## Testo del compitino – fila A

**QUESITO 1 (_____/3)**

Risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = -2xy + 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$

**QUESITO 2 (_____/4)**

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' + y' - 6y = 3x$

**QUESITO 3 (_____/4)**

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{2}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ e studiare la convergenza dell'integrale: $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2+2x}\,dx$

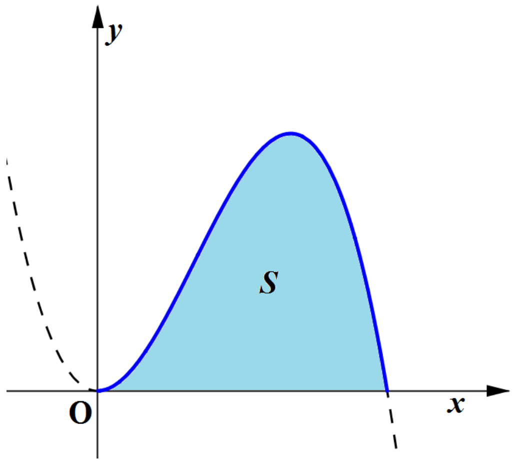
**QUESITO 4 (_____/5)**

Si consideri la superficie S rappresentata in figura a fianco, delimitata dall'asse delle ascisse e dalla funzione

$$f(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x^3$$

Dopo aver determinato le intersezioni della curva con l'asse delle *x* determinare il volume del solido:

a) ottenuto dalla rotazione della rotazione della superficie S attorno all'asse x
b) ottenuto dalla rotazione della rotazione della superficie S attorno all'asse y
c) di base S, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$




**QUESITO 5 (_____/3)**

Ricorrendo ad un'opportuna sostituzione, calcolare l'area sotto il grafico della funzione $f(x) = e^x\sqrt{e^x+2}$, nell'intervallo $[\ln 2, \ln 7]$.

**QUESITO 6 (_____/3)**

Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**QUESITO 7 (_____/4)**

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

**QUESITO 8 (_____/5)**

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 11 \\ 2x + y = 4 \\ 3x - y + 5z = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + y + 3z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 5x + 7y - z = 0 \end{cases}$

**SVOLGIMENTO – A**

**n. 1**

L'equazione $y' = -2xy + 3y$ è a variabili separabili. Infatti si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(3 - 2x\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(3 - 2x\right)dx$$

Integrando membro a membro:

$$\ln\left|y\right| = 3x - x^2 + c$$

e, passando all'esponenziale:

$$\left|y\right| = e^{3x - x^2 + c} = e^c \cdot e^{3x - x^2}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è, quindi, del tipo:

$$y = k \cdot e^{3x - x^2}, k \in \mathbb{R} .$$

La condizione iniziale consente di determinare la costante:

$$y\left(0\right) = 2 \Leftrightarrow ke^0 = 2 \Leftrightarrow k = 2$$

Quindi:

$$y = 2e^{3x - x^2}$$

**n. 2**

Consideriamo l'equazione differenziale $y'' + y' - 6y = 3x$ e la sua *omogenea associata*: $y'' + y' - 6y = 0$ . Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, ed i suoi zeri sono $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix}$ .

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$f\left(x\right) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Ricerca integrale particolare dell'equazione non omogenea; proviamo con un polinomio di 1° grado del tipo:

$$g\left(x\right) = ax + b$$

Derivando otteniamo

$$g'\left(x\right) = a \quad \text{e} \quad g''\left(x\right) = 0$$

Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo la relazione

$$0 + a - 6\left(ax + b\right) = 3x \Leftrightarrow \left(a - 6b\right) - 6ax = 3x$$

che risulta un'identità se e solo se:

$$\begin{cases} a - 6b = 0 \\ -6a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6b \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{12} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'integrale particolare cercato è $g\left(x\right) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$.

Concludendo, la soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$$

**n. 3**

Osserviamo che:

$$\frac{2}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} = \frac{\left(A + B\right)x + 2A}{x^2 + 2x}$$

Affinchè la precedente sia una identità è necessario (e sufficiente) che:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Pertanto abbiamo dimostrato che

$$\frac{2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$$

Consideriamo ora:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{2}{x^2+2x}dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_1^b\frac{2}{x^2+2x}dx=\int_1^b\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}dx=\left[\ln|x|-\ln|x+2|\right]_1^b=\left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_1^b=\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|-\ln\frac{1}{3}=\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|+\ln 3$$

Quindi:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{2}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|+\ln 3=\ln 1+\ln 3=\ln 3$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a ln3.

**n. 4**

Calcoliamo le intersezioni della curva con l'asse *x*:

$$3x^2-\frac{3}{2}x^3=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x^2(2-x)=0\Leftrightarrow x=0,\ x=2$$

a) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV=\pi\left(f(x)\right)^2dx=\frac{9}{4}\pi\left(2x^2-x^3\right)^2dx$$

Integrando nell'intervallo $[0,2]$ otteniamo:

$$V_1=\frac{9}{4}\pi\int_0^2\left(2x^2-x^3\right)^2dx=\frac{9}{4}\pi\int_0^2\left(4x^4-4x^5+x^6\right)dx=\frac{9}{4}\pi\left[\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{6}x^6+\frac{x^7}{7}\right]_0^2=$$

$$=\frac{9}{4}\pi\cdot\left[\frac{4}{5}2^5-\frac{2}{3}2^6+\frac{2^7}{7}\right]=\frac{9}{4}\pi\cdot 128\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=9\pi\cdot 32\cdot\frac{1}{105}=\frac{96}{35}\pi\,u^3$$

b) Applicando il metodo dei gusci cilindrici, l'elemento di volume è

$$dV=2\pi x\cdot f(x)dx=3\pi\left(2x^3-x^4\right)dx$$

Integrando nell'intervallo $[0,2]$ otteniamo:

$$V_2=3\pi\int_0^2\left(2x^3-x^4\right)dx=3\pi\left[\frac{2}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2=3\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{32}{5}\right)=\ldots=\frac{24}{5}\pi\,u^3$$

c) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV=S(x)dx=\frac{3}{2}\left(2x^2-x^3\right)\cdot\frac{e^x}{x^2}dx=\frac{3}{2}(2-x)e^xdx$$

Integrando nell'intervallo $[0,2]$ otteniamo:

$$V_3=\frac{3}{2}\left[\int_0^2(2-x)e^xdx\right]=\frac{3}{2}\left[2\int_0^2e^xdx-\int_0^2x\cdot e^xdx\right]$$

Integrando per parti:

$$\int_0^2x\cdot e^xdx=\left[x\cdot e^x\right]_0^2-\int_0^2e^xdx$$

Quindi:

$$V_3=\frac{3}{2}\left[2\int_0^2e^xdx-\left[x\cdot e^x\right]_0^2+\int_0^2e^xdx\right]=\frac{3}{2}\left[3\int_0^2e^xdx-\left[2e^2-0\right]\right]=\frac{3}{2}\left[3\left[e^x\right]_0^2-2e^2\right]=\ldots=\frac{3}{2}\left(e^2-3\right)u^3$$

**n. 5**

L'area cercata è data dall'integrale: $\int_{\ln 2}^{\ln 7}e^x\sqrt{e^x+2}\,dx$ .

Posto $t=e^x+2$, risulta: $dt=e^xdx$.

Inoltre, se $x=\ln 2$ risulta $t=e^{\ln 2}+2=2+2=4$; se $x=\ln 7$ risulta $t=e^{\ln 7}+2=7+2=9$.

Pertanto:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 7} e^x \sqrt{e^x + 2}\, dx = \int_4^9 \sqrt{t}\, dt = \int_4^9 t^{\frac{1}{2}}\, dt = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}\right] = \frac{2}{3}\left(27 - 8\right) = \frac{38}{3} u^2$$

**n. 6**

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango: $rg\left(A\right) \leq 3$.

Per determinarlo, calcoliamo il determinante del seguente minore, applicando il metodo di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{matrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\left(A\right) = 3$

**n. 7**

Calcoliamo il determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Matrice invertibile.

Calcoliamo la matrice $cofA$:

$A_{11} = \left(-1\right)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = \left(-1\right)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\qquad$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = \left(-1\right)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\Rightarrow cofA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(cofA\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**n. 8**

a) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 11 \\ 2x + y = 4 \\ 3x - y + 5z = 11 \end{cases}$ applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 5 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soluzione: $\left(2, 0, 1\right)$

b) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 7x + y + 3z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 5x + 7y - z = 0 \end{cases}$ applichiamo ancora il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 7 & 11 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 26 & -13 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo, quindi:

$$\begin{cases} 7x + y + 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y + 6y = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 7y = 0 \\ z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 2y \end{cases}$$

Il sistema ha $\infty^1$ soluzioni:

$$\left(-y, y, 2y\right),\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Sono accettabili anche le soluzioni:

$$\left(-\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z\right),\ \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \left(x, -x, -2x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

**Testo del compitino – fila B**

**QUESITO 1 (_____/3)**

Risolvere il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = 2xy - 4y \\ y(0) = -2 \end{cases}$

**QUESITO 2 (_____/4)**

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' + 7y' + 12y = -2x$

**QUESITO 3 (_____/4)**

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$ e studiare la convergenza dell'integrale: $\int_3^{+\infty} \frac{3}{x^2 - 2x} dx$

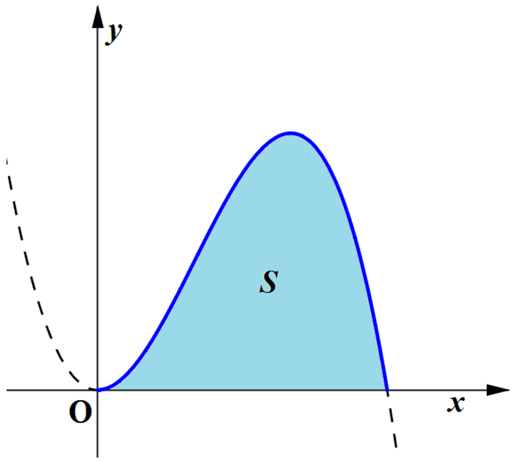
**QUESITO 4 (_____/5)**

Si consideri la superficie S rappresentata in figura a fianco, delimitata dall'asse delle ascisse e dalla funzione

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Dopo aver determinato le intersezioni della curva con l'asse delle *x* determinare il volume del solido:

d) ottenuto dalla rotazione della rotazione della superficie S attorno all'asse x
e) ottenuto dalla rotazione della rotazione della superficie S attorno all'asse y
f) di base S, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$




**QUESITO 5 (_____/3)**

Ricorrendo ad un'opportuna sostituzione, calcolare l'area sotto il grafico della funzione $f(x) = e^x\sqrt{e^x + 3}$, nell'intervallo $[0, \ln 6]$.

**QUESITO 6 (_____/3)**

Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

**QUESITO 7 (_____/4)**

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

**QUESITO 8 (_____/5)**

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

c) $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 11 \\ x + 3y + 5z = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -4x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$

**SVOLGIMENTO - B**

**n. 1**

L'equazione $y' = 2xy - 4y$ è a variabili separabili. Infatti si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = y(2x - 4) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (2x - 4)dx$$

Integrando membro a membro:

$$\ln|y| = x^2 - 4x + c$$

e, passando all'esponenziale:

$$|y| = e^{x^2-4x+c} = e^c \cdot e^{x^2-4x}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è, quindi, del tipo:

$$y = k \cdot e^{x^2-4x}, k \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale consente di determinare la costante:

$$y(0) = -2 \Leftrightarrow ke^0 = -2 \Leftrightarrow k = -2$$

Quindi:

$$y = -2e^{x^2-4x}$$

**n. 2**

Consideriamo l'equazione differenziale $y'' + 7y' + 12y = -2x$ e la sua *omogenea associata*: $y'' + 7y' + 12y = 0$. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0$, ed i suoi zeri sono $\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{smallmatrix} \nearrow -4 \\ \searrow -3 \end{smallmatrix}$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$f(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x}$$

Ricerca integrale particolare dell'equazione non omogenea; proviamo con un polinomio di 1° grado del tipo:

$$g(x) = ax + b$$

Derivando otteniamo

$$g'(x) = a \quad \text{e} \quad g''(x) = 0$$

Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo la relazione

$$0 + 7a + 12(ax + b) = -2x \Leftrightarrow (7a + 12b) + 12ax = -2x$$

che risulta un'identità se e solo se:

$$\begin{cases} 7a + 12b = 0 \\ 12a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{7}{12}a \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{72} \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

L'integrale particolare cercato è $g(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{72}$.

Concludendo, la soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x + \frac{7}{72}$$

**n. 3**

Osserviamo che:

$$\frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A}{x^2 - 2x}$$

Affinchè la precedente sia una identità è necessario (e sufficiente) che:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{3}{2} \\ A = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Pertanto abbiamo dimostrato che

$$\frac{3}{x^2-2x}=-\frac{3}{2x}+\frac{3}{2(x-2)}$$

Consideriamo ora:

$$\int_3^{+\infty}\frac{3}{x^2-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{3}{x^2-2x}dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_3^b\frac{3}{x^2-2x}dx=-\frac{3}{2}\int_3^b\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}dx=-\frac{3}{2}\big[\ln|x|-\ln|x-2|\big]_3^b=\frac{3}{2}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right]_3^b=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\ln\left|\frac{b-2}{b}\right|-\ln\frac{1}{3}\right]=\frac{3}{2}\left[\ln\left|\frac{b-2}{b}\right|+\ln 3\right]$$

Quindi:

$$\int_3^{+\infty}\frac{3}{x^2-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{3}{x^2-2x}dx=\frac{3}{2}\left[\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{b-2}{b}\right|+\ln 3\right]=\frac{3}{2}\big[\ln 1+\ln 3\big]=\frac{3}{2}\ln 3$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $\frac{3}{2}\ln 3$.

**n. 4**

Calcoliamo le intersezioni della curva con l'asse *x*:

$$x^2-\frac{1}{3}x^3=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^2(3-x)=0\Leftrightarrow x=0,\ x=3$$

d) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV=\pi\big(f(x)\big)^2dx=\frac{1}{9}\pi\left(3x^2-x^3\right)^2dx$$

Integrando nell'intervallo $[0,3]$ otteniamo:

$$V_1=\frac{1}{9}\pi\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)^2dx=\frac{1}{9}\pi\int_0^3\left(9x^4-6x^5+x^6\right)dx=\frac{1}{9}\pi\left[\frac{9}{5}x^5-x^6+\frac{x^7}{7}\right]_0^3=$$

$$=\frac{1}{9}\pi\cdot\left[\frac{9}{5}3^5-3^6+\frac{3^7}{7}\right]=\frac{1}{3^2}\pi\cdot 3^7\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=243\pi\cdot\frac{1}{105}=\frac{81}{35}\pi\,u^3$$

e) Applicando il metodo dei gusci cilindrici, l'elemento di volume è

$$dV=2\pi x\cdot f(x)dx=\frac{2\pi}{3}\left(3x^3-x^4\right)dx$$

Integrando nell'intervallo $[0,3]$ otteniamo:

$$V_2=\frac{2\pi}{3}\int_0^3\left(3x^3-x^4\right)dx=\frac{2\pi}{3}\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right]_0^3=\frac{2\pi}{3}\cdot 3^5\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\ldots=\frac{81}{10}\pi\,u^3$$

f) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV=S(x)dx=\frac{1}{3}\left(3x^2-x^3\right)\cdot\frac{e^x}{x^2}dx=\frac{1}{3}(3-x)e^xdx$$

Integrando nell'intervallo $[0,3]$ otteniamo:

$$V_3=\frac{1}{3}\int_0^3(3-x)e^xdx=\int_0^3e^xdx-\frac{1}{3}\int_0^3x\cdot e^xdx$$

Integrando per parti:

$$\int_0^3x\cdot e^xdx=\left[x\cdot e^x\right]_0^3-\int_0^3e^xdx$$

Quindi:

$$V_3=\int_0^3e^xdx-\frac{1}{3}\left[x\cdot e^x\right]_0^3+\frac{1}{3}\int_0^3e^xdx=\frac{4}{3}\int_0^3e^xdx-\frac{1}{3}\left[3e^3-0\right]=\frac{4}{3}\left[e^x\right]_0^3-e^3=\frac{4}{3}e^3-\frac{4}{3}-e^3=\left(\frac{e^3}{3}-\frac{4}{3}\right)u^3$$

**n. 5**

L'area cercata è data dall'integrale: $\int_0^{\ln 6} e^x \sqrt{e^x + 3}\, dx$ .

Posto $t = e^x + 3$, risulta: $dt = e^x dx$ .

Inoltre, se $x = 0$ risulta $t = e^0 + 3 = 4$; se $x = \ln 6$ risulta $t = e^{\ln 6} + 3 = 9$ .

Pertanto:

$$\int_0^{\ln 6} e^x \sqrt{e^x + 3}\, dx = \int_4^9 \sqrt{t}\, dt = \int_4^9 t^{\frac{1}{2}}\, dt = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}\right] = \frac{38}{3} u^2$$

**n. 6**

La matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango: $rg(A) \le 3$ .

Per determinarlo, calcoliamo il determinante del seguente minore, applicando il metodo di Sarrus:

$$\left|\begin{matrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -1 - 4 = -5 \ne 0$$

$\Rightarrow rg(A) = 3$

**n. 7**

Calcoliamo il determinante:

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1 \ne 0$$

$\Rightarrow$ Matrice invertibile.

Calcoliamo la matrice $cofA$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow cofA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}(cofA)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**n. 8**

c) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 11 \\ x + 3y + 5z = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 0 & 5 & 10 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 11 \\ y = 2 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 8 - 8z + 5z = 11 \\ y = 2 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3z = 3 \\ y = 2 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = 2 - 2z \end{cases}$$

Soluzioni:

$$\left(1+z, 2-2z, z\right),\ \forall z \in \mathbb{R}$$

Altre scritture accettabili per le soluzioni:

$$\left(x, 4-2x, x-1\right),\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \left(\frac{4-y}{2}, y, \frac{2-y}{2}\right),\ \forall y \in \mathbb{R}$$

d) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ -4x+5y+2z=0 \end{cases}$ applichiamo ancora il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otteniamo, quindi:

$$\begin{cases} 2x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=2x \end{cases}$$

Il sistema ha $\infty^1$ soluzioni:

$$\left(x, 0, 2x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$$