Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Soluzioni per il Foglio 5
10 dicembre 2008

(Per il Foglio 6, vedere le pagine seguenti!)

13. (a) $\dim(U+W)$ si calcola come rango della matrice A le cui colonne sono u_1, u_2, w_1, w_2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & -8 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque $\text{rk}A = 2$ e quindi $\dim(U+W) = 2$.

(b) Poichè $\dim U = \dim W = 2$, per la formula di Grassmann si ha $\dim U \cap W = 2$.

14. La matrice dei coefficienti è :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\det A = 4 - 6 + 4 = 2 \neq 0$, quindi il sistema ammette un'unica soluzione, che determiniamo usando il metodo di Cramer:

$$x_1 = \frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

15. Calcoliamo $\det A = 5 \cdot 6 = 30 \neq 0$; costruiamo la matrice dei complementi algebrici

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 0 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix};$$

la matrice inversa A^{-1} si ottiene come la trasposta della matrice dei complementi algebrici, divisa per $\det A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ -9 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1/2 & 0 \\ -3/10 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Bioinformatica

Esercizi per il Corso di Algebra Lineare

Foglio 6
10 dicembre 2008

16. (a) Si diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè si trovino una matrice invertibile $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e una matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tali che $S^{-1}AS = D$.

(b) Si usi la matrice D per calcolare $\det A$.

17. Si proceda come nell'Esercizio 16 per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

18. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix}$$

(a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(b) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$, dove

$$\mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \},\ \mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \}$$

(c) Si determini la matrice $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ del cambio di base in $\mathbb{R}^2$ da $\mathcal{B}$ alla base

$$\mathcal{B}' = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$$