



Informazioni personali

Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: _____ Matricola: _____

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

☐ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

- ☐ **APPELLO:** Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta dal n. 2 al n. 6 + 3 quesiti a scelta dal n. 8 al n. 12
- ☐ **RECUPERO 1° PARZIALE:** quesiti dal n. 1 al n. 6
- ☐ **RECUPERO 2° PARZIALE:** quesiti dal n. 7 al n. 12

Firma: _____ Numero di fogli consegnati: _____

☐ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: _____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!

Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.

NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.

Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.

Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (___/6)

Studiare la funzione $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che la funzione data non ammette flessi, se ne disegni il grafico.

QUESITO 2 (___/5)

Verificare che la parabola $y = -x^2 + 6x - 6$ ed il grafico della funzione $f(x) = x + \ln(x-1)$ hanno la tangente in comune nel punto di ascissa $x = 2$.

QUESITO 3 (___/5)

Dopo averne calcolato il dominio D , verificare che la funzione $f(x) = x - 2 + \ln x$ è crescente in D e spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $[1, 2]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1} .

QUESITO 4 (___/5)

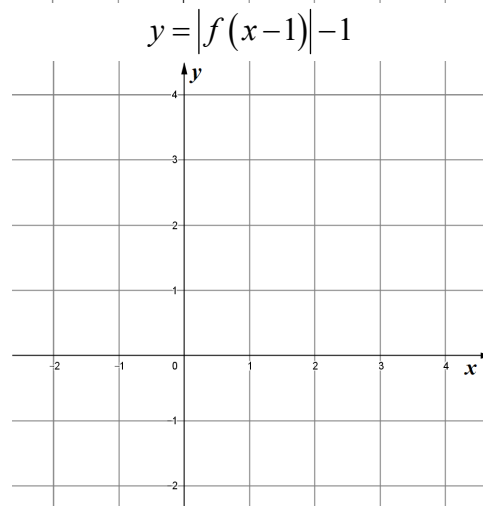
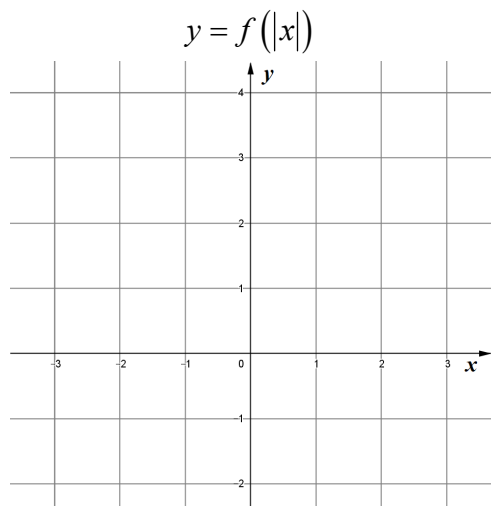
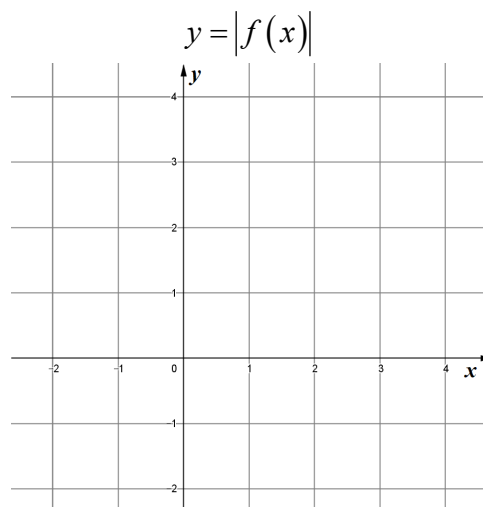
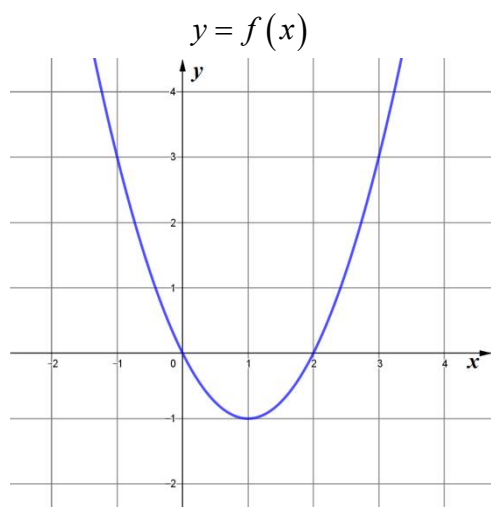
Verificare che la funzione $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$ ed individuare, in tale intervallo, le ascisse dei punti che soddisfano la tesi del teorema.

QUESITO 5 (___/5)

Determinare le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x \ln x}{x-2}$.

QUESITO 6 (___/5)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio. Dire inoltre se le funzioni trasformate hanno punti di non derivabilità, motivando la risposta, su foglio a parte.



Parte B

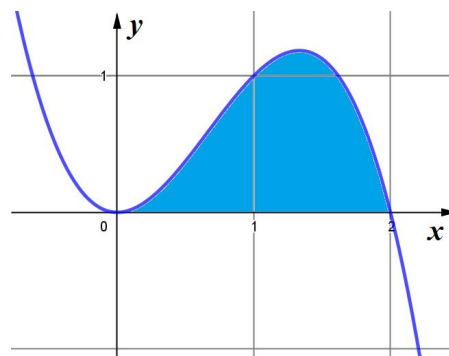
QUESITO 7 (___/6)

SOLO PER CHI DEVE RECUPERARE IL PARZIALE RELATIVO ALLA PARTE B

- a) Determinare il rango della matrice:
- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- b) Calcolare il prodotto $A \cdot A^T$ tra la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e la sua trasposta ed il determinante del prodotto $A^T \cdot A$.

QUESITO 8 (___/5)

- a) Calcolare l'area della regione piana rappresentata in figura, delimitata dall'asse x e dalla curva di equazione $y = -x^3 + 2x^2$.
- b) Determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione della superficie colorata attorno all'asse x .



QUESITO 9 (___/5)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 10 (___/5)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' + 2y' - 8y = e^{-2x}$.

QUESITO 11 (___/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a)
$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z = 3 \\ y + z = 2 \\ -x + y - z = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -4x + y + 3z = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0 \\ 14x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

QUESITO 12 (___/5)

Tra le primitive della funzione $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $(0,1)$; calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

PUNTEGGIO TOTALE: ____/30

TRACCIA SINTETICA DI RISOLUZIONE – FILA A

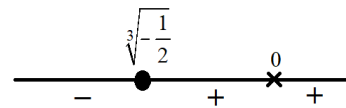
QUESITO 1

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^2} = x + \frac{1}{2}x^{-2}$$

- DOMINIO: $x \neq 0$

- PARITÀ: $f(-x) = -x + \frac{1}{2(-x)^2} = -x + \frac{1}{2x^2}$ è diversa da $f(x)$ e da $-f(x) \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari

- SEGNO: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 1}{2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$



La curva incontra gli assi cartesiani solo nel punto $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}, 0\right)$

- ASINTOTI:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{2x^2} = +\infty \Rightarrow \text{la funzione ha l'asintoto verticale } x = 0$$

Dal momento che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ concludiamo che la funzione ammette l'asintoto obliquo: $y = x$

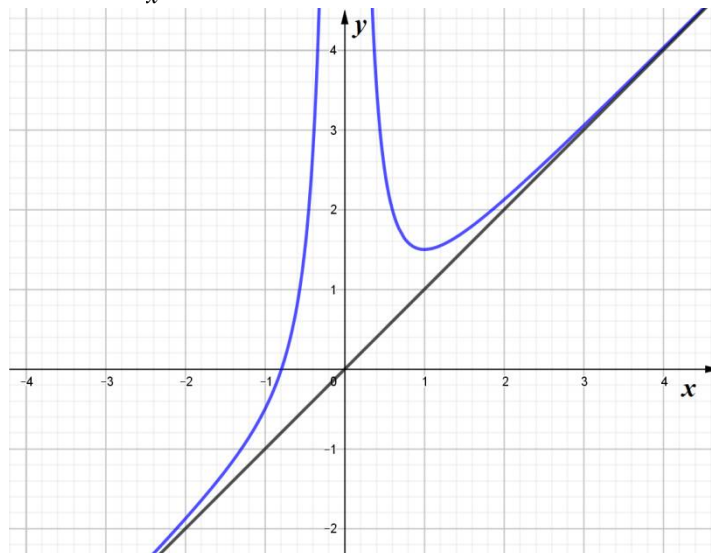
- CRESCENZA: $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(-2)x^{-3} = 1 - x^{-3} = \dots = \frac{x^3 - 1}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x \cdot x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0$ essendo

$$\frac{x^2+x+1}{x^2} > 0 \text{ in D}$$



La funzione ha un minimo in $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

- CONCAVITÀ: $f''(x) = -(-3)x^{-4} = \frac{3}{x^4} > 0$ in D $\Rightarrow$ la funzione volge sempre la concavità verso l'alto.



QUESITO 2

Il punto di ascissa $x = 2$ della parabola ha coordinate: $y(2) = -4 + 12 - 6 = 2 \Rightarrow (2, 2)$

Il punto di ascissa $x = 2$ del grafico della funzione ha coordinate: $f(2) = 2 + \ln(2-1) = 2 \Rightarrow (2, 2)$

Calcoliamo i coefficienti angolari:

- $y' = -2x + 6 \Rightarrow y'(2) = -4 + 6 = 2$

$$\circ \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(2) = 1 + \frac{1}{2-1} = 2$$

Dal momento che le tangenti passano per lo stesso punto ed hanno lo stesso coefficiente angolare, possiamo concludere che le due curve hanno la stessa tangente in (2,2).

L'equazione della tangente è: $y - 2 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 2$

QUESITO 3

Il dominio della funzione $f(x) = x - 2 + \ln x$ è $D: x > 0$. Tale funzione è continua e derivabile in D , essendo somma di funzioni ivi continue e derivabili.

Calcoliamone la derivata prima: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ in D , poiché somma di termini ivi positivi $\Rightarrow$ la funzione è crescente in D .

$$\circ \quad f(1) = 1 - 2 + \ln 1 = -1 < 0$$

$$\circ \quad f(2) = 2 - 2 + \ln 2 = \ln 2 > 0$$

Per il teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette almeno uno zero in $[1,2]$; essendo monotona in D , e quindi ivi invertibile, tale zero è unico.

Applicando il metodo di bisezione otteniamo:

a	b	f(a)	f(b)	m=(a+b)/2	f(m)	Δ
1	2	-1	0,693147	1,5	-0,09453	0,5
1,5	2	-0,09453	0,693147	1,75	0,309616	0,25
1,5	1,75	-0,09453	0,309616	1,625	0,110508	0,125
1,5	1,625	-0,09453	0,110508	1,5625	0,008787	0,0625

Pertanto l'approssimazione dello zero cercato è:

$$\alpha \approx 1.56$$

QUESITO 4

La funzione $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ è rapporto tra funzioni continue e derivabili; pertanto è continua e derivabile nel suo dominio: $x \neq -1$.

In particolare è una funzione continua e derivabile nell'intervallo $[0,2]$.

Le ipotesi del teorema di Lagrange sono, quindi, verificate.

$$\circ \quad f(0) = -1$$

$$\circ \quad f(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{1}{3} - (-1)}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \dots = \frac{2}{(x+1)^2}$$

La tesi del teorema di Lagrange afferma che esiste almeno un punto interno all'intervallo $[0,2]$ tale che:

$$f'(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ il punto dell'intervallo che soddisfa la tesi del teorema è $x = -1 + \sqrt{3}$, l'altro ha ascissa negativa e non è accettabile.

QUESITO 5

Il dominio della funzione $f(x) = \frac{x \ln x}{x-2}$ è: $x > 0, x \neq 2$.

○ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-2} = ?$

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$. Pertanto:

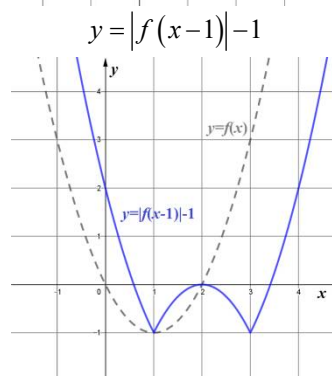
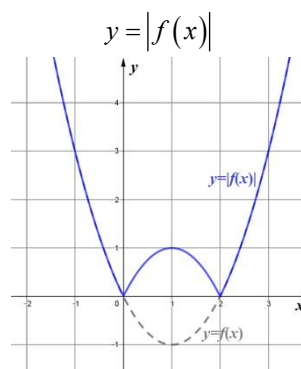
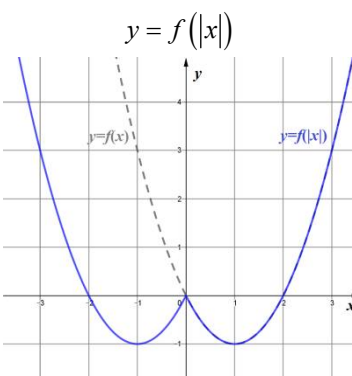
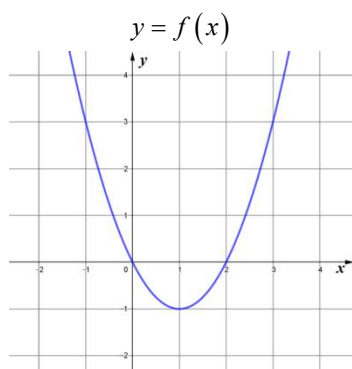
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-2} = 0 \Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti per $x \rightarrow 0^+$

○ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \ln x}{x-2} = \infty \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto verticale $x = 2$

○ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} \cdot \ln x = +\infty \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti orizzontali

○ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti obliqui

QUESITO 6



- La funzione $y = |f(x)|$ ammette due punti angolosi in corrispondenza degli zeri della funzione $y = f(x)$. In tali punti, infatti, il grafico della funzione $y = f(x)$ ha tangente obliqua; pertanto, applicando il valore assoluto (e simmettizzando, di conseguenza, anche le tangenti) otteniamo una tangente destra diversa dalla tangente sinistra in tali punti.
- La funzione $y = f(|x|)$ ammette un punto angoloso in corrispondenza dell'intersezione del grafico della funzione $y = f(x)$ con l'asse delle y . In tale punto, infatti, il grafico della funzione $y = f(x)$ ha tangente obliqua; inoltre, la funzione $y = f(|x|)$ è pari e presenta una simmetria rispetto all'asse delle

y. Pertanto, applicando la simmetria anche sulla tangente, otteniamo una tangente destra diversa dalla tangente sinistra in tale punto.

- o La funzione $y = |f(x-1)| - 1$ è ottenuta da una traslazione della funzione $y = |f(x)|$ ed ammette, pertanto, due punti angolosi.

QUESITO 7

- a) La 4° riga della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è la somma della 2° e della 3° $\Rightarrow \det(A) = 0$

Consideriamo ora il minore (calcolato mediante il teorema di Laplace, rispetto alla 1° riga):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice ha rango 3

- b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

Per il teorema di Binet e la proprietà commutativa del prodotto in $\mathbb{R}$:

$$\det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A^T \cdot A)$$

Inoltre, è noto che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante; pertanto:

$$\det(A) = \det(A^T) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = [\det(A)]^2 = 4$$

In alternativa si poteva ricorrere al calcolo del determinante della matrice $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ oppure calcolare direttamente la matrice $A^T \cdot A$ e trovarne il determinante.

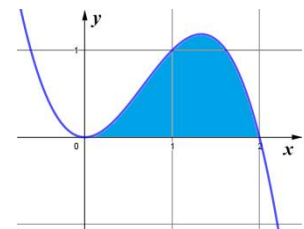
QUESITO 8

- a) Le intersezioni del grafico della funzione con l'asse x sono:

$$\begin{cases} y = -x^3 + 2x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$\Rightarrow$ L'area cercata è:

$$Area = \int_0^2 -x^3 + 2x^2 dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = -\frac{16}{4} + \frac{2}{3} \cdot 8 = \dots = \frac{4}{3}u^2$$



- b) Applicando il metodo delle fette: $dV = \pi [f(x)]^2 dx = \pi (-x^3 + 2x^2)^2 dx = \pi (4x^4 - 4x^5 + x^6) dx$

Integrando otteniamo:

$$V = \int_0^2 \pi (4x^4 - 4x^5 + x^6) dx = \pi \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{6}x^6 + \frac{x^7}{7} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{128}{5} - \frac{128}{3} + \frac{128}{7} \right) = \dots = \frac{128}{105} \pi u^3$$

QUESITO 9

Sviluppando il determinante rispetto all'ultima riga otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

⇒ la matrice A è invertibile.

Calcoliamo la matrice $\text{cof}(A)$:

$$\circ A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\circ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\circ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\circ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa cercata è:

$$A^{-1} = \frac{[\text{cof}(A)]^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESITO 10

Risolvi l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' - 8y = e^{-2x} \quad (*)$$

L'equazione omogenea associata a (*) è:

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

e l'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

Risolvi l'equazione caratteristica:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3 = \begin{matrix} \nearrow -4 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

⇒ la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$\varphi = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x}$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione (*) tra le funzioni del tipo $\psi = k \cdot e^{-2x}$:

$$\psi' = -2ke^{-2x}$$

$$\psi'' = 4ke^{-2x}$$

Sostituendo nella (*):

$$4ke^{-2x} + 2(-2ke^{-2x}) - 8ke^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow -8ke^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow -8k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

La soluzione generale dell'equazione (*) è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{8} e^{-2x}$$

QUESITO 11

$$\text{a) } \begin{cases} -2x + 2y + 3z = 3 \\ y + z = 2 \\ -x + y - z = -6 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la 3° equazione per -2 e sommiamola alla 1°:

$$\begin{cases} -2x+2y+3z=3 \\ y+z=2 \\ 2x-2y+2z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z=15 \\ y+z=2 \\ -x+y-z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \text{sostituendo: } \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ -x-1-3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} z=3 \\ y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Soluzione: $(2, -1, 3)$

b)
$$\begin{cases} -4x+y+3z=0 \\ 5x-2y-3z=0 \\ 14x-5y-9z=0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \\ 14 & -5 & -9 \end{pmatrix}$. Applichiamo il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \\ 14 & -5 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow [5 \cdot I + 4 \cdot II] \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 14 & -5 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow [7 \cdot I + 2 \cdot III] \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow [II - III] \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} -4x+y+3z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+4z=0 \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$(z, z, z), \forall z \in \mathbb{R}$$

QUESITO 12

Ricerchiamo la famiglia delle primitive della funzione data, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} \int -2x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[x \cdot e^{-2x} - \int e^{-2x} dx \right] = -\frac{1}{2} \left[x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} \int -2e^{-2x} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[x \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right] + c = -\frac{1}{2} e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2} \right) + c \end{aligned}$$

Affinchè la funzione così ottenuta passi per $(0,1)$ è necessario che:

$$-\frac{1}{2} e^0 \left(0 + \frac{1}{2} \right) + c = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{5}{4}$$

La funzione cercata è $F(x) = \frac{2x+1}{4} e^{-2x} + \frac{5}{4}$.

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4e^{2x}} =_H \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{8e^{2x}} = 0$$

otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4} e^{-2x} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$



Informazioni personali

Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: _____ Matricola: _____

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

☐ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

- ☐ **APPELLO:** Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta dal n. 2 al n. 6 + 3 quesiti a scelta dal n. 8 al n. 12
- ☐ **RECUPERO 1° PARZIALE:** quesiti dal n. 1 al n. 6
- ☐ **RECUPERO 2° PARZIALE:** quesiti dal n. 7 al n. 12

Firma: _____ Numero di fogli consegnati: _____

☐ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: _____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!

Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.

NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.

Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.

Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (___/6)

Studiare la funzione $f(x) = -x + \frac{1}{2x^2}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che la funzione data non ammette flessi, se ne disegni il grafico.

QUESITO 2 (___/5)

Verificare che la parabola $y = -x^2 + 4x - 1$ ed il grafico della funzione $f(x) = x + 1 + \ln x$ hanno la tangente in comune nel punto di ascissa $x = 1$.

QUESITO 3 (___/5)

Dopo averne calcolato il dominio D , verificare che la funzione $f(x) = x - 3 + \ln x$ è crescente in D e spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $[2, 3]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1} .

QUESITO 4 (___/5)

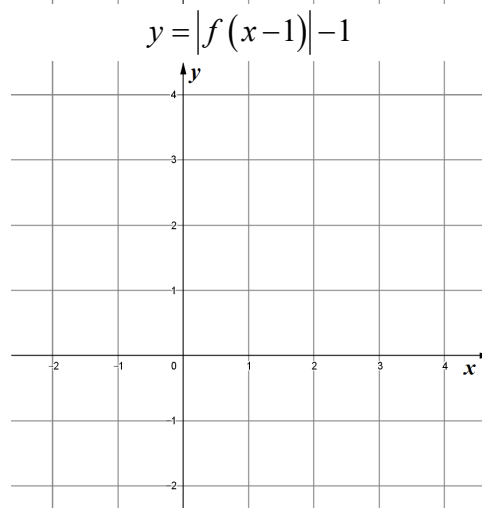
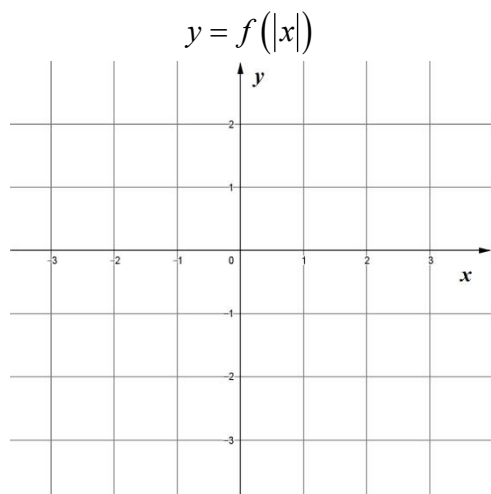
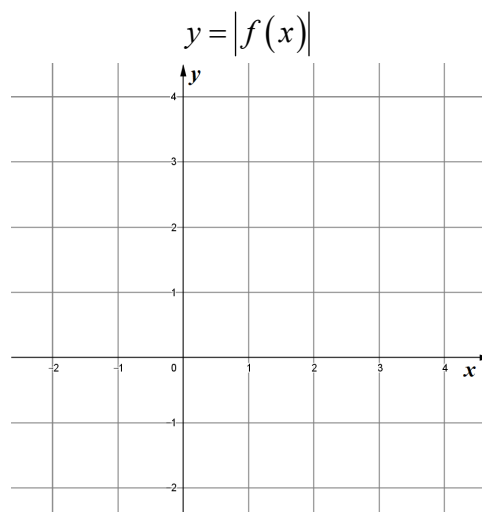
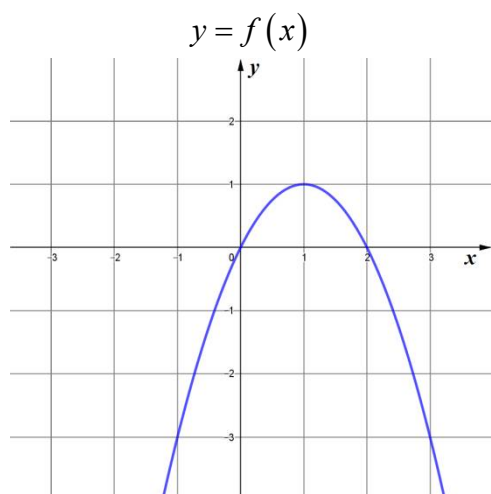
Verificare che la funzione $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 1]$ ed individuare, in tale intervallo, le ascisse dei punti che soddisfano la tesi del teorema.

QUESITO 5 (___/5)

Determinare le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \frac{x \ln x}{x-3}$.

QUESITO 6 (___/5)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio. Dire inoltre se le funzioni trasformate hanno punti di non derivabilità, motivando la risposta, su foglio a parte.



Parte B

QUESITO 7 (___/6)

SOLO PER CHI DEVE RECUPERARE IL PARZIALE RELATIVO ALLA PARTE B

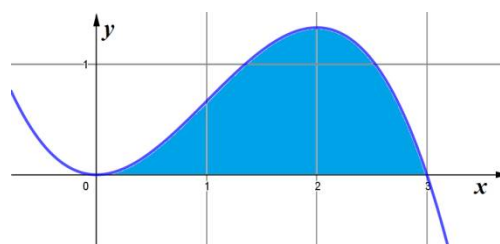
- a) Determinare il rango della matrice:
- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
- b) Calcolare il prodotto $A \cdot A^T$ tra la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e la sua trasposta ed il determinante del prodotto $A^T \cdot A$.

QUESITO 8 (___/5)

- a) Calcolare l'area della regione piana rappresentata in figura, delimitata dall'asse x e dalla curva di equazione

$$y = -\frac{x^3}{3} + x^2.$$

- b) Determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione della superficie colorata attorno all'asse x .



QUESITO 9 (___/5)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 10 (___/5)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' - 2y' - 8y = e^{2x}$.

QUESITO 11 (___/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a)
$$\begin{cases} 2x - 2y - 3z = -13 \\ y + z = 2 \\ x - y - 9z = -14 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 4z = 0 \\ -5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

QUESITO 12 (___/5)

Tra le primitive della funzione $f(x) = x \cdot e^{3x}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $(0,2)$; calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

PUNTEGGIO TOTALE: ____/30

TRACCIA SINTETICA DI RISOLUZIONE – FILA B

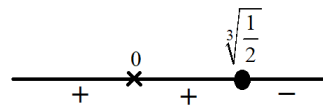
QUESITO 1

$$f(x) = -x + \frac{1}{2x^2} = -x + \frac{1}{2}x^{-2}$$

- DOMINIO: $x \neq 0$

- PARITÀ: $f(-x) = -(-x) + \frac{1}{2(-x)^2} = x + \frac{1}{2x^2}$ è diversa da $f(x)$ e da $-f(x) \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari

- SEGNO: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x + \frac{1}{2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^3 + 1}{2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$



La curva incontra gli assi cartesiani solo nel punto $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0\right)$

- ASINTOTI:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x + \frac{1}{2x^2} = +\infty \Rightarrow \text{la funzione ha l'asintoto verticale } x = 0$$

Dal momento che $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ concludiamo che la funzione ammette l'asintoto obliquo: $y = -x$

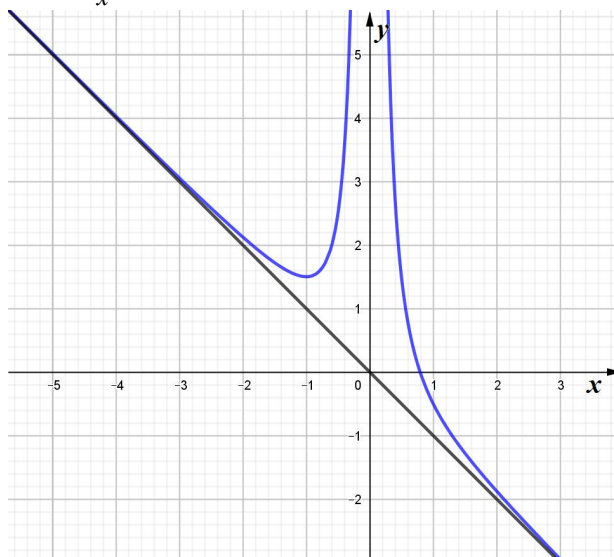
- CRESCENZA: $f'(x) = -1 + \frac{1}{2}(-2)x^{-3} = -1 - x^{-3} = \dots = -\frac{x^3 + 1}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x \cdot x^2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} \geq 0$

essendo $\frac{x^2 - x + 1}{x^2} > 0$ in D



La funzione ha un minimo in $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

- CONCAVITÀ: $f''(x) = -(-3)x^{-4} = \frac{3}{x^4} > 0$ in D $\Rightarrow$ la funzione volge sempre la concavità verso l'alto.



QUESITO 2

Il punto di ascissa $x=1$ della parabola ha coordinate: $y(1) = -1 + 4 - 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$

Il punto di ascissa $x=1$ del grafico della funzione ha coordinate: $f(1) = 1 + 1 + \ln 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$

Calcoliamo i coefficienti angolari:

- $y' = -2x + 4 \Rightarrow y'(1) = -2 + 4 = 2$

$$\circ f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Dal momento che le tangenti passano per lo stesso punto ed hanno lo stesso coefficiente angolare, possiamo concludere che le due curve hanno la stessa tangente in (2,2).

L'equazione della tangente è: $y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x$

QUESITO 3

Il dominio della funzione $f(x) = x - 3 + \ln x$ è $D: x > 0$. Tale funzione è continua e derivabile in D , essendo somma di funzioni ivi continue e derivabili.

Calcoliamone la derivata prima: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ in D , poiché somma di termini ivi positivi $\Rightarrow$ la funzione è crescente in D .

$$\circ f(2) = 2 - 3 + \ln 2 = \ln 2 - 1 < 0, \text{ dal momento che } \ln 2 < 1$$

$$\circ f(3) = 3 - 3 + \ln 3 = \ln 3 > 0$$

Per il teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette almeno uno zero in $[2,3]$; essendo monotona in D , e quindi ivi invertibile, tale zero è unico.

Applicando il metodo di bisezione otteniamo:

a	b	f(a)	f(b)	m=(a+b)/2	f(m)	Δ
2	3	-0,30685	1,098612	2,5	0,416291	0,5
2	2,5	-0,30685	0,416291	2,25	0,06093	0,25
2	2,25	-0,30685	0,06093	2,125	-0,12123	0,125
2,125	2,25	-0,12123	0,06093	2,1875	-0,02974	0,0625

Pertanto l'approssimazione dello zero cercato è:

$$\alpha \approx 2.19$$

QUESITO 4

La funzione $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ è rapporto tra funzioni continue e derivabili; pertanto è continua e derivabile nel suo dominio: $x \neq -2$.

In particolare è una funzione continua e derivabile nell'intervallo $[-1,1]$.

Le ipotesi del teorema di Lagrange sono, quindi, verificate.

$$\circ f(-1) = \frac{-1-2}{-1+2} = -3$$

$$\circ f(1) = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-\frac{1}{3} - (-3)}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \frac{x-2-(x+2)}{(x+2)^2} = \dots = \frac{4}{(x+2)^2}$$

La tesi del teorema di Lagrange afferma che esiste almeno un punto interno all'intervallo $[-1,1]$ tale che:

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Leftrightarrow \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x+2 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ il punto dell'intervallo che soddisfa la tesi del teorema è $x = -2 + \sqrt{3}$, l'altro ha ascissa $-2 - \sqrt{3} < -1$ e non è accettabile.

QUESITO 5

Il dominio della funzione $f(x) = \frac{x \ln x}{x-3}$ è: $x > 0, x \neq 3$.

○ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-3} = ?$

Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$. Pertanto:

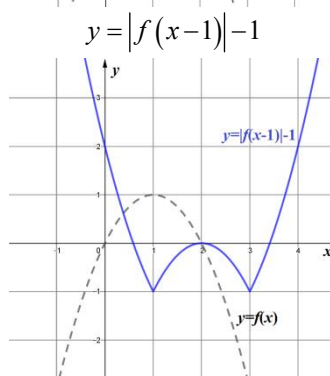
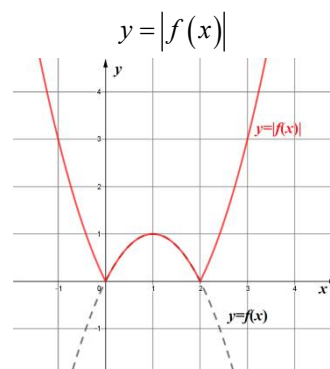
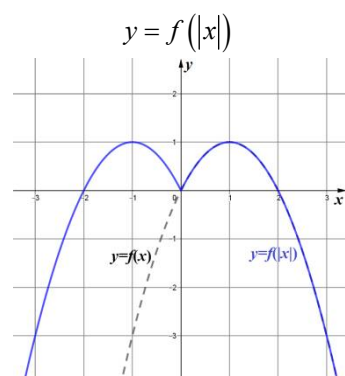
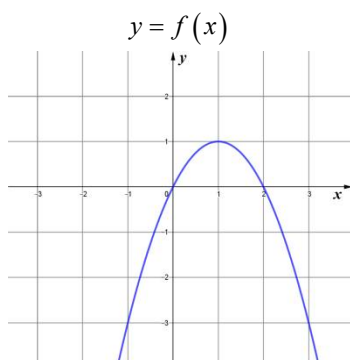
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-3} = 0 \Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti per $x \rightarrow 0^+$

○ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \ln x}{x-3} = \infty \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto verticale $x = 3$

○ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3} \cdot \ln x = +\infty \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti orizzontali

○ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-3} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti obliqui

QUESITO 6



- La funzione $y = |f(x)|$ ammette due punti angolosi in corrispondenza degli zeri della funzione $y = f(x)$. In tali punti, infatti, il grafico della funzione $y = f(x)$ ha tangente obliqua; pertanto, applicando il valore assoluto (e simmettizzando, di conseguenza, anche le tangenti) otteniamo una tangente destra diversa dalla tangente sinistra in tali punti.

- La funzione $y = f(|x|)$ ammette un punto angoloso in corrispondenza dell'intersezione del grafico della funzione $y = f(x)$ con l'asse delle y . In tale punto, infatti, il grafico della funzione $y = f(x)$ ha tangente obliqua; inoltre, la funzione $y = f(|x|)$ è pari e presenta una simmetria rispetto all'asse delle y . Pertanto, applicando la simmetria anche sulla tangente, otteniamo una tangente destra diversa dalla tangente sinistra in tale punto.
- La funzione $y = |f(x-1)| - 1$ è ottenuta da una traslazione della funzione $y = |f(x)|$ ed ammette, pertanto, due punti angolosi.

QUESITO 7

a) La 4° riga della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ è la somma della 1° e della 2° $\Rightarrow \det(A) = 0$

Consideriamo ora il minore (calcolato mediante il teorema di Laplace, rispetto alla 1° riga):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice ha rango 3

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

Per il teorema di Binet e la proprietà commutativa del prodotto in $\mathbb{R}$:

$$\det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A^T \cdot A)$$

Inoltre, è noto che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante; pertanto:

$$\det(A) = \det(A^T) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \det(A^T \cdot A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = [\det(A)]^2 = 9$$

In alternativa si poteva ricorrere al calcolo del determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ oppure calcolare direttamente la matrice $A^T \cdot A$ e trovarne il determinante.

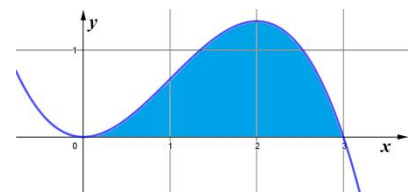
QUESITO 8

- a) Le intersezioni del grafico della funzione con l'asse x sono:

$$\begin{cases} y = -\frac{x^3}{3} + x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

$\Rightarrow$ L'area cercata è:

$$Area = \int_0^3 -\frac{x^3}{3} + x^2 dx = \left[-\frac{x^4}{12} + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{12} + \frac{1}{3} \cdot 27 = \dots = \frac{9}{4}u^2$$



- b) Applicando il metodo delle fette: $dV = \pi [f(x)]^2 dx = \pi \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 \right)^2 dx = \pi \left(\frac{x^6}{9} - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx$

Integrando otteniamo:

$$V = \int_0^3 \pi \left(\frac{x^6}{9} - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx = \pi \left[\frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \pi \left(\frac{243}{7} - 81 + \frac{243}{5} \right) = \dots = \frac{81}{35} \pi u^3$$

QUESITO 9

Sviluppando il determinante rispetto all'ultima riga otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice A è invertibile.

Calcoliamo la matrice $\text{cof}(A)$:

$$\circ A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\circ A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\circ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\circ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\circ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la matrice inversa cercata è:

$$A^{-1} = \frac{[\text{cof}(A)]^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESITO 10

Risolviamo l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 8y = e^{2x} \quad (*)$$

L'equazione omogenea associata a (*) è:

$$y'' - 2y' - 8y = 0$$

e l'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

Risolviamo l'equazione caratteristica:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 3 = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$\varphi = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione (*) tra le funzioni del tipo $\psi = k \cdot e^{2x}$:

$$\psi' = 2ke^{2x}$$

$$\psi'' = 4ke^{2x}$$

Sostituendo nella (*):

$$4ke^{2x} - 2 \cdot 2ke^{2x} - 8ke^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow -8ke^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow -8k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

La soluzione generale dell'equazione (*) è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} e^{2x}$$

QUESITO 11

$$a) \begin{cases} 2x - 2y - 3z = -13 \\ y + z = 2 \\ x - y - 9z = -14 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la 3° equazione per -2 e sommiamola alla 1°:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3z = -13 \\ y + z = 2 \\ -2x + 2y + 18z = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15z = 15 \\ y + z = 2 \\ x - y - 9z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \text{sostituendo: } \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x - 1 - 9 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Soluzione: $(-4, 1, 1)$

$$b) \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 4z = 0 \\ -5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Applichiamo il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow [-2 \cdot I + II] \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow [-5 \cdot I + III] \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow [II + III] \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema diviene quindi:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - z \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - z \\ 3x - 3z + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \begin{cases} y = -2x \\ z = 3x \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$(x, -2x, 3x), \forall x \in \mathbb{R}$$

QUESITO 12

Ricerchiamo la famiglia delle primitive della funzione data, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{3x} dx &= \frac{1}{3} \int 3x \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3} \left[x \cdot e^{3x} - \int e^{3x} dx \right] = \frac{1}{3} \left[x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \int 3e^{3x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} \right] + c = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + c \end{aligned}$$

Affinchè la funzione così ottenuta passi per $(0, 2)$ è necessario che:

$$\frac{1}{3} e^0 \left(0 - \frac{1}{3} \right) + c = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{9} + c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{19}{9}$$

La funzione cercata è $F(x) = \frac{3x-1}{9} e^{3x} + \frac{19}{9}$.

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{9} e^{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{9e^{-3x}} =_H \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-27e^{-3x}} = 0$$

otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{9} e^{3x} + \frac{19}{9} = \frac{19}{9}$$