UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA

San Floriano, 07/09/2018

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi oltre che in ciascun foglio utilizzato.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta della parte A + 3 quesiti a scelta della parte B

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

Svolgere il quesito 1 (studio di funzione) più 2 quesiti a scelta tra i restanti 4.

QUESITO 1 (____/6)

Studiare la funzione $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=\frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (____/5)

Dopo aver verificato che la funzione $f(x)=2x\cdot\ln|x|$ non ammette alcun asintoto, se ne studi la derivabilità.

QUESITO 3 (____/5)

Data la funzione $f(x)=\frac{1}{x}-2$, calcolare l'equazione della retta *r* tangente al grafico nel suo punto di ascissa $x=-1$. Determinare l'equazione dell'ulteriore tangente parallela a *r* e le coordinate del punto di tangenza.

QUESITO 4 (____/5)
Scrivere l'espressione della funzione il cui grafico è il simmetrico di quello di $f(x) = \ln x$ rispetto all'asse x. Verificare che i grafici delle due funzioni si incontrano in un punto dell'asse x e che le loro tangenti in tale punto sono ortogonali.

QUESITO 5 (____/5)
Tra i seguenti limiti, uno non può essere calcolato mediante il Teorema di de l'Hospital. Specificare quale dopo averli calcolati:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x+1} =$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x(e^x-1)} =$ c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+\ln x^3}{x^2} =$

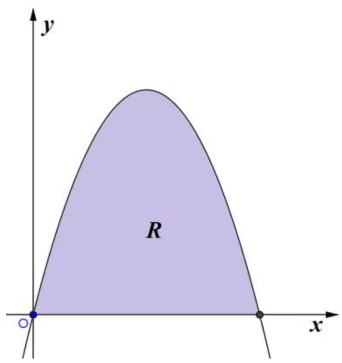
Parte B

QUESITO 6 (_____/5)
Risolvere l'equazione differenziale $y'' - y' - 6y = e^{-x}$

QUESITO 7 (_____/5)
Calcolare la trasposta e il determinante della seguente matrice, dire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESITO 8 (_____/5)
Dopo aver intersecato la parabola di equazione $y = -3x^2 + 6x$ con l'asse x determinare il volume del solido di base R, le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati.
Determinare, inoltre, il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di R attorno all'asse y.



QUESITO 9 (_____/5)
Studiare la convergenza degli integrali impropri:

a) $\int_0^2 \frac{3}{\sqrt[4]{x}} dx$ b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x} dx$

QUESITO 10 (_____/5)
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 7x + 11y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

Punteggio totale: _______/30

Soluzione appello Settembre 2018

N. 1

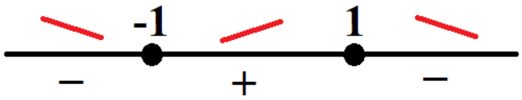
$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R} \Rightarrow$ non vi sono asintoti verticali
- PARITÀ: $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x) \Rightarrow$ funzione dispari; il grafico è simmetrico rispetto all'origine
- SEGNO/INTERSEZIONE CON GLI ASSI: essendo $x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$, risulta $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

  Unica intersezione con gli assi: $O(0,0)$
- ASINTOTI:

  $$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=_H \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0 \Rightarrow y=0$$ asintoto orizzontale
- CRESCENZA:

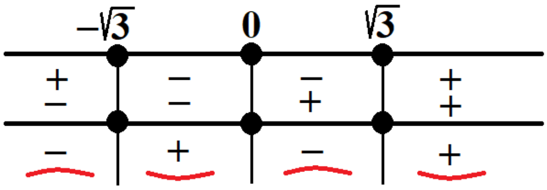
  $$f'(x)=2\cdot\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=2\cdot\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

  $f(1)=\dfrac{1\cdot 2}{1+1}=1 \Rightarrow$ per disparità: Min: $M_1(-1,-1)$ Max: $M_2(1,1)$

- CONCAVITÀ:

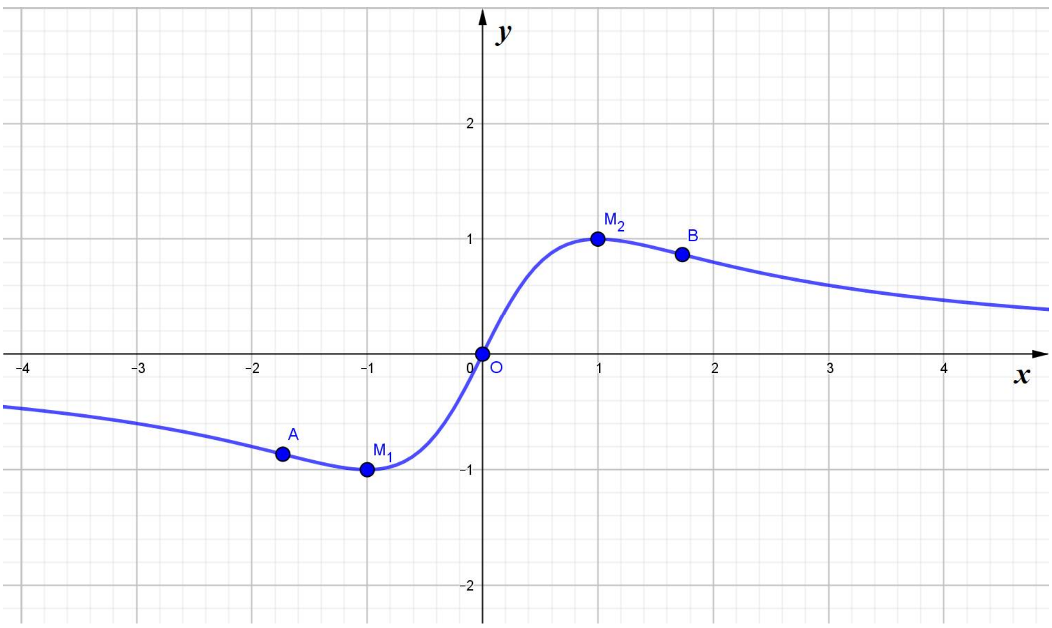
  $$f''(x)=2\cdot\frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=-4x\cdot\frac{(x^2+1)+2(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=4x\cdot\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}\geq 0$$

  $f(\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ per disparità la funzione ammette i seguenti punti di flesso:

  $(0,0)$ $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

GRAFICO:



N. 2

Dominio della funzione $f(x) = 2x \cdot \ln|x|$: $\qquad x \neq 0$

Osserviamo che la funzione è dispari, essendo: $f(-x) = 2(-x) \cdot \ln|-x| = -2x \cdot \ln|x| = -f(x)$

Ricerca degli asintoti per $x > 0$:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln x}{x^{-1}} =_H \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0 \Rightarrow$ per disparità anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ la funzione non ha asintoti verticali

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x \cdot \ln x = +\infty \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti orizzontali (per $x \to +\infty$ ed essendo dispari nemmeno per $x \to -\infty$)

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} 2\ln x = +\infty \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti obliqui (per $x \to +\infty$ ed essendo dispari nemmeno per $x \to -\infty$)

Studio della derivabilità (per $x \geq 0$):

$f(x) = 2x \cdot \ln x$

$f'(x) = 2\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = 2(\ln x + 1)$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(\ln x + 1) = -\infty \Rightarrow$ la funzione non è derivabile per $x \to 0^+$ e, per simmetria, non lo è nemmeno per $x \to 0^-$

N. 3

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x} - 2 = x^{-1} - 2$.

$f(-1) = -1 - 2 = -3 \Rightarrow$ il grafico passa per $(-1,-3)$.

$f'(x) = -x^{-2} \Rightarrow$ La retta tangente cercata ha coefficiente angolare $m = f'(-1) = -1$

Otteniamo pertanto la retta:

$$y + 3 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x - 4$$

Per vedere se esistono altri punti in cui la tangente ha coefficiente angolare $m = -1$ dobbiamo risolvere l'equazione $f'(x) = -1 \Leftrightarrow x^{-2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

L'ulteriore punto di tangenza con una retta parallela a quella trovata ha coordinate $(1,-1)$, come si verifica banalmente.

La nuova tangente ha quindi equazione:

$$y + 1 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x$$

N. 4

Applicando alla curva di equazione $y = \ln x$ la simmetria assiale $\begin{bmatrix} x & \to & x \\ y & \to & -y \end{bmatrix}$ otteniamo $-y = \ln x$.

La funzione cercata è quindi

$$g(x) = -\ln x$$

I grafici di entrambe le funzioni passano per il punto $(1,0)$; infatti $f(1) = \ln 1 = 0$ e $g(1) = -\ln 1 = 0$.

Inoltre:

- $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{1} = 1$
- $g'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{1} = -1$

$\Rightarrow$ le due tangenti sono ortogonali tra loro.

N. 5

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+1} =_H \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x\left(e^x-1\right)} = \lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}}_{\downarrow\atop 1}\cdot\underbrace{\dfrac{x}{e^x-1}}_{\downarrow\atop 1} = 1$. In questo caso il limite non può essere calcolato mediante il Teorema di de l'Hospital dal momento che è ottenuto mediante il prodotto di due limiti notevoli.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+3\ln x}{x^2} =_H \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x^2} = 0$

N. 6

Per risolvere l'equazione differenziale

$$y''-y'-6y=e^{-x} \qquad (*)$$

troviamo dapprima gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\lambda^2-\lambda-6=0 \;\Rightarrow\; \Delta=1+24=25 \Rightarrow \frac{1\pm5}{2}= \begin{matrix}\nearrow 3\\ \searrow -2\end{matrix}$$

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata è:

$$\varphi=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$$

Per trovare l'integrale generale dell'equazione data dobbiamo aggiungere a φ un integrale particolare di tale equazione; lo cerchiamo tra le funzioni del tipo $f(x)=ke^{-x}$, poiché gli zeri del polinomio caratteristico sono diversi da -1.

$$f'(x)=-ke^{-x} \quad \text{e} \quad f''(x)=ke^{-x}$$

Sostituendo nella (*):

$$ke^{-x}+ke^{-x}-6ke^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow -4ke^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è:

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-x}$$

N. 7

La trasposta di $A=\begin{pmatrix}-2&3&0\\1&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ è $A^T=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\3&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Per il Teorema di Laplace, sviluppando il determinante rispetto alla 3° colonna:

$$\det A=\begin{vmatrix}-2&3&0\\1&0&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}-2&3\\1&0\end{vmatrix}=-3\neq0$$

$\Rightarrow$ la matrice è invertibile. Calcoliamone l'inversa:

- $A_{11}=\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}=0$
- $A_{21}=-\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}=-3$
- $A_{31}=\begin{vmatrix}3&0\\0&0\end{vmatrix}=0$
- $A_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=-1$
- $A_{22}=\begin{vmatrix}-2&0\\-1&1\end{vmatrix}=-2$
- $A_{32}=-\begin{vmatrix}-2&0\\1&0\end{vmatrix}=0$
- $A_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1$
- $A_{23}=-\begin{vmatrix}-2&3\\-1&1\end{vmatrix}=-1$
- $A_{33}=\begin{vmatrix}-2&3\\1&0\end{vmatrix}=-3$

Quindi:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

N. 8

Le intersezioni della parabola $y=-3x^2+6x$ con l'asse x sono $(0,0)$ e $(2,0)$, dal momento che $-3x^2+6x=-3x(x-2)$.

Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume del solido di base R, le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono quadrati, è:

$$dV_1=\left(-3x^2+6x\right)^2 dx=9\left(x^2-2x\right)^2 dx$$

Quindi:

$$V_1=9\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2 dx=9\int_0^2 x^4-4x^3+4x^2\ dx=9\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=9\left(\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}\right)=$$

$$=9\cdot 16\left(\frac{2}{5}-1+\frac{2}{3}\right)=\frac{9\cdot 16}{15}=\frac{48}{5}u^3$$

Applicando il metodo dei gusci cilindrici, l'elemento di volume del solido ottenuto da una rotazione completa di R attorno all'asse y è:

$$dV_2=2\pi x\left(-3x^2+6x\right)dx=-6\pi\left(x^3-2x^2\right)dx$$

Quindi:

$$V_2=-6\pi\int_0^2\left(x^3-2x^2\right)dx=-6\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=-6\pi\left(\frac{16}{4}-\frac{2}{3}\cdot 8\right)=8\pi\, u^3$$

N. 9

a) $\int_0^2\frac{3}{\sqrt[4]{x}}dx=\lim_{a\to 0^+}3\int_a^2 x^{-\frac{1}{4}}dx=\lim_{a\to 0^+}3\cdot\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}\right]_a^2=\lim_{a\to 0^+}4\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{a}\right)=4\sqrt[4]{8}\Rightarrow$ l'integrale è convergente.

b) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+3x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{x^2+3x}dx$

Cerchiamo i coefficienti reali che consentono di scrivere:

$$\frac{1}{x^2+3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}=\frac{(A+B)x+3A}{x^2+3x}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}A+B=0\\ 3A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{x^2+3x}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$$

e quindi

$$\int_2^b\frac{1}{x^2+3x}dx=\frac{1}{3}\int_2^b\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{3}\left[\ln|x|-\ln|x+3|\right]_2^b=\frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|\right]_2^b=\frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{b}{b+3}\right|-\ln\frac{2}{5}\right]$$

In conclusione:

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+3x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{x^2+3x}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\left[\ln\left|\underbrace{\frac{b}{b+3}}_{\downarrow\atop 1}\right|-\ln\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{5}{2}$$ $\Rightarrow$ l'integrale è convergente.

N. 10

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 7x+11y+z=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sommando la prima equazione rispettivamente alla 2° ed alla 3° otteniamo:

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y=0 \\ 4x+12y=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ osserviamo che la 2° e la 3° equazione sono multiple una dell'altra; pertanto il sistema ha

∞^1 soluzioni e si riduce a: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x=-\frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}y+y-z=0 \\ x=-\frac{3}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2}y \\ z=-\frac{1}{2}y \end{cases}$

La soluzione generale del sistema è:

$$\left(-\frac{3}{2}y, y, -\frac{1}{2}y\right) \text{ per ogni } y\in\mathbb{R}\,.$$

b) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-z=-1 \\ x+3y=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sottraendo la 1° equazione dalla 2°: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y=-3 \\ x+3y=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sottraendo la 2° equazione dalla 3°:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y=-3 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ x=-11 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7-z=2 \\ x=-11 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=4 \\ z=-9 \end{cases}$$

Soluzione:

$$(-11, 4, -9)$$