- Maggiore è  $\varepsilon$ , maggiore sarà  $p_s$  (considero un intervallo più grande)

- Se  $\text{Var}[X]$  cresce,  $p_s$  diminuisce (le realizzazioni tendono ad allontanarsi dal  $E[X]$ )

- Osservazioni: queste considerazioni sono legate al concetto di variabilità e non dipendono dal tipo di v.c. considerata.



## Teorema di Bienaymé - Čebičev

- Si dimostra che: data una v.c.  $X$  con  $E[X] = \mu$  e  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ ,
  - La probabilità che  $X$  assuma valori che si discostano dal suo valore atteso più  $\varepsilon$  non supera la varianza divisa per il quadrato di  $\varepsilon$ .

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- Considerando l'evento complementare si ha:

$$P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- Esempio: una v.c.  $X$  ha  $E[X] = 10$  e  $\text{Var}[X] = 1$ , determinare un intervallo che abbia almeno il 60% di probabilità di contenere una osservazione.

$$1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \geq \frac{60}{100} \Rightarrow \frac{4}{10} \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon^2 \geq 10 \frac{\sigma^2}{4} \geq 2.5 \Rightarrow \varepsilon^2 \geq 2.5 \Rightarrow \varepsilon \geq 1.58$$

$$[8.42; 11.58]$$

15

## V.c. (o prova) di Bernoulli

- Molto semplice: alcuni autori la chiamano prova Bernoulliana.
- V. c. discreta  $X$  con due modalità  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ .

- Le due probabilità solitamente hanno "nomi propri"

$$- p = P(X=1).$$

$$- q = P(X=0) = 1 - P(\overline{X=0}) = 1 - P(X=1) = 1 - p.$$

- Valore atteso:  $E[X] = p$ .

$$- \text{Dimostrazione: } E[X] = \sum_{i=1}^2 p(x_i) x_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

- Varianza:  $\text{Var}[X] = pq$ .

$$- \text{Dimostrazione: } \text{Var}[X] = \sum_{i=1}^2 p(x_i) (x_i - E[X])^2$$

$$\text{Var}[X] = q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = q \cdot p^2 + p \cdot q^2 = pq(p + q) = pq$$

16

## V.c. (o prova) di Bernoulli: esempi

- $X$ : lancio di una moneta onesta.

- Se impongo che

$$\bullet X = 0 \text{ se esce testa} \Rightarrow P(X=0) = 0.5.$$

$$\bullet X = 1 \text{ se esce croce} \Rightarrow P(X=1) = 0.5.$$

- $X$  ha la stessa distribuzione di probabilità di una v.c. Bernoulliana con  $p=0.5$ ,

$$\bullet \text{In simboli } X \sim \text{Ber}(0.5)$$

- Si legge:  $X$  è distribuita come ...

- $Y$ : Estrazione di un numero primo lanciando un dado a 6 facce

- Se impongo che

$$\bullet Y = 0 \text{ se non esce un primo} \Rightarrow P(Y=0) = 2/6.$$

$$\bullet Y = 1 \text{ se esce un primo} \Rightarrow P(Y=1) = 4/6.$$

- Ho che:  $Y \sim \text{Ber}(2/3)$

17

## V.c. Binomiale

- Somma di  $n$  variabili di Bernoulli i.i.d.

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad X_i \sim \text{Ber}(p)$$

- $n+1$  modalità  $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, \dots, y_{n+1} = n$ .

- Si dimostra che:

$$- P(Y = y_k) = p(y_k) = \binom{n}{y_k} p^{y_k} q^{n-y_k}$$

$$- \binom{a}{b} \text{ è detto coefficiente binomiale e vale } \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- Valore atteso:  $E[Y] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n p = np$

- Varianza:  $\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^n pq = npq$

18

## V.c. Binomiale: esempi - I

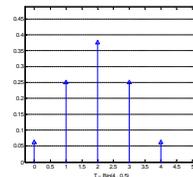
- $B$ : # di 6 ottenuti lanciando di un dado onesto 10 volte.
  - Se creo 10 variabili  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  per cui impongo
    - $X_i = 0$  se l'esito del  $i$ -simo tiro sia diverso da 6
    - $X_i = 1$  se l'esito del  $i$ -simo tiro sia 6
  - ho che
    - le variabili create sono indipendenti
    - $X \sim \text{Ber}(1/6)$
    - $B = \sum_{i=1}^n X_i$
  - $B$ : ha la stessa distribuzione di probabilità di una v.c. Binomiale con  $p=1/6$  ed  $n = 10$ .
    - In simboli
 
$$B \sim \text{Bin}(10; 1/6)$$

19

## V.c. Binomiale: esempi - II

- $T$ : # di teste ottenute lanciando una moneta onesta 4 volte.

$$T \sim \text{Bin}(4; 0.5)$$

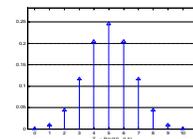


$$E[T] = 2$$

$$\text{Var}[T] = 1$$

- $T_2$ : # di teste ottenute lanciando una moneta onesta 10 volte.

$$T_2 \sim \text{Bin}(10; 0.5)$$



$$E[T] = 5$$

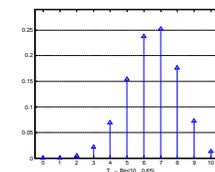
$$\text{Var}[T] = 2.5$$

20

## V.c. Binomiale: esempi - III

- $T_3$ : # di teste ottenute lanciando una moneta disonesta 10 volte.

$$T_3 \sim \text{Bin}(10; 0.65)$$

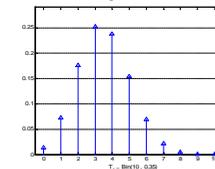


$$E[T_3] = 6.5$$

$$\text{Var}[T_3] = 2.275$$

- $T_4$ : # di teste ottenute lanciando una moneta disonesta 10 volte.

$$T_4 \sim \text{Bin}(10; 0.35)$$



$$E[T_4] = 3.5$$

$$\text{Var}[T_4] = 2.275$$

21

## Ricapitolando - I

- Distribuzione di probabilità di una v.c.  $X$ :  $p(x) = P(X=x)$
- Valore atteso:  $E[X] = \sum_{i=1}^M p(x_i) x_i$
- Varianza:  $\text{Var}[X] = \left( \sum_{i=1}^M p(x_i) (x_i^2) \right) - (E[X])^2$
- Variabili affini:  $Y = aX + b$ 
  - $E[Y] = aE[X] + b$
  - $\text{Var}[Y] = a^2 \text{Var}[X]$
- Combinazione lineare di vv. cc. indipendenti  $Y = \sum_{i=1}^K c_i X_i$ 
  - $E[Y] = \sum_{i=1}^K c_i E[X_i]$
  - $\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^K c_i^2 \text{Var}[X_i]$
- Teorema di Bienaymé - Čebičev

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

22

## Ricapitolando - II

- Bernoulliana  $X \sim \text{Ber}(p)$ 
  - $p(1) = p; p(0) = 1 - p = q$
  - $E[X] = p$
  - $\text{Var}[X] = pq$
- Binomiale  $X \sim \text{Bin}(n; p)$ 
  - $p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
  - $E[X] = np$
  - $\text{Var}[X] = npq$

23