- **APPELLO ORDINARIO:** quesiti n. 1 / 2 / 3 / 6 / 7 / 8
- **COMPITINO A:** quesiti n. 1 / 2 / 3 / 4 / 5
- **COMPITINO B:** quesiti n. 6 / 7 / 8 / 9 / 10 / 11 / 12

Testo della prova d'esame – fila A

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=2(x-1)e^{-x}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=(2x-6)e^{-x}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Dopo aver scritto l'equazione della tangente t_k alla curva di equazione $y=\ln 2x$ nel suo punto $P(k;\ln 2k)$, per $k>0$, determinare l'ascissa k del punto P in modo che t_k passi per l'origine. Scrivere l'equazione di tale retta.

QUESITO 3 (_____/6)

Verificare che la funzione $f(x)=e^x+x-2$ è crescente in $\mathbb{R}$ e spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $[0,1]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1}.

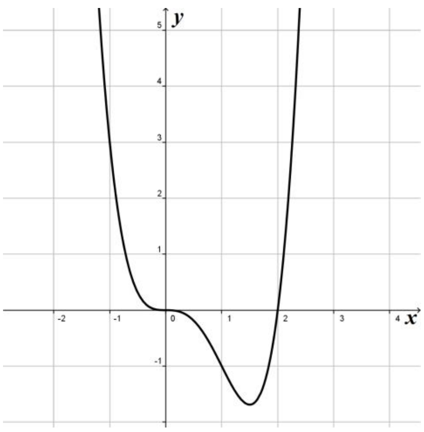
QUESITO 4 (_____/6)

Classificare le discontinuità della funzione $f(x)=\dfrac{x|x-1|}{x^2-1}$ e scrivere le equazioni dei suoi asintoti.

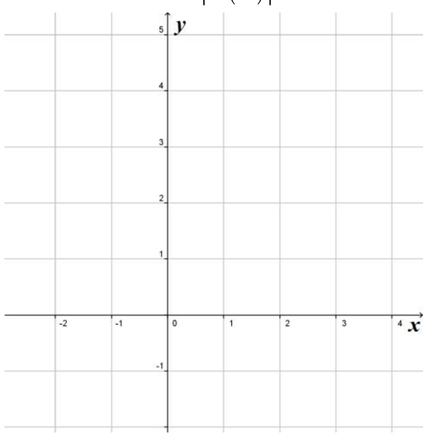
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio.

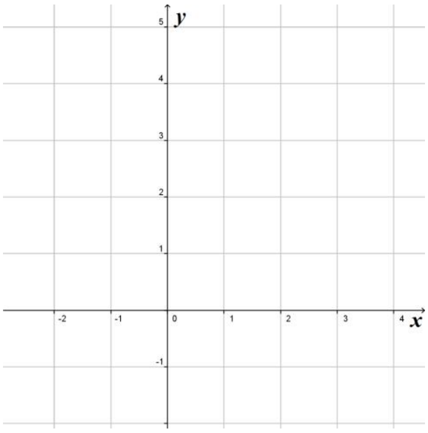
$y=f(x)$



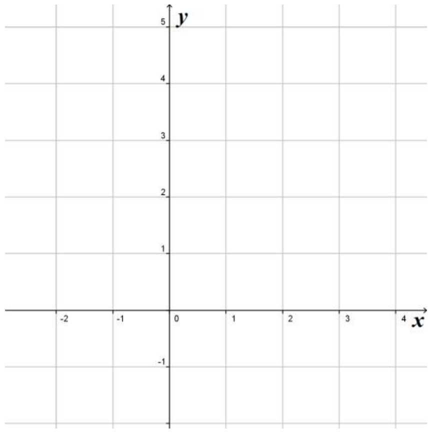
$y=|f(x)|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-2)+1$

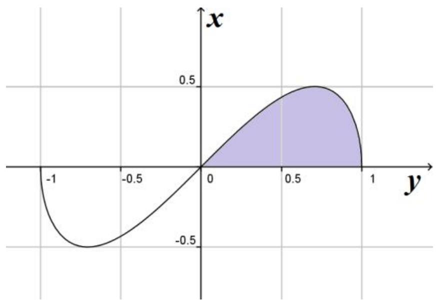


Individuare le ascisse degli eventuali punti angolosi della funzione $y = |f(x)|$ e le equazioni degli eventuali asintoti verticali della funzione $y = \ln|f(x)|$.

QUESITO 6 (_____/4)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

QUESITO 7 (_____/4)



a) Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione, attorno all'asse *x*, della parte di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x\sqrt{1-x^2}$ e contenuta nel 1° quadrante.

b) Studiare la convergenza dell'integrale $\int_0^1 2x \cdot \ln x \, dx$

QUESITO 8 (_____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 9 (_____/4)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' + y' - 6y = e^{2x}$.

QUESITO 10 (_____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases}$

QUESITO 11 (_____/5)

a) Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Sommare la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ alla sua trasposta.

QUESITO 12 (_____/5)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-1}$. Tra le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $(3, -\ln 2)$; calcolare

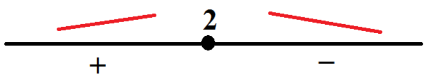
$$\lim_{x\to+\infty} F(x)$$

SOLUZIONE:

N. 1

$f(x) = 2(x-1)e^{-x}$ Dominio: $D = \mathbb{R}$

- PARITÀ: $f(-x) = 2(-x-1)e^{x} \Rightarrow$ né pari, né dispari.
- SEGNO E INTERSEZIONI CON ASSI: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-1)e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
  In particolare, la curva passa per $(1,0)$ e $(0,-2)$
- ASINTOTI:
  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\dfrac{x-1}{e^x} =_H \lim_{x\to+\infty} 2\dfrac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow$ asintoto orizzontale (per $x\to+\infty$): $y=0$
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2(x-1)e^{-x} = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2\dfrac{x-1}{x}e^{-x} = +\infty \Rightarrow$ no asintoti per $x\to-\infty$
- CRESCENZA:
  $f'(x) = 2\left[e^{-x} - e^{-x}(x-1)\right] = \ldots = 2(2-x)e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$
  max: $(2, 2e^{-2})$



- CONCAVITÀ:
  $f''(x) = 2\left[-e^{-x} - e^{-x}(2-x)\right] = \ldots = 2(x-3)e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$
  Flesso: $(3, 4e^{-3})$

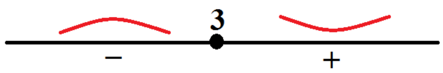
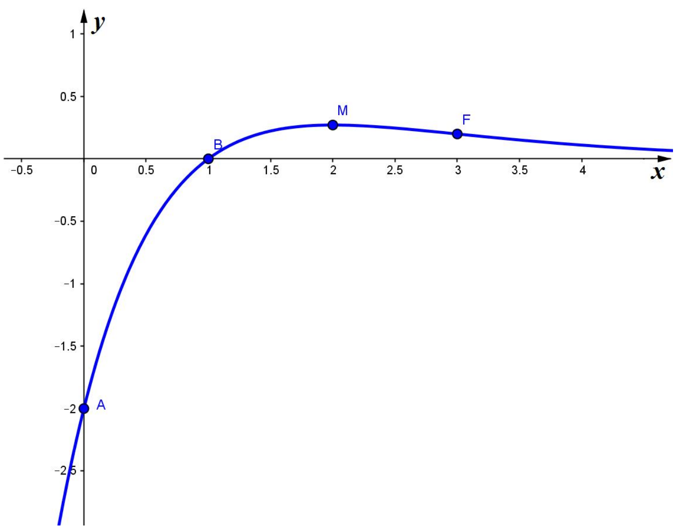


GRAFICO:



N. 2

Calcolo il coefficiente angolare:

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; m = y'(k) = \frac{1}{k}$$

Retta tangente:

$$t_k : y - \ln 2k = \frac{1}{k}(x-k) \;\Leftrightarrow\; y = \ln 2k + \frac{x}{k} - 1$$

Passaggio per O:

$$-\ln 2k = -1 \;\Leftrightarrow\; \ln 2k = 1 \;\Leftrightarrow\; 2k = e \;\Leftrightarrow\; k = \frac{e}{2}$$

La tangente per P ha equazione:

$$y - 1 = \frac{2}{e}x - 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{2}{e}x$$

N. 3

Derivando, otteniamo: $f'(x) = e^x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x)$ crescente in $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ è una corrispondenza biunivoca; se $f(x)$ ammette uno zero, questo è unico.

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, perché somma di funzioni continue; inoltre

$$f(0) = e^0 + 0 - 2 = -1 < 0 \ \text{ e } \ f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$$

Per il Teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette almeno uno zero in $(0,1)$ e, per quanto dimostrato sopra, si tratta dell'unico zero reale.

Approssimazione (mediante il metodo di bisezione):

a	b	f(a)	f(b)	(a+b)/2=c	f(c)	err.
0	1	-1	1,71828	0,5	0,14872	0,5
0	0,5	-1	0,14872	0,25	-0,46597	0,25
0,25	0,5	-0,46597	0,14872	0,375	-0,17001	0,125
0,375	0,5	-0,17001	0,14872	0,4375	-0,01367	0,0625

N. 4

$f(x) = \dfrac{x|x-1|}{x^2-1}$ Dominio: $x \neq \pm 1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x|x-1|}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x}{x+1} = \infty \Rightarrow$ discontinuità 2° specie per $x = -1$ (asintoto verticale)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

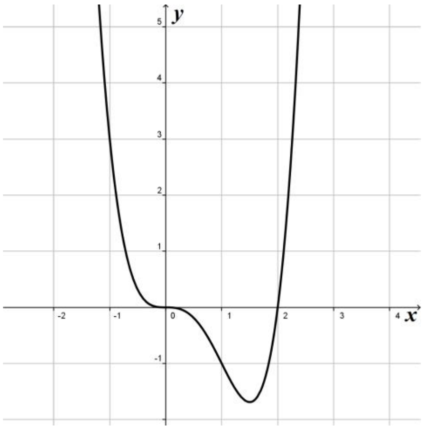
$\Rightarrow$ discontinuità 1° specie per $x = 1$; salto = 1

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \ \text{ e } \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

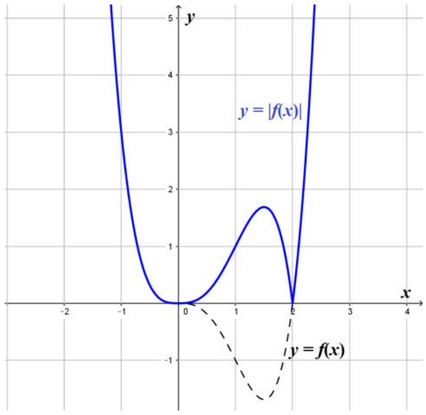
$\Rightarrow$ $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e $y = -1$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

N. 5

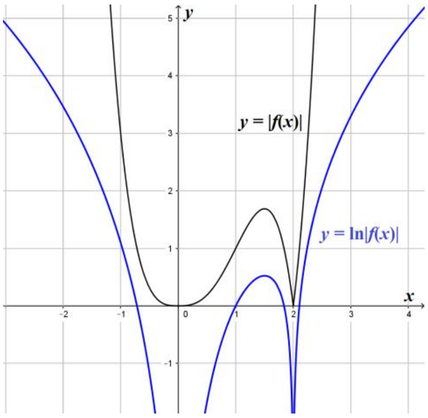
$y = f(x)$



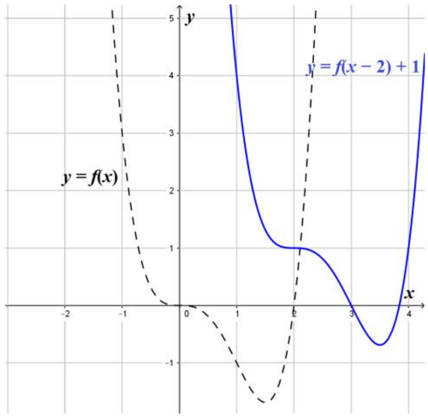
$y = |f(x)|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-2)+1$



- La funzione $y = |f(x)|$ ha un punto angoloso in $x = 2$, ma non in $x = 0$ (dal momento che per $x = 0$ la funzione ha tangente orizzontale)
- La funzione $y = \ln|f(x)|$ ammette come asintoti verticali le rette $x = 0$ e $x = 2$, in corrispondenza egli zeri della funzione data.

N. 6

Separando le variabili otteniamo $\dfrac{dy}{y^2} = dx$ e, integrando membro a membro:

$$-\frac{1}{y} = x + c \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x+c}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$:

$$1 = -\frac{1}{c} \Leftrightarrow c = -1$$

La funzione cercata è:

$$y = -\frac{1}{x-1}$$

N. 7

a) Applicando il metodo delle fette:

$$dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[x^2\left(1-x^2\right)\right]dx = \pi\left(x^2 - x^4\right)dx$$

Integrando:

$$V = \pi\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}u^3$$

b) Per definizione:

$$\int_0^1 2x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+} 2\int_a^1 x\cdot \ln x\,dx$$

Integrando per parti:

$$\int_a^1 x\cdot \ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{a^2}{2}\ln a - \left[\frac{x^2}{4}\right]_a^1 = \ldots = -\frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$\int_0^1 2x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+} 2\int_a^1 x\cdot \ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+} -a^2\ln a + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Essendo:

$$\lim_{a\to 0^+} a^2\ln a = \lim_{a\to 0^+}\frac{\ln a}{a^{-2}} =_H \lim_{a\to 0^+}\frac{\frac{1}{a}}{-2a^{-3}} = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{-2a^{-2}} = \lim_{a\to 0^+} -\frac{a^2}{2} = 0$$

concludiamo:

$$\int_0^1 2x\ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+} -a^2\ln a + \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $-\frac{1}{2}$.

N. 8

Calcoliamo il determinante della matrice, applicando il metodo di Sarrus:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice è invertibile.}$$

Per trovare l'inversa, calcoliamo la matrice cofattore:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi:

$$cofA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N. 9

Prima di risolvere l'equazione non omogenea $y'' + y' - 6y = e^{2x}$, dobbiamo trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + y' - 6y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \frac{-1\pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea; dal momento che e^{2x} è soluzione dell'equazione omogenea, dobbiamo cercare tra le funzioni del tipo $f(x) = kxe^{2x}$, indipendenti dalla precedente.

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = ke^{2x}(2x+1) \quad \text{e} \quad f'(x) = 4ke^{2x}(x+1)$$

Sostituendo:

$$ke^{2x}[4x + 4 + 2x + 1 - 6x] = e^{2x} \Leftrightarrow 5ke^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

La soluzione cercata è:

$$y = e^{2x}\left(c_1 + \frac{1}{5}x\right) + c_2 e^{-3x}$$

N. 10

a) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 4 & -7 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La soluzione è, perciò:

$$(2, -1, 2)$$

b) Risolviamo il sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Il sistema diviene, quindi:

$$\begin{cases} 3x + 5z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

pertanto la soluzione cercata è:

$$\left(-\frac{5}{3}z, \frac{2}{3}z, z\right), \ \forall z \in \mathbb{R}$$

N. 11

a) Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; risulta $rg(A) \le 4$.

Dal momento che la 4° riga è la somma della 2° con la 3°, sicuramente $rg(A) \le 3$.

Consideriamo il minore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante può essere sviluppato secondo la 1° riga con il Teorema di Laplace, ottenendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow rg(A) = 3$

b) La trasposta della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Sommando le due matrici:

$$A+A^T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

N. 12

Calcolando il denominatore comune a secondo membro:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=\frac{(A+B)x-(2B+A)}{x^2-3x+2}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}A+B=0\\A+2B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B\\B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Cerchiamo ora la primitiva della funzione $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$:

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\,dx=\ln|x-2|-\ln|x-1|+c=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+c$$

Condizione di passaggio per $(3,-\ln 2)$:

$$F(3)=\ln\left|\frac{3-2}{3-1}\right|+c=-\ln 2+c=-\ln 2\Rightarrow\ c=0$$

La primitiva cercata è, quindi: $F(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|=\ln 1=0$$

Testo della prova d'esame – fila B

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f\left(x\right)=2\left(x+1\right)e^{x}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''\left(x\right)=\left(2x+6\right)e^{x}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Dopo aver scritto l'equazione della tangente t_k alla curva di equazione $y=\ln 3x$ nel suo punto $P\left(k;\ln 3k\right)$, per $k>0$, determinare l'ascissa k del punto P in modo che t_k passi per l'origine. Scrivere l'equazione di tale retta.

QUESITO 3 (_____/6)

Verificare che la funzione $f\left(x\right)=e^{x}+x-3$ è crescente in $\mathbb{R}$ e spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $\left[0,1\right]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1}.

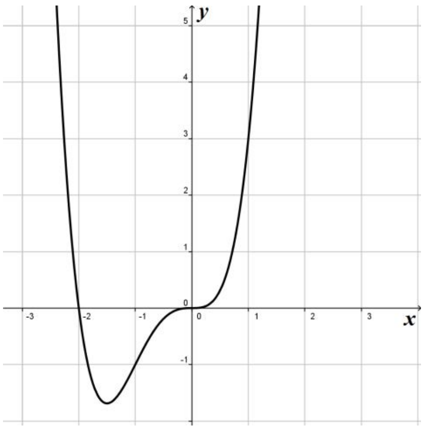
QUESITO 4 (_____/6)

Classificare le discontinuità della funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x\left|x-2\right|}{x^{2}-4}$ e scrivere le equazioni dei suoi asintoti.

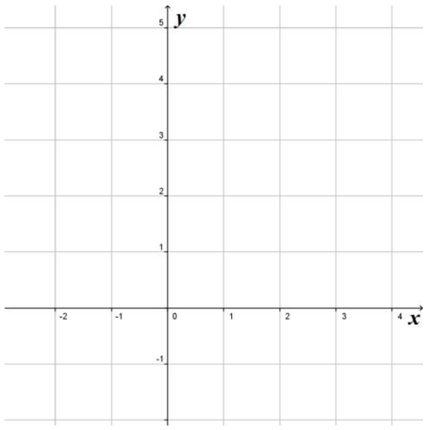
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f\left(x\right)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio.

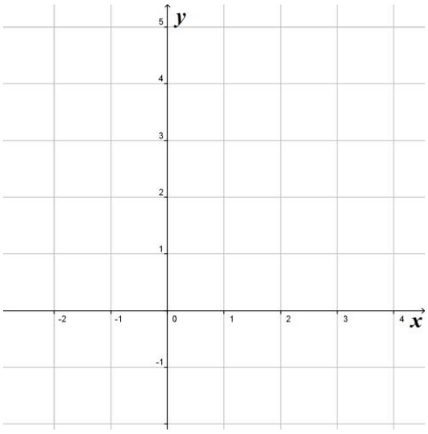
$y=f\left(x\right)$



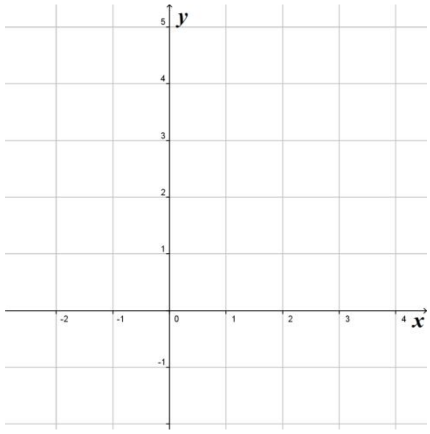
$y=\left|f\left(x\right)\right|$



$y=\ln\left|f\left(x\right)\right|$



$y=f\left(x-2\right)+1$

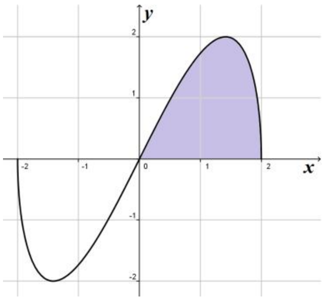


Individuare le ascisse degli eventuali punti angolosi della funzione $y = |f(x)|$ e le equazioni degli eventuali asintoti verticali della funzione $y = \ln|f(x)|$.

QUESITO 6 (_____/4)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$

QUESITO 7 (_____/4)



c) Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione, attorno all'asse *x*, della parte di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x\sqrt{4-x^2}$ e contenuta nel 1° quadrante.

d) Studiare la convergenza dell'integrale $\int_0^1 -3x^2 \cdot \ln x \, dx$

QUESITO 8 (_____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 9 (_____/4)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' + y' - 6y = e^{-3x}$.

QUESITO 10 (_____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

c) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

QUESITO 11 (_____/5)

c) Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Sommare la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ alla sua trasposta.

QUESITO 12 (_____/5)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+1}$. Tra le primitive della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $(-3, \ln 2)$; calcolare

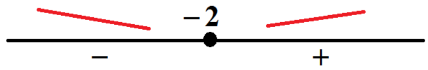
$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

SOLUZIONE:

N. 1

$f(x) = 2(x+1)e^x$ Dominio: $D = \mathbb{R}$

- PARITÀ: $f(-x) = 2(-x+1)e^{-x} \Rightarrow$ né pari, né dispari.
- SEGNO E INTERSEZIONI CON ASSI: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.
  In particolare, la curva passa per $(-1,0)$ e $(0,2)$
- ASINTOTI:
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\dfrac{x+1}{e^{-x}} =_H \lim\limits_{x\to-\infty} 2\dfrac{1}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow$ asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$): $y = 0$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2(x+1)e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{x+1}{x}e^x = +\infty \Rightarrow$ no asintoti per $x \to +\infty$
- CRESCENZA:
  $f'(x) = 2\left[e^x + e^x(x+1)\right] = ... = 2(x+2)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$
  min: $(-2, -2e^{-2})$



- CONCAVITÀ:
  $f''(x) = 2\left[e^x + e^x(2+x)\right] = ... = 2(x+3)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$
  Flesso: $(-3, -4e^{-3})$

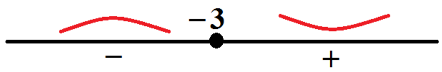
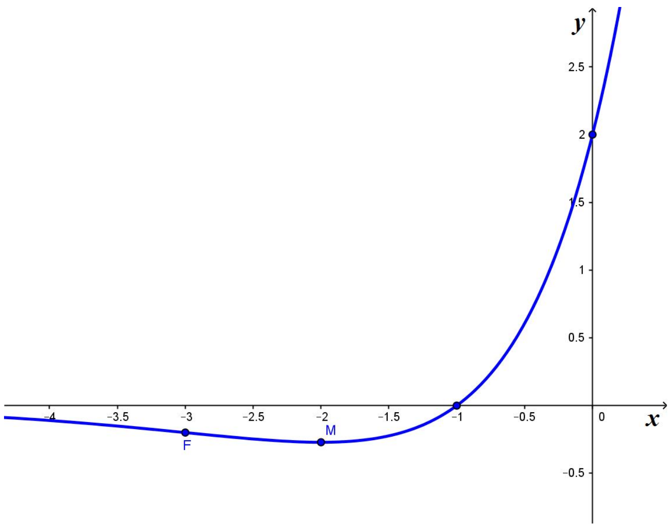


GRAFICO:



N. 2

Calcolo il coefficiente angolare:

$$y' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x} \Rightarrow m = y'(k) = \frac{1}{k}$$

Retta tangente:

$$t_k : y - \ln 3k = \frac{1}{k}(x-k) \Leftrightarrow y = \ln 3k + \frac{x}{k} - 1$$

Passaggio per O:

$$-\ln 3k = -1 \Leftrightarrow \ln 3k = 1 \Leftrightarrow 3k = e \Leftrightarrow k = \frac{e}{3}$$

La tangente per P ha equazione:

$$y - 1 = \frac{3}{e}x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{e}x$$

N. 3

Derivando, otteniamo: $f'(x)=e^x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ crescente in $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ è una corrispondenza biunivoca; se $f(x)$ ammette uno zero, questo è unico.

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, perché somma di funzioni continue; inoltre

$$f(0)=e^0+0-3=-2<0 \text{ e } f(1)=e^1+1-3=e-2>0$$

Per il Teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette almeno uno zero in $(0,1)$ e, per quanto dimostrato sopra, si tratta dell'unico zero reale.

Approssimazione (mediante il metodo di bisezione):

a	b	f(a)	f(b)	(a+b)/2=c	f(c)	err.
0	1	-2	0,71828	0,5	-0,85128	0,5
0,5	1	-0,85128	0,71828	0,75	-0,133	0,25
0,75	1	-0,133	0,71828	0,875	0,27388	0,125
0,75	0,875	-0,133	0,27388	0,8125	0,06603	0,0625

N. 4

$$f(x)=\frac{x|x-2|}{x^2-4}$$ Dominio: $x\neq\pm2$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x|x-2|}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(2-x)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{-x}{x+2}=\infty \Rightarrow$ discontinuità 2° specie per $x=-2$ (asintoto verticale)

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to2^-}\frac{x(2-x)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{-x}{x+2}=-\frac{1}{2}$$

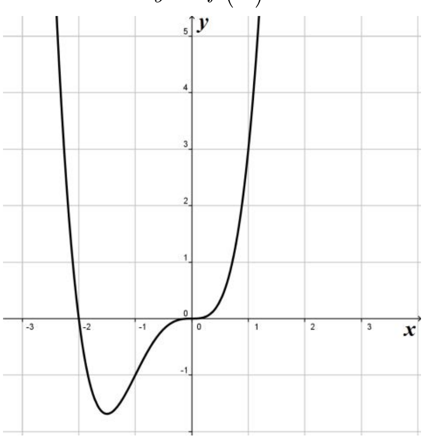
$\Rightarrow$ discontinuità 1° specie per $x=2$; salto = 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}=1 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2-x)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+2}=-1$$

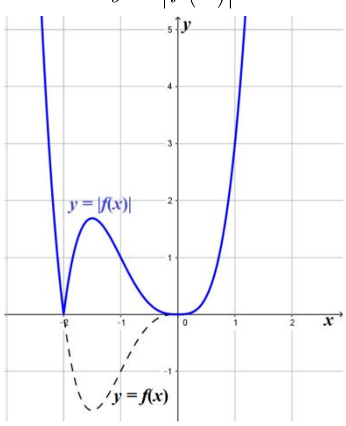
$\Rightarrow$ $y=1$ asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ e $y=-1$ asintoto orizzontale per $x\to-\infty$

N. 5

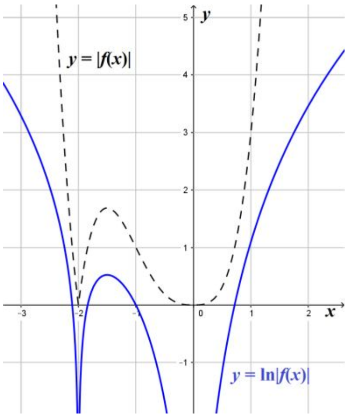
$y=f(x)$



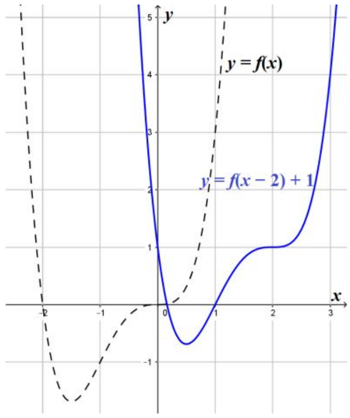
$y=|f(x)|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-2)+1$



- La funzione $y=|f(x)|$ ha un punto angoloso in $x=-2$, ma non in $x=0$ (dal momento che per $x=0$ la funzione ha tangente orizzontale)
- La funzione $y=\ln|f(x)|$ ammette come asintoti verticali le rette $x=0$ e $x=-2$, in corrispondenza egli zeri della funzione data.

N. 6

Separando le variabili otteniamo $-\frac{dy}{y^2}=dx$ e, integrando membro a membro:

$$\frac{1}{y}=x+c \Leftrightarrow y=\frac{1}{x+c}$$

Imponendo la condizione $y(0)=-1$:

$$-1=\frac{1}{c} \Leftrightarrow c=-1$$

La funzione cercata è:

$$y=\frac{1}{x-1}$$

N. 7

c) Applicando il metodo delle fette:

$$dV=\pi\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\left[x^2\left(4-x^2\right)\right]dx=\pi\left(4x^2-x^4\right)dx$$

Integrando:

$$V=\pi\int_0^2 4x^2-x^4dx=\pi\left[4\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=32\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{64\pi}{15}u^3$$

d) Per definizione:

$$\int_0^1 -3x^2\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}-3\int_a^1 x^2\cdot\ln x\,dx$$

Integrando per parti:

$$\int_a^1 -3x^2\cdot\ln x\,dx=\left[-x^3\ln x\right]_a^1-\int_a^1 x^3\cdot\frac{1}{x}dx=-1\cdot\ln 1+a^3\ln a-\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^1=\ldots=a^3\ln a+\frac{1}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Quindi:

$$\int_0^1 -3x^2\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1 -3x^2\cdot\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}a^3\ln a+\frac{1}{3}-\frac{a^3}{3}$$

Essendo:

$$\lim_{a\to0^+}a^3\ln a=\lim_{a\to0^+}\frac{\ln a}{a^{-3}}=_H\lim_{a\to0^+}\frac{\frac{1}{a}}{-3a^{-4}}=\lim_{a\to0^+}\frac{1}{-3a^{-3}}=\lim_{a\to0^+}-\frac{a^3}{3}=0$$

concludiamo:

$$\int_0^1 -3x^2\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}a^3\ln a+\frac{1}{3}-\frac{a^3}{3}=\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $\frac{1}{3}$.

N. 8

Calcoliamo il determinante della matrice, applicando il metodo di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{matrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice è invertibile.}$$

Per trovare l'inversa, calcoliamo la matrice cofattore:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi:

$$cofA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

N. 9

Prima di risolvere l'equazione non omogenea $y'' + y' - 6y = e^{-3x}$, dobbiamo trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + y' - 6y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea; dal momento che e^{-3x} è soluzione dell'equazione omogenea, dobbiamo cercare tra le funzioni del tipo $f(x) = kxe^{-3x}$, indipendenti dalla precedente.

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = ke^{-3x}(-3x+1) \quad \text{e} \quad f'(x) = 3ke^{-3x}(3x-2)$$

Sostituendo:

$$ke^{-3x}[9x - 6 + 1 - 3x - 6x] = e^{-3x} \Leftrightarrow -5ke^{-3x} = e^{-3x} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$$

La soluzione cercata è:

$$y = e^{-3x}\left(c_1 - \frac{1}{5}x\right) + c_2 e^{2x}$$

N. 10

c) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La soluzione è, perciò:

$$(2,-1,2)$$

d) Risolviamo il sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Il sistema diviene, quindi:

$$\begin{cases} x+5z=0 \\ y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5z \\ y=4z \end{cases}$$

pertanto la soluzione cercata è:

$$(-5z,4z,z),\ \forall z \in \mathbb{R}$$

N. 11

c) Consideriamo la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; risulta $rg(A) \le 4$.

Dal momento che la 4° riga è la somma della 2° con la 3°, sicuramente $rg(A) \le 3$.

Consideriamo il minore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante può essere sviluppato secondo la 1° riga con il Teorema di Laplace, ottenendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$\Rightarrow rg(A)=3$

d) La trasposta della matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ è $A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Sommando le due matrici:

$$A+A^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N. 12

Calcolando il denominatore comune a secondo membro:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+(2B+A)}{x^2+3x+2}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Cerchiamo ora la primitiva della funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2} = -\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+1}$:

$$\int f(x)\,dx = \int -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln|x+2| + \ln|x+1| + c = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$$

Condizione di passaggio per $(-3, \ln 2)$:

$$F(-3) = \ln\left|\frac{-3+1}{-3+2}\right| + c = \ln 2 + c = \ln 2 \Rightarrow\ c = 0$$

La primitiva cercata è, quindi: $F(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$. Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| = \ln 1 = 0$$

Testo della prova d'esame – fila C

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x) = 2(1-x)e^x$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x) = -(2x+2)e^x$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

Dopo aver scritto l'equazione della tangente t_k alla curva di equazione $y = \ln 4x$ nel suo punto $P(k;\ln 4k)$, per $k > 0$, determinare l'ascissa k del punto P in modo che t_k passi per l'origine. Scrivere l'equazione di tale retta.

QUESITO 3 (_____/6)

Verificare che la funzione $f(x) = e^x + x - 5$ è crescente in $\mathbb{R}$ e spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $[1,2]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1}.

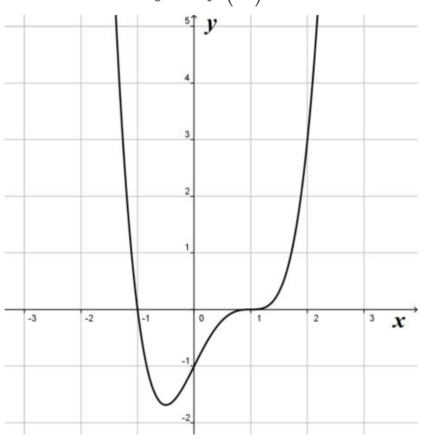
QUESITO 4 (_____/6)

Classificare le discontinuità della funzione $f(x) = \dfrac{x|1-x|}{x^2-1}$ e scrivere le equazioni dei suoi asintoti.

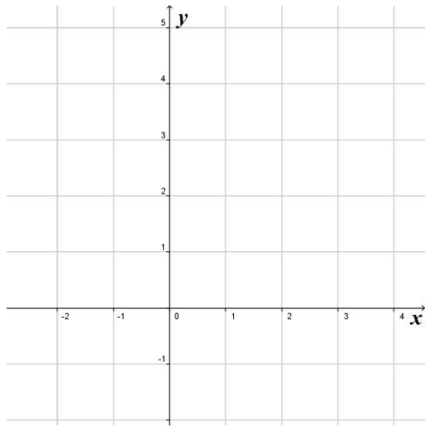
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio.

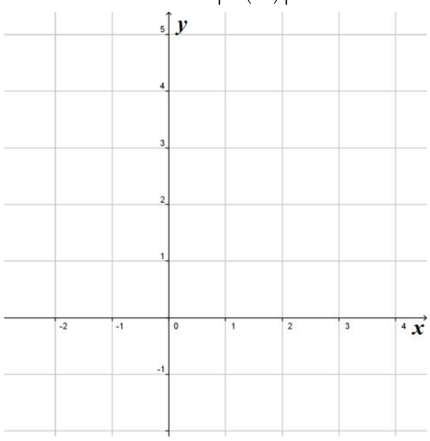
$y = f(x)$



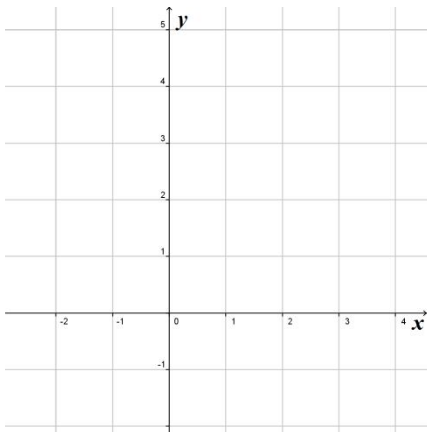
$y = |f(x)|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-2)+1$

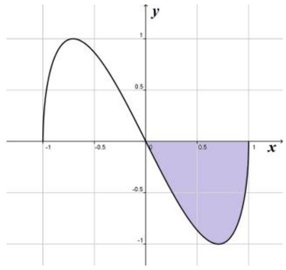


Individuare le ascisse degli eventuali punti angolosi della funzione $y = |f(x)|$ e le equazioni degli eventuali asintoti verticali della funzione $y = \ln|f(x)|$.

QUESITO 6 (_____/4)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - y^2 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

QUESITO 7 (_____/4)



e) Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione, attorno all'asse *x*, della parte di piano delimitata dalla curva di equazione $y = -x\sqrt{1-x^2}$ e contenuta nel 4° quadrante.

f) Studiare la convergenza dell'integrale $\int_0^1 4x \cdot \ln x \, dx$

QUESITO 8 (_____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 9 (_____/4)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' - y' - 6y = e^{-2x}$.

QUESITO 10 (_____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

e) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + 5z = 17 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 5y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

QUESITO 11 (_____/5)

e) Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) Sommare la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ alla sua trasposta.

QUESITO 12 (_____/5)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}$. Tra le primitive della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $\left(1, -\frac{\ln 2}{2}\right)$; calcolare

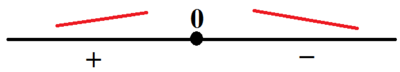
$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

SOLUZIONE:

N. 1

$f(x) = 2(1-x)e^x$ Dominio: $D=\mathbb{R}$

- PARITÀ: $f(-x) = 2(1+x)e^{-x} \Rightarrow$ né pari, né dispari.
- SEGNO E INTERSEZIONI CON ASSI: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(1-x)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.
  In particolare, la curva passa per $(1,0)$ e $(0,2)$
- ASINTOTI:
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\frac{1-x}{e^{-x}} =_H \lim_{x\to-\infty} 2\frac{-1}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow$ asintoto orizzontale (per $x\to-\infty$): $y=0$
  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2(1-x)e^x = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1-x}{x}e^x = -\infty \Rightarrow$ no asintoti per $x\to+\infty$
- CRESCENZA:
  $f'(x) = 2\left[-e^x + e^x(1-x)\right] = -2xe^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$
  min: $(0,2)$



- CONCAVITÀ:
  $f''(x) = -2\left[e^x + e^x x\right] = -2(x+1)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$
  Flesso: $(-1, -4e^{-1})$

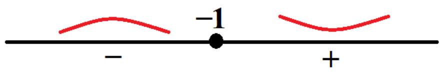
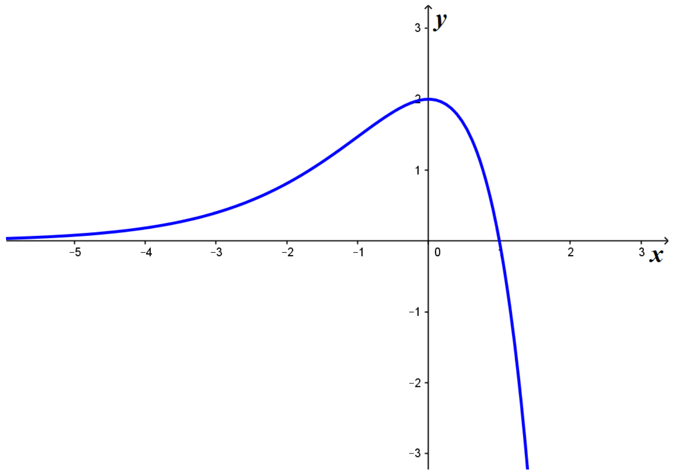


GRAFICO:



N. 2

Calcolo il coefficiente angolare:

$$y' = \frac{1}{4x}\cdot 4 = \frac{1}{x} \Rightarrow m = y'(k) = \frac{1}{k}$$

Retta tangente:

$$t_k : y - \ln 4k = \frac{1}{k}(x-k) \Leftrightarrow y = \ln 4k + \frac{x}{k} - 1$$

Passaggio per O:

$$-\ln 4k = -1 \Leftrightarrow \ln 4k = 1 \Leftrightarrow 4k = e \Leftrightarrow k = \frac{e}{4}$$

La tangente per P ha equazione:

$$y - 1 = \frac{4}{e}x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{4}{e}x$$

N. 3

Derivando, otteniamo: $f'(x) = e^x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ crescente in $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ è una corrispondenza biunivoca; se $f(x)$ ammette uno zero, questo è unico.

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, perché somma di funzioni continue; inoltre

$$f(1) = e^1 + 1 - 5 = e - 4 < 0 \text{ e } f(2) = e^2 + 2 - 5 = e^2 - 3 > 0$$

Per il Teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette almeno uno zero in $(1,2)$ e, per quanto dimostrato sopra, si tratta dell'unico zero reale.

Approssimazione (mediante il metodo di bisezione):

a	b	f(a)	f(b)	(a+b)/2=c	f(c)	err.
1	2	-1,28172	4,38906	1,5	0,98169	0,5
1	1,5	-1,28172	0,98169	1,25	-0,25966	0,25
1,25	1,5	-0,25966	0,98169	1,375	0,33008	0,125
1,25	1,375	-0,25966	0,33008	1,3125	0,02795	0,0625

N. 4

$f(x) = \dfrac{x|1-x|}{x^2 - 1}$ Dominio: $x \neq \pm 1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x|1-x|}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-x}{x+1} = \infty \Rightarrow$ discontinuità 2° specie per $x = -1$ (asintoto verticale)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x|1-x|}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x|1-x|}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-x}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$

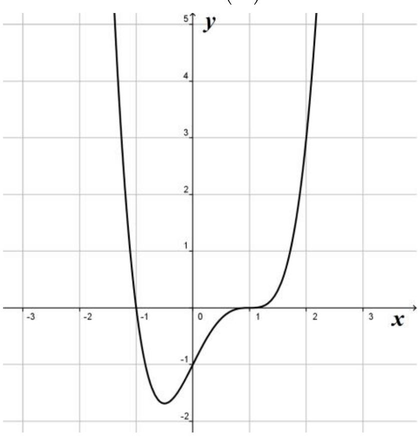
$\Rightarrow$ discontinuità 1° specie per $x = 1$; salto = 1

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ e } \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

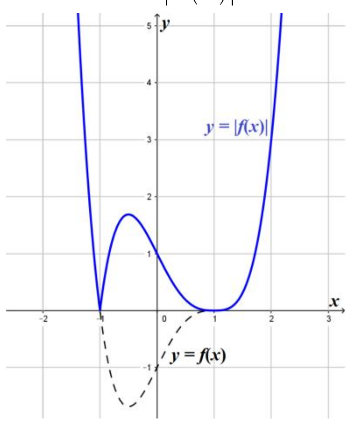
$\Rightarrow y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e $y = -1$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

N. 5

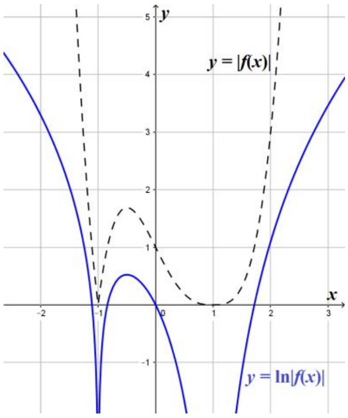
$y = f(x)$



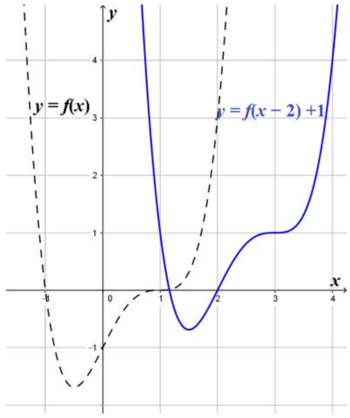
$y = |f(x)|$



$y = \ln\left|f(x)\right|$



$y = f(x-2)+1$



- La funzione $y=\left|f(x)\right|$ ha un punto angoloso in $x=-1$, ma non in $x=1$ (dal momento che per $x=1$ la funzione ha tangente orizzontale)
- La funzione $y=\ln\left|f(x)\right|$ ammette come asintoti verticali le rette $x=1$ e $x=-1$, in corrispondenza degli zeri della funzione data.

N. 6

Separando le variabili otteniamo $\frac{dy}{y^2}=dx$ e, integrando membro a membro:

$$-\frac{1}{y}=x+c \Leftrightarrow y=-\frac{1}{x+c}$$

Imponendo la condizione $y(0)=2$:

$$2=-\frac{1}{c} \Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$$

La funzione cercata è:

$$y=-\frac{2}{2x-1}$$

N. 7

e) Applicando il metodo delle fette:

$$dV=\pi\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\left[x^2\left(1-x^2\right)\right]dx=\pi\left(x^2-x^4\right)dx$$

Integrando:

$$V=\pi\int_0^1 x^2-x^4\,dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\pi}{15}u^3$$

f) Per definizione:

$$\int_0^1 4x\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1 4x\cdot\ln x\,dx$$

Integrando per parti:

$$\int_a^1 4x\cdot\ln x\,dx=\left[2x^2\ln x\right]_a^1-\int_a^1 2x^2\cdot\frac{1}{x}dx=2\cdot\ln 1-2a^2\ln a-\left[x^2\right]_a^1=\ldots=-2a^2\ln a-\left(1-a^2\right)$$

Quindi:

$$\int_0^1 4x\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1 4x\cdot\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}-2a^2\ln a-\left(1-a^2\right)$$

Essendo:

$$\lim_{a\to0^+}a^2\ln a=\lim_{a\to0^+}\frac{\ln a}{a^{-2}}=_H\lim_{a\to0^+}\frac{\frac{1}{a}}{-2a^{-3}}=\lim_{a\to0^+}\frac{1}{-2a^{-2}}=\lim_{a\to0^+}-\frac{a^2}{2}=0$$

concludiamo:

$$\int_0^1 4x\ln x\,dx=\lim_{a\to0^+}-2a^2\ln a-\left(1-a^2\right)=-1$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a -1.

N. 8

Calcoliamo il determinante della matrice, applicando il metodo di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice è invertibile.}$$

Per trovare l'inversa, calcoliamo la matrice cofattore:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi:

$$cofA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N. 9

Prima di risolvere l'equazione non omogenea $y'' - y' - 6y = e^{-2x}$, dobbiamo trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - y' - 6y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea; dal momento che e^{-2x} è soluzione dell'equazione omogenea, dobbiamo cercare tra le funzioni del tipo $f(x) = kxe^{-2x}$, indipendenti dalla precedente.

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = ke^{-3x}(-2x+1) \quad \text{e} \quad f'(x) = 4ke^{-3x}(x-1)$$

Sostituendo:

$$ke^{-2x}[4x - 4 + 1 - 2x - 6x] = e^{-2x} \Leftrightarrow -5ke^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$$

La soluzione cercata è:

$$y = e^{-2x}\left(c_1 - \frac{1}{5}x\right) + c_2 e^{3x}$$

N. 10

e) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + 5z = 17 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La soluzione è, perciò:

$$(2, -1, 2)$$

f) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x+5y-5z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Il sistema diviene, quindi:

$$\begin{cases} 3x+15z=0 \\ y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5z \\ y=4z \end{cases}$$

pertanto la soluzione cercata è:

$$(-5z,4z,z),\ \forall z \in \mathbb{R}$$

N. 11

e) Consideriamo la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; risulta $rg(A)\le 4$.

Dal momento che la 4° riga è la somma della 2° con la 3°, sicuramente $rg(A)\le 3$.
Consideriamo il minore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante può essere sviluppato secondo la 1° riga con il Teorema di Laplace, ottenendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow rg(A)=3$

f) La trasposta della matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ è $A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Sommando le due matrici:

$$A+A^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N. 12

Calcolando il denominatore comune a secondo membro:

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+(3B+A)}{x^2+4x+3}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cerchiamo ora la primitiva della funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right]$:

$$\int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|-\ln|x+3|\right]+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+c$$

Condizione di passaggio per $\left(1,-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$:

$$F(1)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+1}{1+3}\right|+c=-\frac{\ln 2}{2}+c=-\frac{\ln 2}{2}\Rightarrow\ c=0$$

La primitiva cercata è, quindi: $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$. Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|=\frac{1}{2}\ln 1=0$$