UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (A)

San Floriano, 14/12/2017

Informazioni personali

Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: _________________________________ Matricola: __________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=4\dfrac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Dire se la funzione $f(x)=x^2-\dfrac{4x^2-x}{x^2-4}$ può ammettere asintoti orizzontali od obliqui, motivando la risposta; in caso di risposta negativa, determinare l'eventuale funzione asintotica, specificando di che funzione si tratta.
Calcolare, inoltre, la tangente al grafico della curva, passante per il suo punto di ascissa 1.

QUESITO 3 (_____/6)

Calcolare i seguenti limiti, specificando quale tra essi non può essere calcolato mediante il Teorema di De l'Hospital:

a) $\lim_{x \to 0^+} x \ln(3x) =$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x\left(e^{3x}-1\right)}{\ln\left(5x^2+1\right)} =$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot e^x}{x^2-2x+3} =$

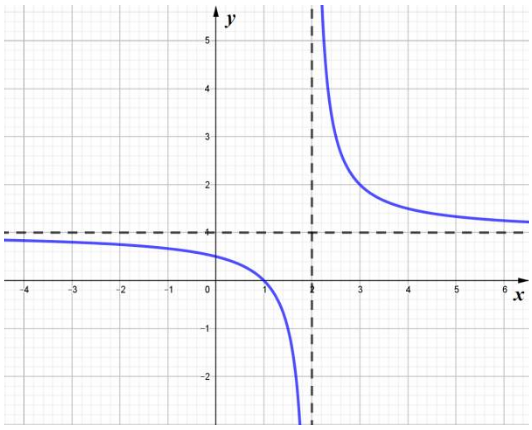
QUESITO 4 (_____/6)

Classificare i punti di non derivabilità della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$ e calcolarne gli estremi relativi.

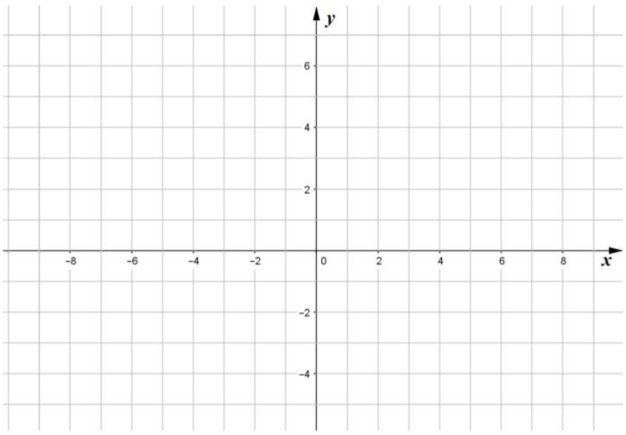
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni indicate, utilizzando gli spazi a disposizione in questo foglio. Dire inoltre se le funzioni trasformate hanno punti di non derivabilità, motivando la risposta, su foglio a parte.

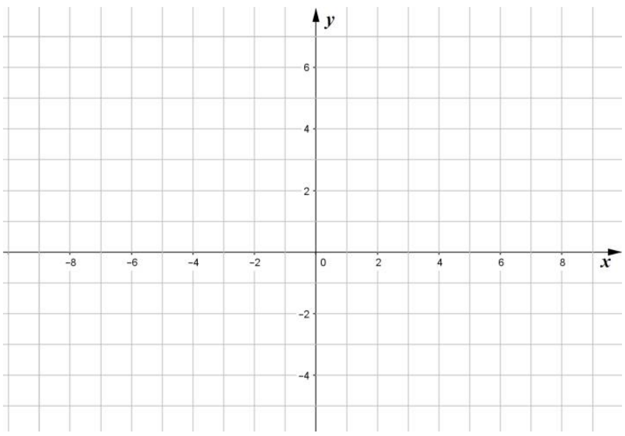
$y=f(x)$



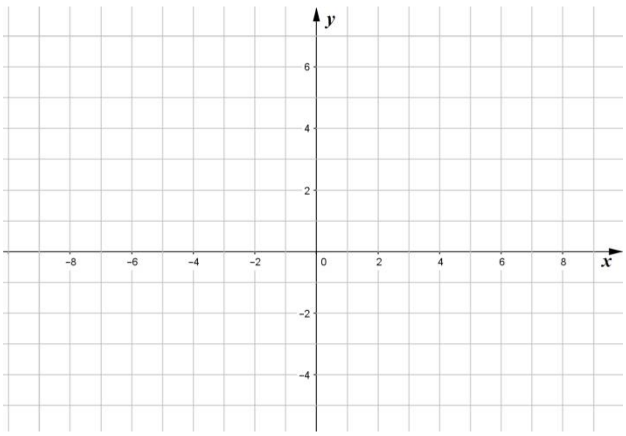
$y=\left|f(x)\right|$



$y=f(|x|)$



$y=f(x-2)+1$



Punteggio totale: ___________/30

Svolgimento – Fila A

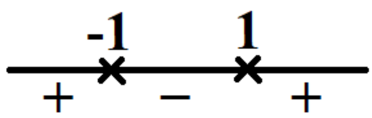
N. 1

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

- DOMINIO: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$
- PARITÀ: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)$ per ogni $x\in D \Rightarrow$ funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y)
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

  $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1>0$ dal momento che

  $x^2+1>0, \forall x\in D \Leftrightarrow x<-1 \vee x>1$

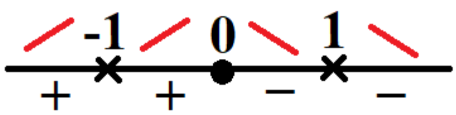
  $f(0)=-1 \Rightarrow$ la funzione taglia l'asse y in $(0,-1)$
- RICERCA DEGLI ASINTOTI:

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1 \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=1$ per $x\to+\infty$; per parità ammette lo stesso asintoto anche per $x\to-\infty$

  $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\overbrace{x^2+1}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\overbrace{x^2+1}^{\to 2}}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^-}}=-\infty \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto verticale $x=1$; per parità ammette anche l'asintoto verticale $x=-1$

- STUDIO DELLA CRESCENZA:

  $f'(x)=\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\ldots=-4\dfrac{x}{(x^2-1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$ in D

  $(0,-1)$ è punto di massimo (relativo) per la curva

- STUDIO DELLA CONCAVITÀ:

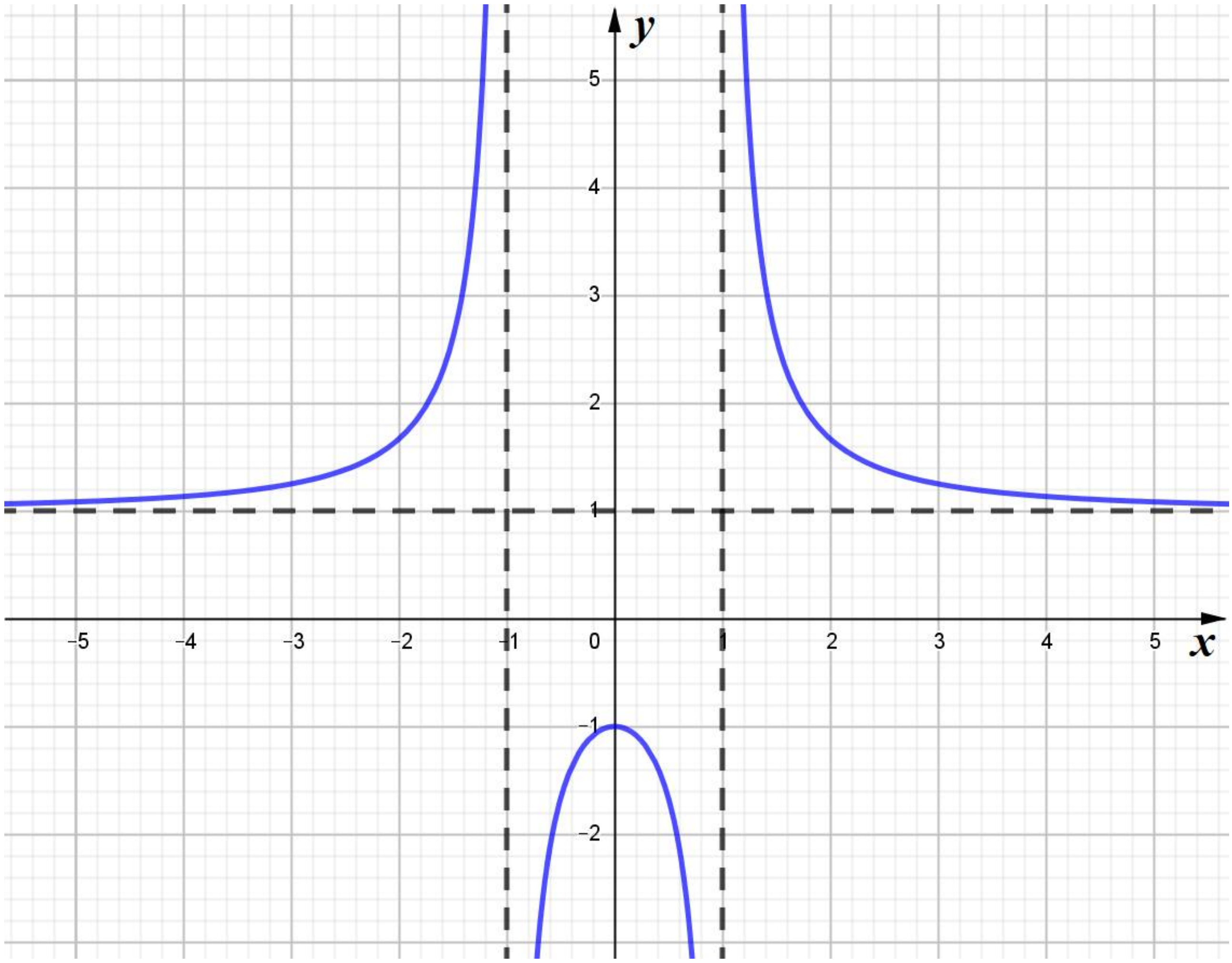
  $f''(x)=-4\dfrac{(x^2-1)^2-2(x^2-1)\cdot 2x\cdot x}{(x^2-1)^4}=-4\dfrac{(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^3}=4\dfrac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\geq 0$

  Dal momento che $3x^2+1>0, \forall x\in D$, risulta: $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1>0$

  $\Rightarrow$ non vi sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è quindi:



N. 2

La funzione $f(x)=x^2-\frac{4x^2-x}{x^2-4}$ non può ammettere né asintoti orizzontali né obliqui. Infatti:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2-\frac{4x^2-x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty} x^2-\frac{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty} x^2-\frac{4-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{4x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{4-\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\infty$

Analogamente, anche:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-\frac{4x^2-x}{x^2-4}=\ldots=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} x-\frac{4x-1}{x^2-4}=\ldots=\infty$

La funzione ammette, però, una curva asintotica; osserviamo infatti che:

$$f(x)=x^2-\frac{4x^2-x}{x^2-4}=x^2-\frac{4x^2-16+16-x}{x^2-4}=x^2-\frac{4\left(x^2-4\right)+16-x}{x^2-4}=x^2-4+\frac{x-16}{x^2-4}$$

ed essendo (com'è facile verificare)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-16}{x^2-4}=0$$

possiamo concludere che la **parabola** di equazione $y=x^2-4$ è a curva asintotica cercata.

- $f(1)=1-4+\dfrac{1-16}{1-4}=-3+5=2 \Rightarrow$ la curva passa per $(1,2)$
- $f'(x)=2x+\dfrac{x^2-4-(x-16)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}$
- $f'(1)=2\cdot 1+\dfrac{1-4-(1-16)\cdot 2}{(1-4)^2}=2+\dfrac{-3+30}{9}=2+3=5 \Rightarrow$ coefficiente angolare tangente: $m=5$

Retta per P(1,2):

$$y-2=m(x-1)$$

Per $m=5$, allora:

$$y-2=5(x-1) \Leftrightarrow y=5x-3$$

N. 3

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\ln(3x)}_{\downarrow\, -\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(3x)}{x^{-1}} =_H \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\cdot x^2 = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(e^{3x}-1\right)}{\ln\left(5x^2+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln\left(5x^2+1\right)}\cdot\dfrac{e^{3x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\underbrace{\dfrac{\ln\left(5x^2+1\right)}{5x^2}}_{\downarrow\, 1}\cdot 5}\cdot\underbrace{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}}_{\downarrow\, 1}\cdot 3 = \dfrac{3}{5}$ in questo caso non è

possibile utilizzare il teorema di de l'Hospital, trattandosi del rapporto tra due limiti notevoli.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cdot e^x}{x^2-2x+3} =_H \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+xe^x}{2x-2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\dfrac{x+1}{2x-2}}_{\downarrow\, \frac{1}{2}}\cdot\underbrace{e^x}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$

N. 4

Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$ è $D=\mathbb{R}$, perché la radice è di indice dispari.

Calcoliamone la derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}}\left(3x^2-4x\right)=\frac{x(3x-4)}{3\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}}=\frac{x(3x-4)}{3x\sqrt[3]{x(x-2)^2}}=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}$$

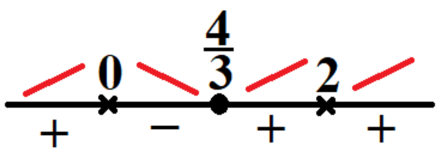
Il dominio della derivata prima è $D_1=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

Analizziamo la derivabilità della funzione in $x=0$ e $x=2$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}=\infty$

In entrambi i casi si tratta di punti a tangente verticale. Dobbiamo decidere se si tratta di flessi a tangente verticale o odi cuspidi. Per farlo, studiamo la crescenza della funzione:

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{\sqrt[3]{x}}\geq 0$$

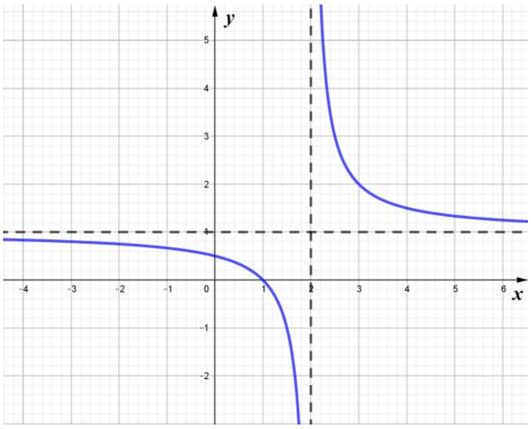


Quindi la funzione ha una **cuspide** in $x=0$ ed un punto di **flesso a tangente verticale** in $x=2$. Inoltre, la funzione ha un massimo relativo (non stazionario) nella cuspide ed un minimo stazionario per $x=\frac{4}{3}$.

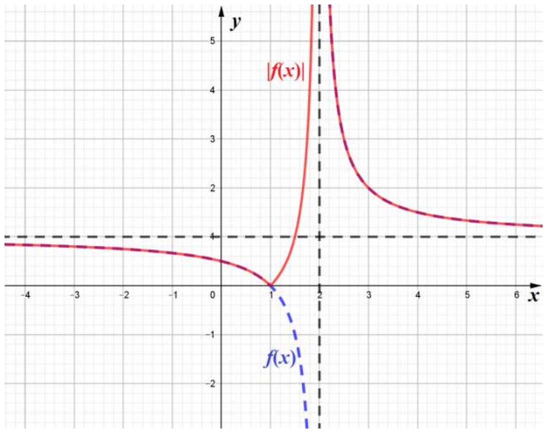
Più precisamente: MAX $(0,0)$ e MIN $\left(\frac{4}{3},-\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

N. 5

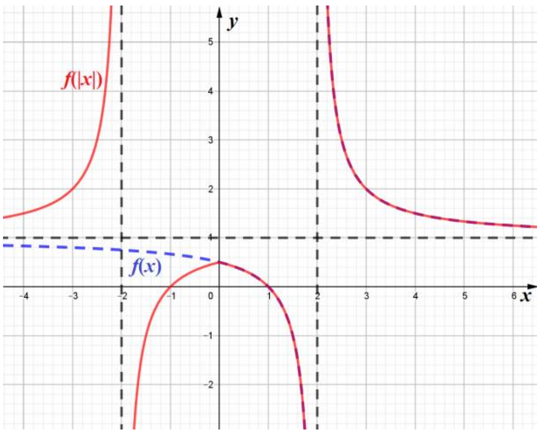
$y=f(x)$



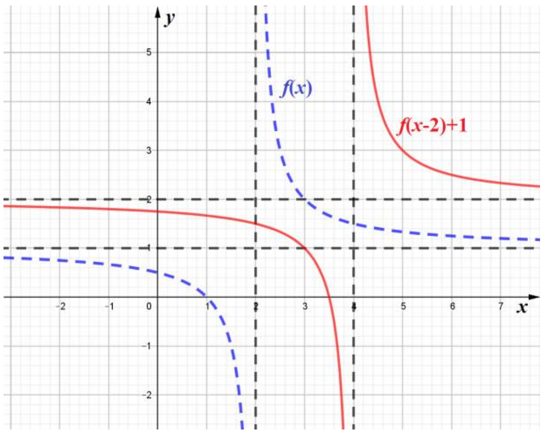
$y=|f(x)|$



$y=f(|x|)$



$y=f(x-2)+1$



- La funzione $y=|f(x)|$ ha un punto angoloso in $x=1$ in quanto la funzione $y=f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=1$. In tal caso, quindi, la funzione $y=|f(x)|$ avrà, per $x=1$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y=f(|x|)$ ha un punto angoloso in $x=0$ in quanto la funzione $y=f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=0$. In tal caso, quindi, la funzione $y=f(|x|)$ avrà, per $x=0$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y=f(x-2)+1$ non ha punti di non derivabilità, in quanto ottenuta da $y=f(x)$ mediante una traslazione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (B)

San Floriano, 14/12/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=2\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=20\dfrac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Classificare i punti di non derivabilità della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x^2}$ e calcolarne gli estremi relativi.

QUESITO 3 (_____/6)

Calcolare i seguenti limiti, specificando quale tra essi non può essere calcolato mediante il Teorema di De l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(5x) =$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\cdot e^{-x}}{x^2+2x+3} =$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(e^{2x}-1\right)}{\ln\left(4x^2+1\right)} =$

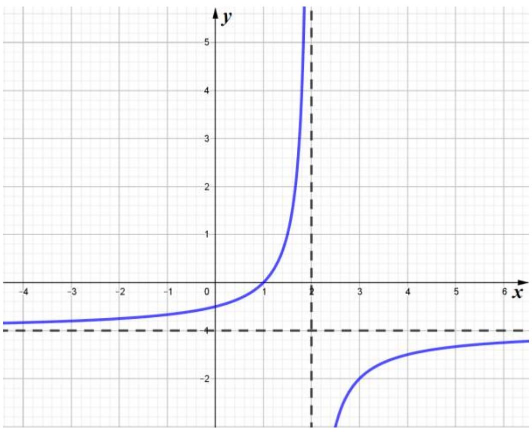
QUESITO 4 (_____/6)

Dire se la funzione $f(x) = x^2 - \dfrac{4x^2+x}{x^2-4}$ può ammettere asintoti orizzontali od obliqui, motivando la risposta; in caso di risposta negativa, determinare l'eventuale funzione asintotica, specificando di che funzione si tratta. Calcolare, inoltre, la tangente al grafico della curva, passante per il suo punto di ascissa – 1.

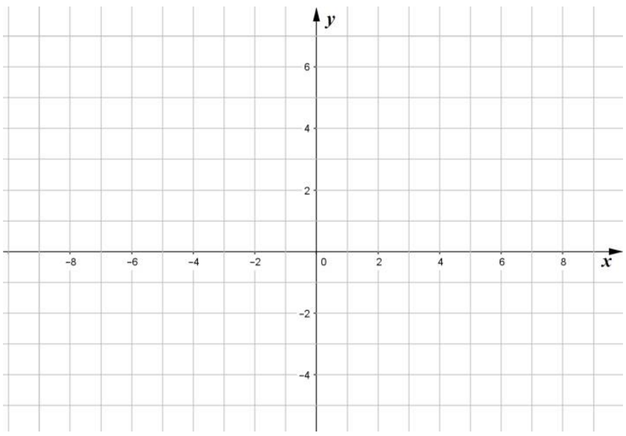
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni indicate, utilizzando gli spazi a disposizione in questo foglio. Dire inoltre se le funzioni trasformate hanno punti di non derivabilità, motivando la risposta, su foglio a parte.

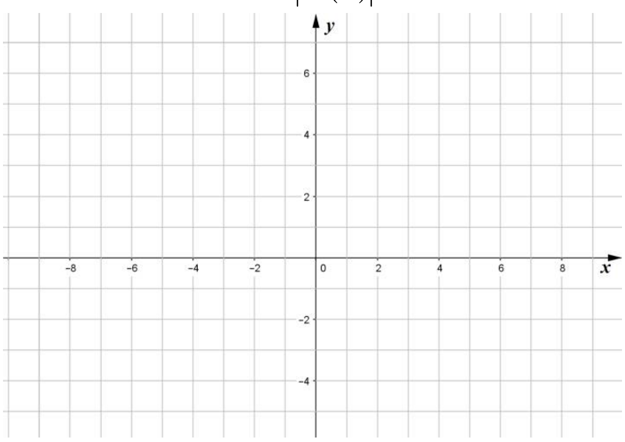
$y = f(x)$



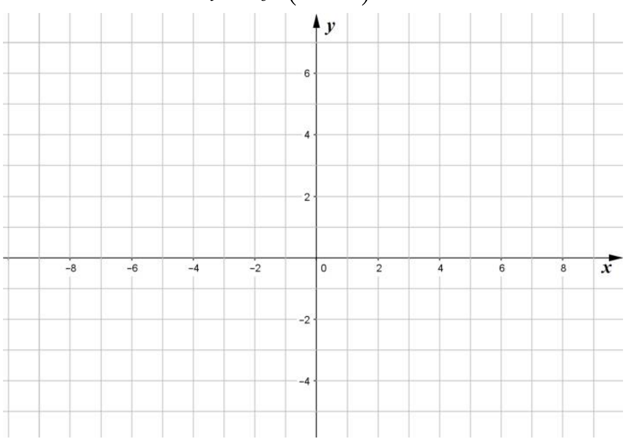
$y = f(|x|)$



$y = |f(x)|$



$y = f(x-2)+1$



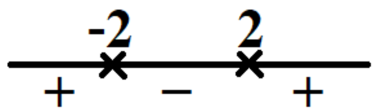
Punteggio totale: ___________/30

Svolgimento – Fila B

N. 1

$$f(x) = 2\frac{x^2+1}{x^2-4}$$

- DOMINIO: $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$
- PARITÀ: $f(-x) = 2\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-4} = 2\frac{x^2+1}{x^2-4} = f(x)$ per ogni $x \in D \Rightarrow$ funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y)
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI:



$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4>0$ dal momento che $x^2+1>0, \forall x \in D \Leftrightarrow x<-2 \vee x>2$

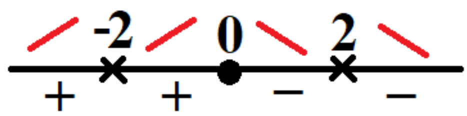
$f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ la funzione taglia l'asse y in $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

- RICERCA DEGLI ASINTOTI:

$$\lim_{x\to+\infty} 2\frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = 2 \Rightarrow$$ la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=2$ per $x \to +\infty$; per parità ammette lo stesso asintoto anche per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} 2\frac{\overbrace{x^2+1}^{\to 5}}{\underbrace{x^2-4}_{\downarrow\, 0^+}} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 2^-} 2\frac{\overbrace{x^2+1}^{\to 5}}{\underbrace{x^2-4}_{\downarrow\, 0^-}} = -\infty \Rightarrow$$ la funzione ammette l'asintoto verticale $x=2$; per parità ammette anche l'asintoto verticale $x=-2$

- STUDIO DELLA CRESCENZA:



$$f'(x) = 2\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = \ldots = \frac{-20x}{\left(x^2-4\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ in D}$$

$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ è punto di massimo (relativo) per la curva

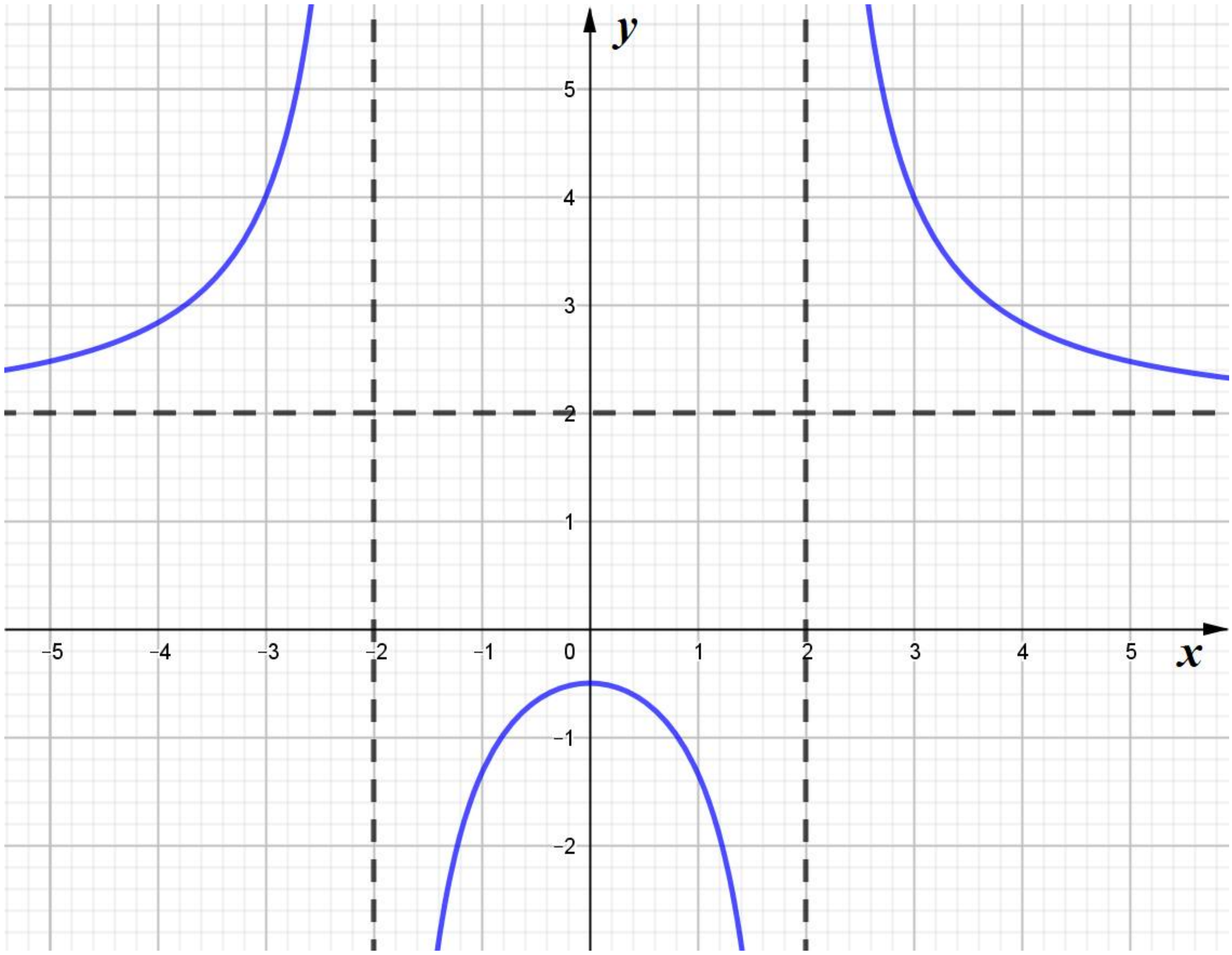
- STUDIO DELLA CONCAVITÀ:

$$f''(x) = -20\frac{\left(x^2-4\right)^2-2\left(x^2-4\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2-4\right)^4} = -20\frac{\left(x^2-4\right)-4x^2}{\left(x^2-4\right)^3} = 20\frac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3} \geq 0$$

Dal momento che $3x^2+4>0, \forall x \in D$, risulta: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4>0$

$\Rightarrow$ non vi sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è quindi:



N. 2

Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x^2}$ è $D=\mathbb{R}$, perché la radice è di indice dispari.

Calcoliamone la derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3+2x^2\right)^2}}\left(3x^2+4x\right)=\frac{x(3x+4)}{3\sqrt[3]{x^4(x+2)^2}}=\frac{x(3x+4)}{3x\sqrt[3]{x(x+2)^2}}=\frac{3x+4}{3\sqrt[3]{x(x+2)^2}}$$

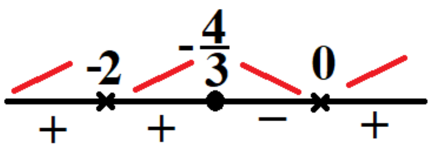
Il dominio della derivata prima è $D_1=\mathbb{R}\setminus\{0,-2\}$.

Analizziamo la derivabilità della funzione in $x=0$ e $x=-2$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+4}{3\sqrt[3]{x(x+2)^2}}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to -2} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+4}{3\sqrt[3]{x(x+2)^2}}=\infty$

In entrambi i casi si tratta di punti a tangente verticale. Dobbiamo decidere se si tratta di flessi a tangente verticale o odi cuspidi. Per farlo, studiamo la crescenza della funzione:

$$f'(x)\geq 0 \iff \frac{3x-4}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}\geq 0 \iff \frac{3x-4}{\sqrt[3]{x}}\geq 0$$



Quindi la funzione ha una **cuspide** in $x=0$ ed un punto di **flesso a tangente verticale** in $x=-2$. Inoltre, la funzione ha un minimo relativo (non stazionario) nella cuspide ed un massimo stazionario per $x=-\frac{4}{3}$.

Più precisamente: MIN $(0,0)$ e MAX $\left(-\frac{4}{3},\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

N. 3

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{x}_{\downarrow\,0}\underbrace{\ln(5x)}_{\downarrow\,-\infty}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(5x)}{x^{-1}}=_H\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{5x}\cdot5}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot x^2=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x^2+2x+3}=_H\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{2x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{1-x}{2(x+1)}}_{\downarrow\,-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\,+\infty}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(e^{2x}-1\right)}{\ln\left(4x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\ln\left(4x^2+1\right)}\cdot\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\ln\left(4x^2+1\right)}{4x^2}}_{\downarrow\,1}\cdot4}\cdot\underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\downarrow\,1}\cdot2=\frac{1}{2}$ in questo caso non è possibile utilizzare il teorema di de l'Hospital, trattandosi del rapporto tra due limiti notevoli.

N. 4

La funzione $f(x)=x^2-\frac{4x^2+x}{x^2-4}$ non può ammettere né asintoti orizzontali né obliqui. Infatti:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}=x^2-\frac{4x^2+x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\frac{4x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\frac{4+\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\infty$

Analogamente, anche:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-\frac{4x^2+x}{x^2-4}=\ldots=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x-\frac{4x+1}{x^2-4}=\ldots=\infty$

La funzione ammette, però, una curva asintotica; osserviamo infatti che:

$$f(x)=x^2-\frac{4x^2+x}{x^2-4}=x^2-\frac{4x^2-16+16+x}{x^2-4}=x^2-\frac{4\left(x^2-4\right)+16+x}{x^2-4}=x^2-4-\frac{x+16}{x^2-4}$$

ed essendo (com'è facile verificare)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+16}{x^2-4}=0$$

possiamo concludere che la **parabola** di equazione $y=x^2-4$ è a curva asintotica cercata.

- $f(-1)=1-4-\frac{-1+16}{1-4}=-3+5=2\Rightarrow$ la curva passa per $(-1,2)$
- $f'(x)=2x-\frac{x^2-4-(x+16)\cdot2x}{\left(x^2-4\right)^2}$

- $f'(-1)=2\cdot(-1)-\dfrac{1-4-(-1+16)\cdot 2(-1)}{(1-4)^2}=-2-\dfrac{-3+30}{9}=-2-3=-5 \Rightarrow$ coefficiente angolare tangente: $m=-5$

Retta per P(−1,2):

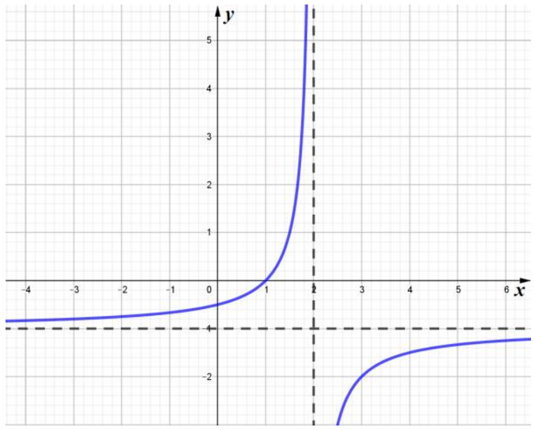
$$y-2=m(x+1)$$

Per $m=-5$, allora:

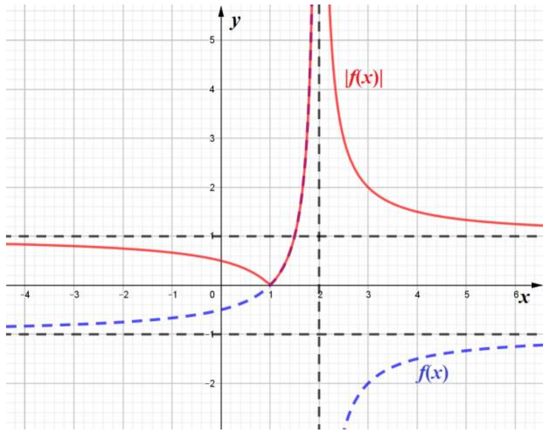
$$y-2=-5(x+1) \Leftrightarrow y=-5x-3$$

N. 5

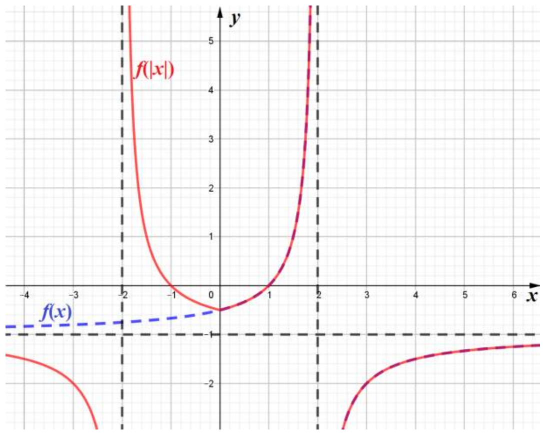
$y=f(x)$



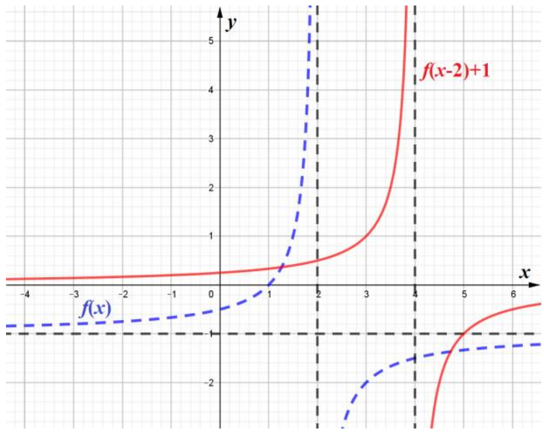
$y=|f(x)|$



$y=f(|x|)$



$y=f(x-2)+1$



- La funzione $y=|f(x)|$ ha un punto angoloso in $x=1$ in quanto la funzione $y=f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=1$. In tal caso, quindi, la funzione $y=|f(x)|$ avrà, per $x=1$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y=f(|x|)$ ha un punto angoloso in $x=0$ in quanto la funzione $y=f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=0$. In tal caso, quindi, la funzione $y=f(|x|)$ avrà, per $x=0$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y=f(x-2)+1$ non ha punti di non derivabilità, in quanto ottenuta da $y=f(x)$ mediante una traslazione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (C)

San Floriano, 14/12/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: _________________________________ Matricola: __________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=4\dfrac{3x^2+1}{\left(1-x^2\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Classificare i punti di non derivabilità della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ e calcolarne gli estremi relativi.

QUESITO 3 (_____/6)

Dire se la funzione $f(x) = -x^2 + \dfrac{4x^2 - x}{x^2 - 4}$ può ammettere asintoti orizzontali od obliqui, motivando la risposta; in caso di risposta negativa, determinare l'eventuale funzione asintotica, specificando di che funzione si tratta. Calcolare, inoltre, la tangente al grafico della curva, passante per il suo punto di ascissa 1.

QUESITO 4 (_____/6)

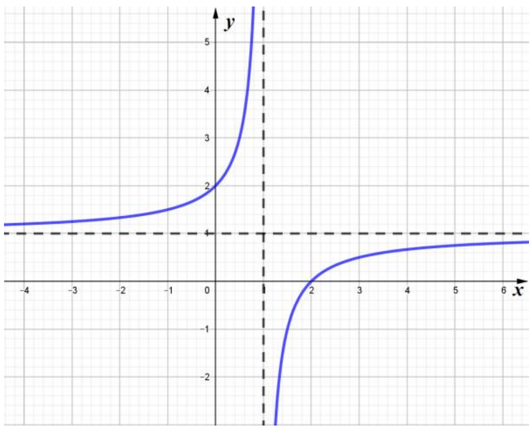
Calcolare i seguenti limiti, specificando quale tra essi non può essere calcolato mediante il Teorema di De l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cdot e^{-x}}{x^2 - 5x + 6} =$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(6x) =$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2x^2 + 1)}{x(e^{3x} - 1)} =$

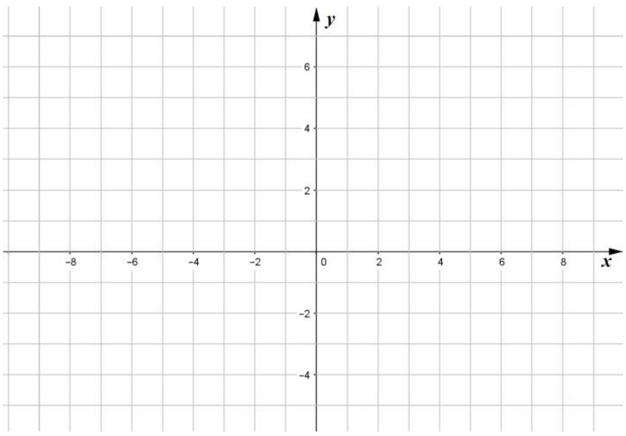
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni indicate, utilizzando gli spazi a disposizione in questo foglio. Dire inoltre se le funzioni trasformate hanno punti di non derivabilità, motivando la risposta, su foglio a parte.

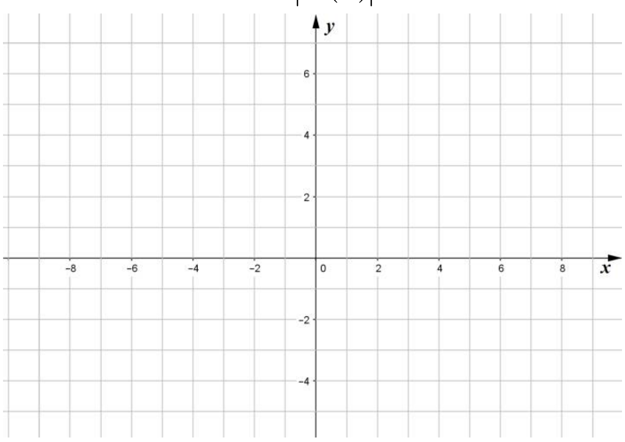
$y = f(x)$



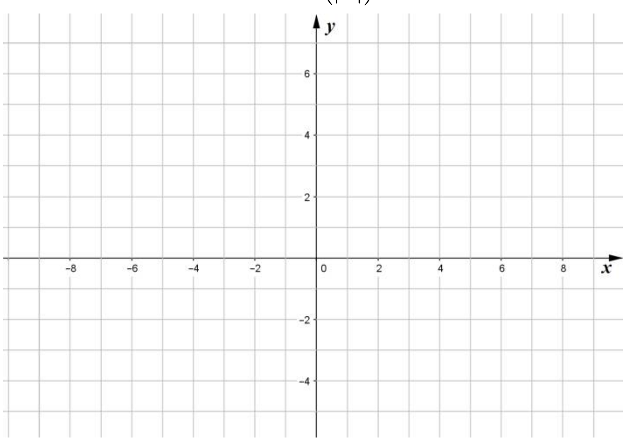
$y = f(x-2) + 1$



$y = |f(x)|$



$y = f(|x|)$



Punteggio totale: ___________/30

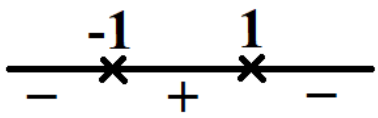
Svolgimento – Fila C

N. 1

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$

- DOMINIO: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$
- PARITÀ: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{1-(-x)^2}=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}=f(x)$ per ogni $x\in D \Rightarrow$ funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y)
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

  $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2>0$ dal momento che $x^2+1>0, \forall x\in D \Leftrightarrow -1<x<1$

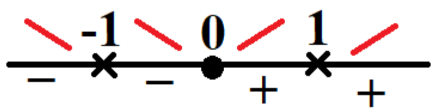
  $f(0)=1 \Rightarrow$ la funzione taglia l'asse y in $(0,1)$
- RICERCA DEGLI ASINTOTI:

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{-1+\dfrac{1}{x^2}}=-1 \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=-1$ per $x\to+\infty$; per parità ammette lo stesso asintoto anche per $x\to-\infty$

  $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\overbrace{x^2+1}^{\to 2}}{\underbrace{1-x^2}_{\downarrow\, 0^-}}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\overbrace{x^2+1}^{\to 2}}{\underbrace{1-x^2}_{\downarrow\, 0^+}}=+\infty \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto verticale $x=1$; per parità ammette anche l'asintoto verticale $x=-1$

- STUDIO DELLA CRESCENZA:

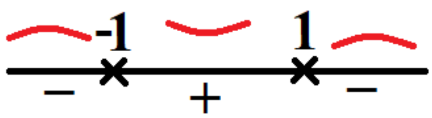
  $f'(x)=\dfrac{2x(1-x^2)+2x(x^2+1)}{(1-x^2)^2}=\ldots=4\dfrac{x}{(x^2-1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$ in D

  $(0,1)$ è punto di minimo (relativo) per la curva

- STUDIO DELLA CONCAVITÀ:

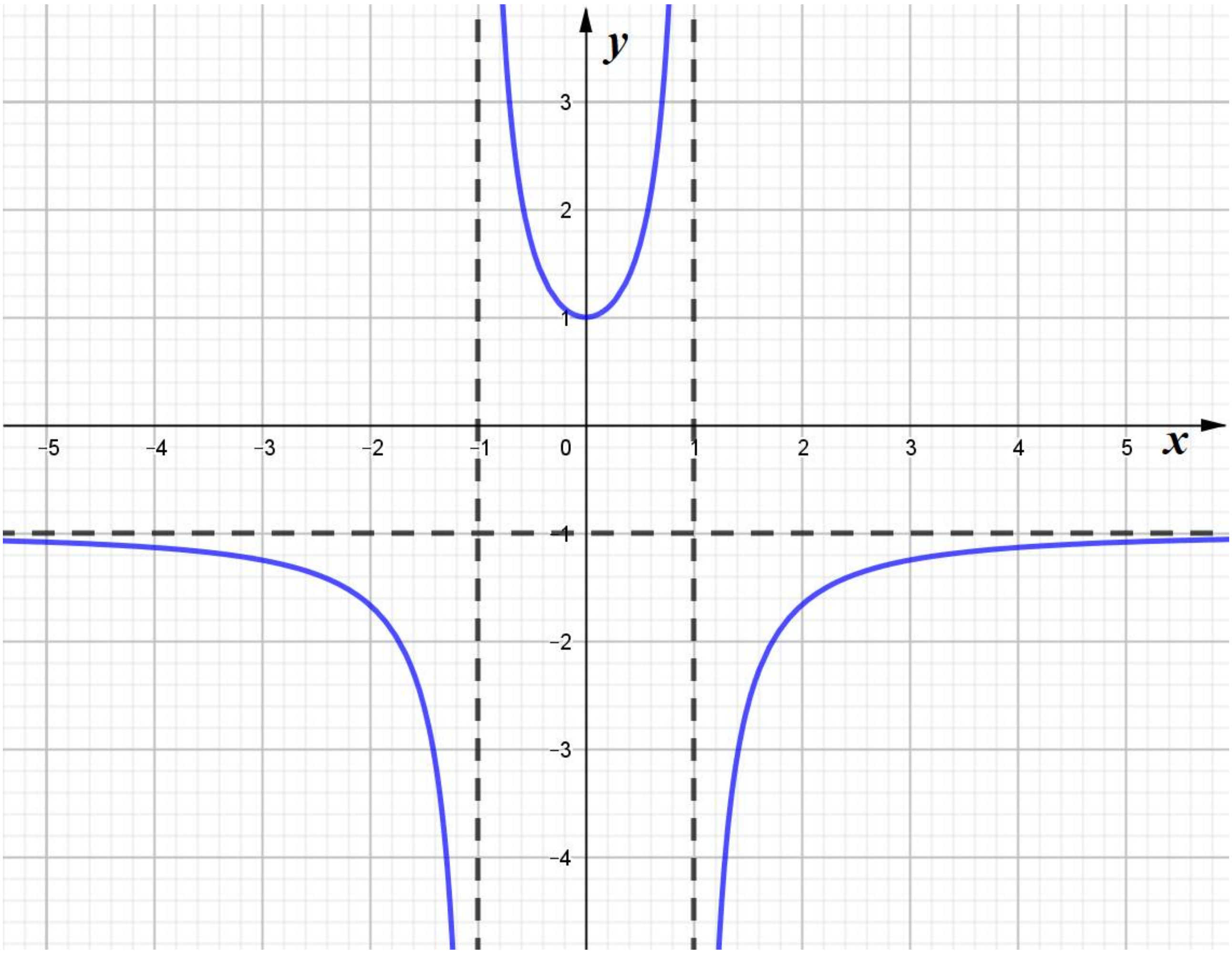
  $f''(x)=4\dfrac{(x^2-1)^2-2(x^2-1)\cdot 2x\cdot x}{(x^2-1)^4}=4\dfrac{(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^3}=-4\dfrac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\geq 0$

  Dal momento che $3x^2+1>0, \forall x\in D$, risulta: $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1<0$

  $\Rightarrow$ non vi sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è quindi:



N. 2

Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ è $D=\mathbb{R}$, perché la radice è di indice dispari.

Calcoliamone la derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3-x^2\right)^2}}\left(3x^2-2x\right)=\frac{x(3x-2)}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}=\frac{x(3x-2)}{3x\sqrt[3]{x(x-1)^2}}=\frac{(3x-2)}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$$

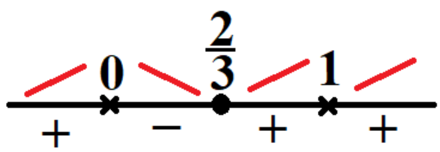
Il dominio della derivata prima è $D_1=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Analizziamo la derivabilità della funzione in $x=0$ e $x=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x-2)}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(3x-2)}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}=\infty$

In entrambi i casi si tratta di punti a tangente verticale. Dobbiamo decidere se si tratta di flessi a tangente verticale o odi cuspidi. Per farlo, studiamo la crescenza della funzione:

$$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}\ge 0$$



Quindi la funzione ha una **cuspide** in $x=0$ ed un punto di **flesso a tangente verticale** in $x=1$. Inoltre, la funzione ha un massimo relativo (non stazionario) nella cuspide ed un minimo stazionario per $x=\frac{2}{3}$.

Più precisamente: MAX $(0,0)$ e MIN $\left(\frac{2}{3},-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

N. 3

La funzione $f(x)=-x^2+\frac{4x^2-x}{x^2-4}$ non può ammettere né asintoti orizzontali né obliqui. Infatti:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x^2+\frac{4x^2-x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty} -x^2+\frac{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty} -x^2+\frac{4-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} -x+\frac{4x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty} -x+\frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty} -x+\frac{4-\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\infty$

Analogamente, anche:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -x^2+\frac{4x^2-x}{x^2-4}=...=-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} -x+\frac{4x-1}{x^2-4}=...=\infty$

La funzione ammette, però, una curva asintotica; osserviamo infatti che:

$$f(x)=-x^2+\frac{4x^2-x}{x^2-4}=-x^2+\frac{4x^2-16+16-x}{x^2-4}=-x^2+\frac{4\left(x^2-4\right)+16-x}{x^2-4}=-x^2+4-\frac{x-16}{x^2-4}$$

ed essendo (com'è facile verificare)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-16}{x^2-4}=0$$

possiamo concludere che la **parabola** di equazione $y=-x^2+4$ è a curva asintotica cercata.

- $f(1)=-1+4-\frac{1-16}{1-4}=3-5=-2 \Rightarrow$ la curva passa per $(1,-2)$
- $f'(x)=-2x-\frac{x^2-4-(x-16)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}$
- $f'(1)=-2\cdot 1-\frac{1-4-(1-16)\cdot 2}{(1-4)^2}=-2-\frac{-3+30}{9}=-2-3=-5 \Rightarrow$ coefficiente angolare tangente: $m=-5$

Retta per P(1,–2):

$$y+2=m(x-1)$$

Per $m=-5$, allora:

$$y+2=-5(x-1) \Leftrightarrow y=-5x+3$$

N. 4

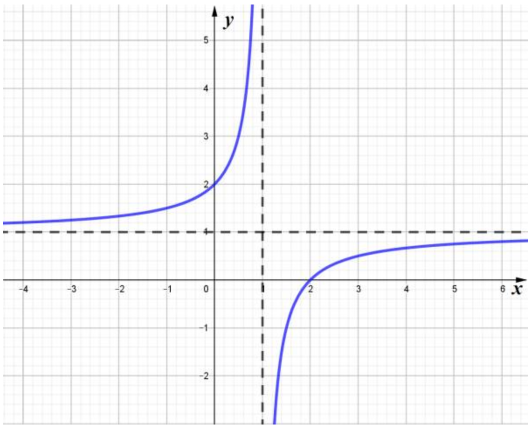
a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{-x}}{x^2-5x+6} =_H \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{2x-5}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{1-x}{2x-5}}_{\downarrow\, -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, +\infty}=-\infty$

b) $\lim_{x\to0^+}\underbrace{x}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\ln(6x)}_{\downarrow\, -\infty}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(6x)}{x^{-1}} =_H \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{6x}\cdot 6}{-x^{-2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot x^2=\lim_{x\to0^+}x=0$

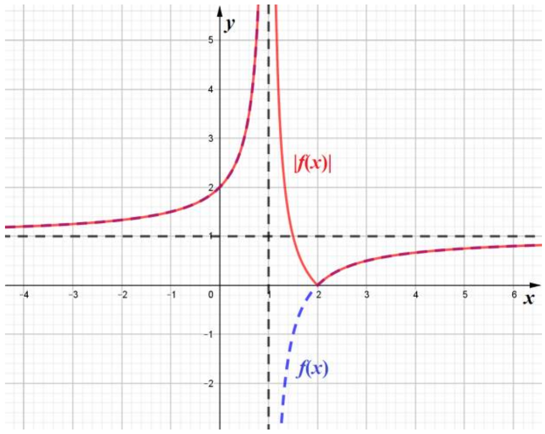
c) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(2x^2+1\right)}{x\left(e^{3x}-1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(2x^2+1\right)}{x^2} \cdot \frac{x}{e^{3x}-1} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(2x^2+1\right)}{2x^2}}_{\downarrow \atop 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{3x}{e^{3x}-1}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ in questo caso non è possibile utilizzare il teorema di de l'Hospital, trattandosi del rapporto tra due limiti notevoli.

N. 5

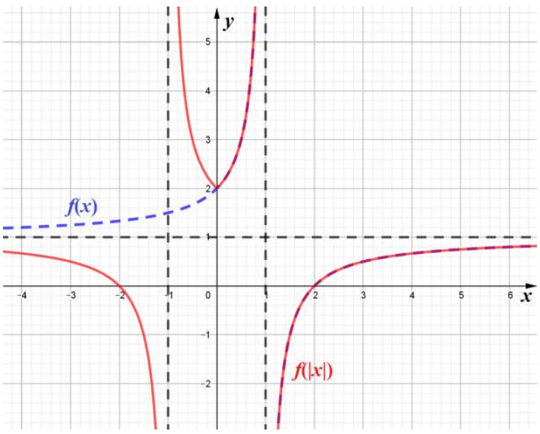
$y = f(x)$



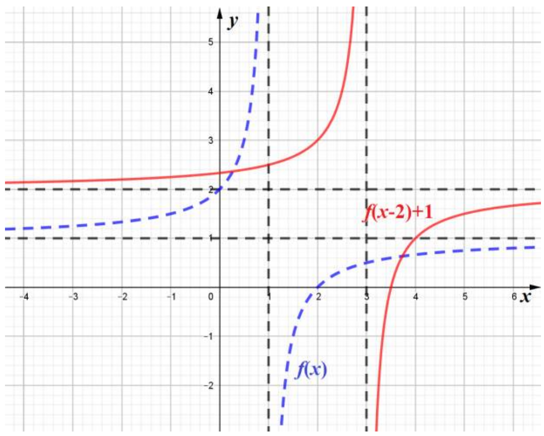
$y = \left|f(x)\right|$



$y = f\left(|x|\right)$



$y = f(x-2)+1$



- La funzione $y = \left|f(x)\right|$ ha un punto angoloso in $x=2$ in quanto la funzione $y = f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=2$. In tal caso, quindi, la funzione $y = \left|f(x)\right|$ avrà, per $x=2$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y = f\left(|x|\right)$ ha un punto angoloso in $x=0$ in quanto la funzione $y = f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=0$. In tal caso, quindi, la funzione $y = f\left(|x|\right)$ avrà, per $x=0$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y = f(x-2)+1$ non ha punti di non derivabilità, in quanto ottenuta da $y = f(x)$ mediante una traslazione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (D)

San Floriano, 14/12/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=6\dfrac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Dire se la funzione $f(x)=-x^2+\dfrac{4x^2+x}{x^2-4}$ può ammettere asintoti orizzontali od obliqui, motivando la risposta; in caso di risposta negativa, determinare l'eventuale funzione asintotica, specificando di che funzione si tratta. Calcolare, inoltre, la tangente al grafico della curva, passante per il suo punto di ascissa – 1.

QUESITO 3 (______/6)

Calcolare i seguenti limiti, specificando quale tra essi non può essere calcolato mediante il Teorema di De l'Hospital:

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot e^{x}}{x^{2}+5x+6}=$ b) $\lim_{x\to0^{+}} x\ln(7x)=$ c) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(5x^{2}+1)}{x(e^{4x}-1)}=$

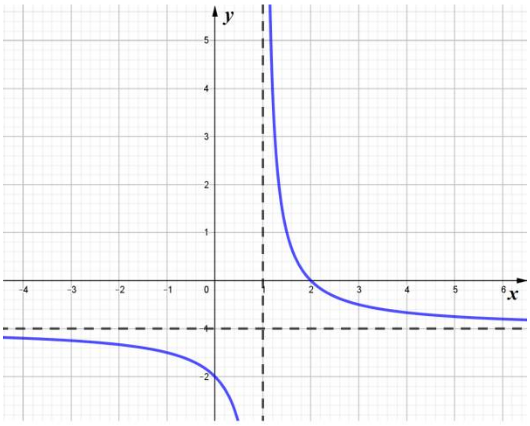
QUESITO 4 (______/6)

Classificare i punti di non derivabilità della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^{3}+x^{2}}$ e calcolarne gli estremi relativi.

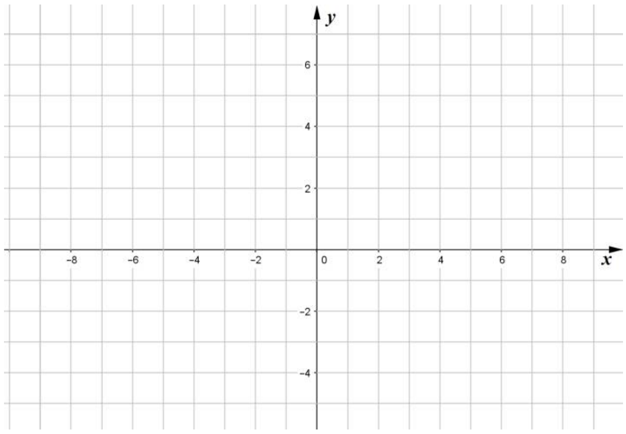
QUESITO 5 (______/6)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni indicate, utilizzando gli spazi a disposizione in questo foglio. Dire inoltre se le funzioni trasformate hanno punti di non derivabilità, motivando la risposta, su foglio a parte.

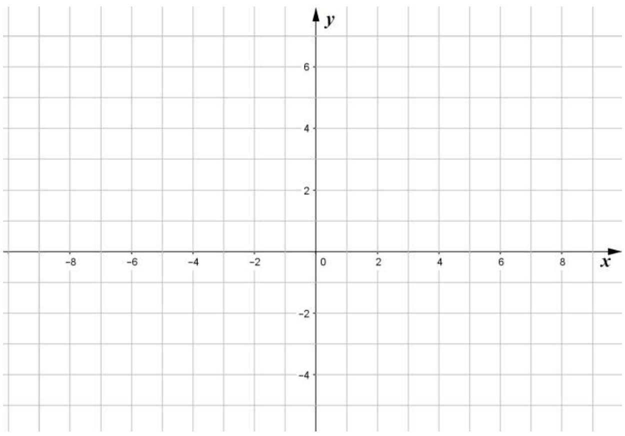
$y=f(x)$



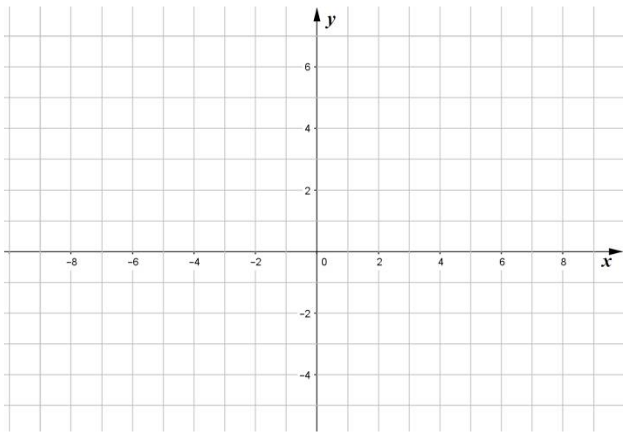
$y=f(x-2)+1$



$y=f(|x|)$



$y=|f(x)|$



Punteggio totale: ____________/30

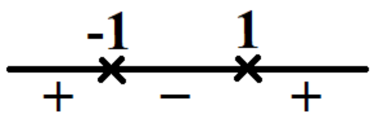
Svolgimento – Fila D

N. 1

$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

- DOMINIO: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$
- PARITÀ: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}=f(x)$ per ogni $x\in D \Rightarrow$ funzione pari (simmetrica rispetto all'asse y)
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

  $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2}{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1>0$ dal momento che

  $x^2+2>0, \forall x\in D \Leftrightarrow x<-1 \vee x>1$

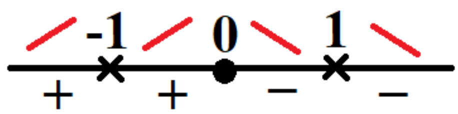
  $f(0)=-2 \Rightarrow$ la funzione taglia l'asse y in $(0,-2)$
- RICERCA DEGLI ASINTOTI:

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1 \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=1$ per $x\to+\infty$; per parità ammette lo stesso asintoto anche per $x\to-\infty$

  $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\overbrace{x^2+2}^{\to3}}{\underbrace{x^2-1}_{\downarrow\, 0^+}}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\overbrace{x^2+2}^{\to3}}{\underbrace{x^2-1}_{\downarrow\, 0^-}}=-\infty \Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto verticale $x=1$; per parità ammette anche l'asintoto verticale $x=-1$

- STUDIO DELLA CRESCENZA:

  $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\ldots=-6\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$ in D

  $(0,-2)$ è punto di massimo (relativo) per la curva

- STUDIO DELLA CONCAVITÀ:

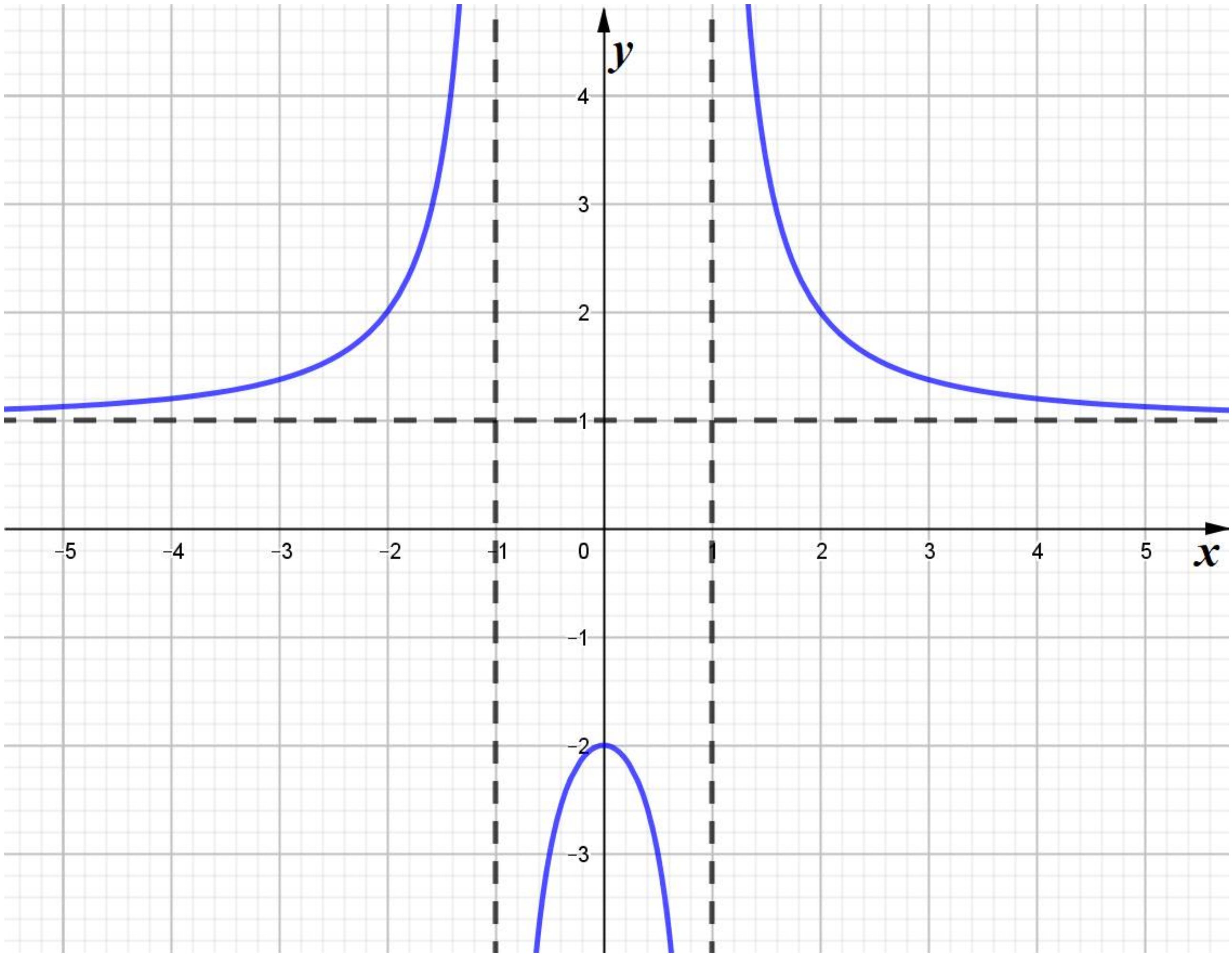
  $f''(x)=-6\dfrac{\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2-1\right)^4}=-6\dfrac{\left(x^2-1\right)-4x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=6\dfrac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}\geq 0$

  Dal momento che $3x^2+1>0, \forall x\in D$, risulta: $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1>0$

  $\Rightarrow$ non vi sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è quindi:



N. 2

La funzione $f(x)=-x^2+\frac{4x^2+x}{x^2-4}$ non può ammettere né asintoti orizzontali né obliqui. Infatti:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+\frac{4x^2+x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{4x+1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{4+\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \infty$

Analogamente, anche:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2+\frac{4x^2+x}{x^2-4} = \ldots = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+\frac{4x+1}{x^2-4} = \ldots = \infty$

La funzione ammette, però, una curva asintotica; osserviamo infatti che:

$$f(x)=-x^2+\frac{4x^2+x}{x^2-4}=-x^2+\frac{4x^2-16+16+x}{x^2-4}=-x^2+\frac{4\left(x^2-4\right)+16+x}{x^2-4}=-x^2+4+\frac{x+16}{x^2-4}$$

ed essendo (com'è facile verificare)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+16}{x^2-4}=0$$

possiamo concludere che la **parabola** di equazione $y=-x^2+4$ è a curva asintotica cercata.

- $f(-1)=-1+4+\dfrac{-1+16}{1-4}=3-5=-2 \Rightarrow$ la curva passa per $(-1,-2)$
- $f'(x)=-2x+\dfrac{x^2-4-(x+16)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$
- $f'(-1)=2+\dfrac{1-4-(-1+16)\cdot(-2)}{(1-4)^2}=2+\dfrac{-3+30}{9}=2+3=5 \Rightarrow$ coefficiente angolare tangente: $m=5$

Retta per P(–1,–2):

$$y+2=m(x+1)$$

Per $m=5$, allora:

$$y+2=5(x+1) \Leftrightarrow y=5x+3$$

N. 3

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^x}{x^2+5x+6} =_H \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+xe^x}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty}\underset{\downarrow \atop \frac{1}{2}}{\underline{\frac{x+1}{2x+5}}}\cdot \underset{\downarrow \atop +\infty}{\underline{e^x}} = +\infty$

b) $\displaystyle \lim_{x\to0^+}\underset{\downarrow \atop 0}{x}\,\underset{\downarrow \atop -\infty}{\underline{\ln(7x)}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(7x)}{x^{-1}} =_H \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{7x}\cdot 7}{-x^{-2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot x^2 = \lim_{x\to0^+} x = 0$

c) $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{\ln(5x^2+1)}{x(e^{4x}-1)} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(5x^2+1)}{x^2}\cdot\frac{x}{e^{4x}-1} = \lim_{x\to0}\underset{\downarrow \atop 1}{\underline{\frac{\ln(5x^2+1)}{5x^2}}}\cdot 5\cdot \underset{\downarrow \atop 1}{\underline{\frac{4x}{e^{4x}-1}}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ in questo caso non è possibile utilizzare il teorema di de l'Hospital, trattandosi del rapporto tra due limiti notevoli.

N. 4

Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ è $D=\mathbb{R}$, perché la radice è di indice dispari.
Calcoliamone la derivata:

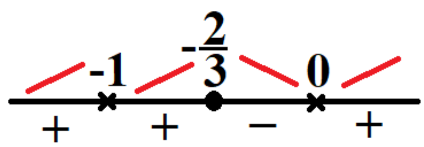
$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}(3x^2+2x)=\frac{x(3x+2)}{3\sqrt[3]{x^4(x+1)^2}}=\frac{x(3x+2)}{3x\sqrt[3]{x(x+1)^2}}=\frac{(3x+2)}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$$

Il dominio della derivata prima è $D_1=\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.
Analizziamo la derivabilità della funzione in $x=0$ e $x=-1$.

- $\displaystyle \lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{(3x+2)}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}=\infty$
- $\displaystyle \lim_{x\to-1}f'(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(3x+2)}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}=\infty$

In entrambi i casi si tratta di punti a tangente verticale. Dobbiamo decidere se si tratta di flessi a tangente verticale o odi cuspidi. Per farlo, studiamo la crescenza della funzione:

$$f'(x)\ge0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\ge0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}}\ge0$$

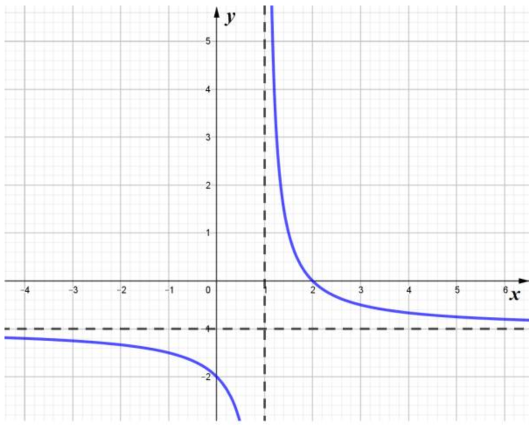


Quindi la funzione ha una **cuspide** in $x=0$ ed un punto di **flesso a tangente verticale** in $x=-1$. Inoltre, la funzione ha un minimo relativo (non stazionario) nella cuspide ed un massimo stazionario per $x=-\frac{2}{3}$.

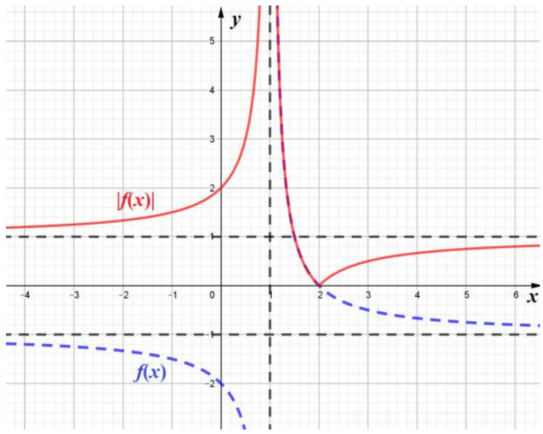
Più precisamente: MIN $(0,0)$ e MAX $\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

N. 5

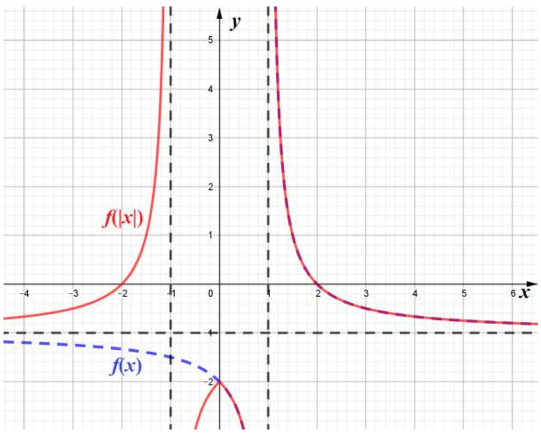
$y=f(x)$



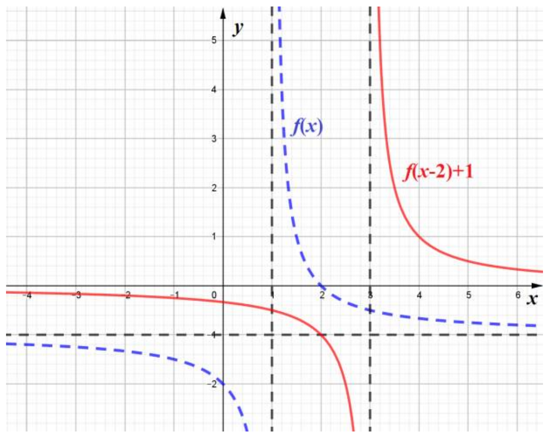
$y=|f(x)|$



$y=f(|x|)$



$y=f(x-2)+1$



- La funzione $y=|f(x)|$ ha un punto angoloso in $x=2$ in quanto la funzione $y=f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=2$. In tal caso, quindi, la funzione $y=|f(x)|$ avrà, per $x=2$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y=f(|x|)$ ha un punto angoloso in $x=0$ in quanto la funzione $y=f(x)$ non ha tangente orizzontale per $x=0$. In tal caso, quindi, la funzione $y=f(|x|)$ avrà, per $x=0$, la tangente destra diversa da quella sinistra.
- La funzione $y=f(x-2)+1$ non ha punti di non derivabilità, in quanto ottenuta da $y=f(x)$ mediante una traslazione.