UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (A)

San Floriano, 20/02/2020

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi oltre che in ciascun foglio utilizzato.

Nome e cognome: _____ Matricola: _____

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta della parte A + 3 quesiti a scelta della parte B

Firma: _____ Numero di fogli consegnati: _____

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: _____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame
Parte A
Svolgere il quesito 1 (studio di funzione) più 2 quesiti a scelta tra i restanti 4.

QUESITO 1 (____/6)
Studiare la funzione $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+3$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, e verificando che ammette un asintoto orizzontale. Dopo aver studiato la monotonia di $f(x)$, se ne trovi il minimo assoluto. Dopo averne studiato la concavità ed averne trovato il flesso, se ne disegni il grafico.

QUESITO 2 (____/5)
Determinare gli asintoti della funzione $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-1}$ dopo averne studiato la parità.

QUESITO 3 (____/5)

Dopo averne determinato il dominio, disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln x$ e della parabola $y = 2 - 2x^2$. Utilizzando i grafici disegnati, determinare le soluzioni della disequazione:

$$\ln x \geq 2\left(1 - x^2\right)$$

QUESITO 4 (____/5)

Dopo 9 ore un campione di Tecnezio-99 si riduce al 35.36% della quantità iniziale; la legge del decadimento radioattivo è del tipo:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{kt},$$

ove il tempo t è misurato in ore (h). Sapendo che la massa iniziale del campione è $80\,g$, determinare:

a) il valore della costante k, approssimato alla 4° cifra decimale;
b) la rapidità di variazione dopo 1 giorno;
c) il tempo di dimezzamento del Tecnezio-99;
d) il tempo necessario perché il campione si riduca a 10 g.

QUESITO 5 (____/5)

Il rapporto tra la biomassa M (in kg di sostanza secca) e diametro alla base D (in cm) per le piante di Eucalipto è descritto dalla relazione allometrica:

$$M = 0.11 \cdot D^{1.846}$$

Stimare:

a) la biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 25 cm;
b) il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 60 kg.

Parte B

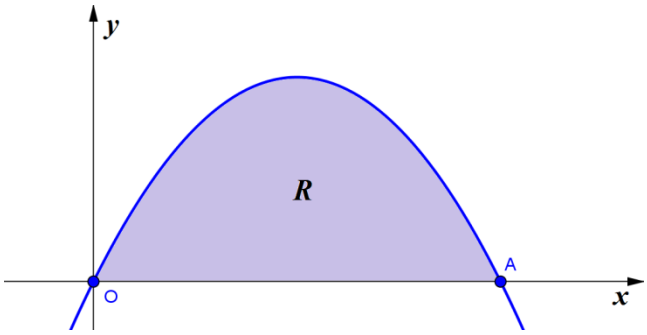
Svolgere 3 quesiti a scelta tra quelli proposti.

QUESITO 6 (____/5)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} -y' = y^2 e^{2x} \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

QUESITO 7 (____/5)

Determinare il volume dei solidi ottenuti da una rotazione della regione R in figura, delimitata dall'asse x e dalla parabola di equazione $y = 2x - x^2$, prima attorno all'asse x e poi attorno all'asse y.



QUESITO 8 (____/5)

a) $\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -x + 3y + z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -2x + 7y + 4z = 0 \\ 8x + 2y - z = 0 \end{cases}$

QUESITO 9 (____/5)

Determinare i parametri reali A, B e C in modo tale che risulti:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

Calcolare il valore dell'integrale:

$$\int_1^2 \frac{x-3}{x^2(x+1)}\,dx$$

QUESITO 10 (____/5)

Una certa specie di trote viene suddivisa in tre classi di età. La matrice di Leslie che descrive la popolazione è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver disegnato il diagramma di vita della popolazione, dire se A è invertibile.

b) In un certo istante t la popolazione è espressa dal vettore $\vec{N}_t = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$. Qual è la composizione $\vec{N}_{t+1}$ della popolazione dopo un intervallo di previsione? Qual era la composizione $\vec{N}_{t-1}$ nell'intervallo di previsione precedente?

PUNTEGGIO TOTALE: ____/30

Traccia sintetica di svolgimento – fila A

N. 1

$f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$

- DOMINIO: $\mathbb{R}$
- PARITÀ: $f(-x) = e^{-2x} - 4e^{-x} + 3 \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- SEGNO: $e^{2x} - 4e^{x} + 3 \geq 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1 \Rightarrow 2 \pm 1 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

Quindi: $e^{x} \leq 1 \ \vee \ e^{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \leq 0 \ \vee \ x \geq \ln 3$

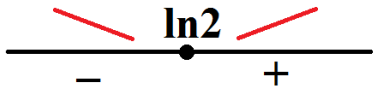
INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $(0,0)$ e $(\ln 3, 0)$

- ASINTOTI:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{e^{2x} - 4e^{x}}_{\downarrow \atop 0} + 3 = 3 \Rightarrow$ asintoto orizzontale $y = 3$ per $x \to -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 4e^{x} + 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\downarrow \atop +\infty} \left(1 \underbrace{- 4e^{-x} + 3e^{-2x}}_{\downarrow \atop 0} \right) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 4e^{x} + 3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} \left(1 \underbrace{- 4e^{-x} + 3e^{-2x}}_{\downarrow \atop 0} \right)$

    Essendo $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} =_{H} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{2x}}{1} = +\infty$, risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti di alcun genere per $x \to +\infty$
- MONOTONIA:

  $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x} = 2e^{x}(e^{x} - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (e^{x} - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

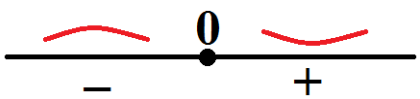
  Minimo assoluto: $f(\ln 2) = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow M(\ln 2, -1)$



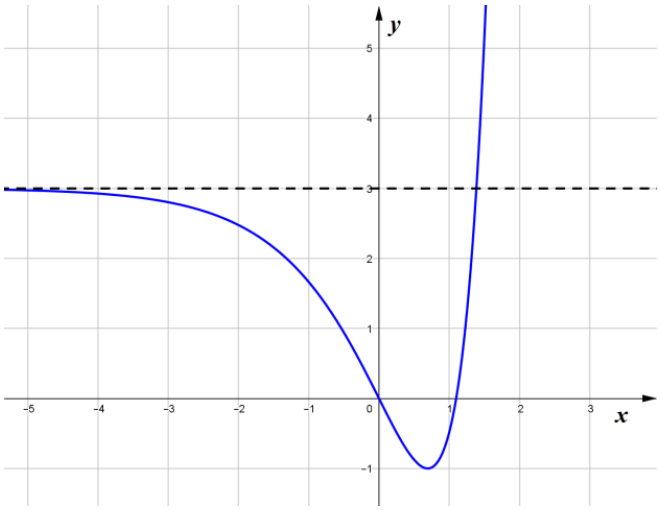
- CONCAVITÀ:

  $f''(x) = 4e^{2x} - 4e^{x} = 4e^{x}(e^{x} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

  Flesso in O



- GRAFICO:



N. 2

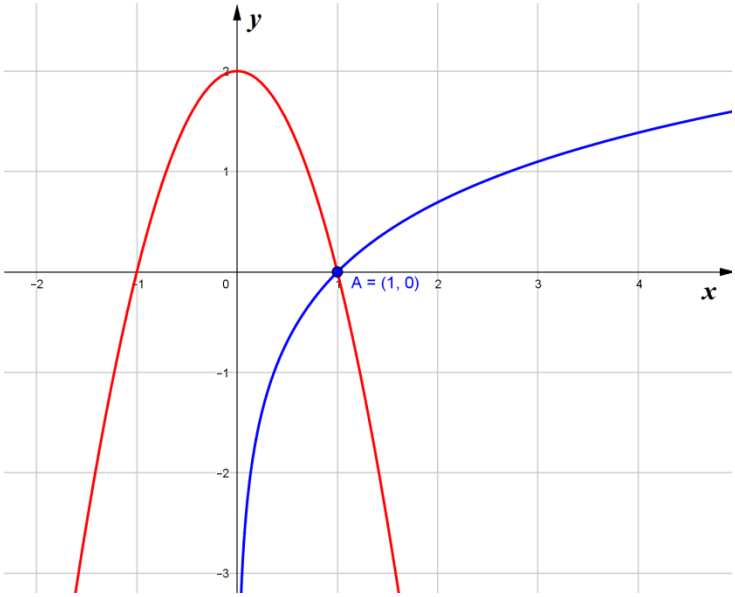
Osserviamo che la funzione $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-1}$ è pari; infatti: $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{|-x|-1}=\dfrac{x^2}{|x|-1}=f(x)$.

Cerchiamo, quindi, gli asintoti per $x>0$ e poi sfruttiamo la simmetria rispetto all'asse *y*.

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}=\infty \Rightarrow x=1$ è asintoto verticale per la funzione; per simmetria anche $x=-1$ è asintoto verticale per la funzione.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=_H \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1}=+\infty \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti orizzontali.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1 \Rightarrow m=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1 \Rightarrow q=1$

CONCLUSIONI:
asintoti verticali: $x=1$ e $x=-1$
asintoti obliqui: $y=x+1$ e $y=-x+1$

N. 3



La parabola taglia l'asse *x* in $A(1,0)$ e $B(-1,0)$. La funzione logaritmica è definita per $x>0$ e taglia l'asse *x* in A. Osservando i grafici notiamo che la parabola giace sopra alla curva logaritmica per $0<x<1$, mentre giace sotto la curva logaritmica per $x>1$. Concludendo, le soluzioni della disequazione data sono:

$$x\geq 1$$

N. 4

a) Risolviamo l'equazione:

$$M(9)=M_0\cdot e^{9k}=0.3536M_0 \Leftrightarrow e^{9k}=0.3536 \Leftrightarrow 9k=\ln 0.3536 \Leftrightarrow$$

$$k=\frac{\ln 0.3536}{9}\simeq -0.1155\,h^{-1}$$

b) $M'(t)=M_0\cdot k\cdot e^{kt}$

$$M'(24) = M_0 \cdot k \cdot e^{k \cdot 24} \simeq -0.578 \frac{g}{h}$$

c) Per trovare il tempo di dimezzamento dobbiamo risolvere l'equazione:

$$M_0 \cdot e^{kt} = \frac{M_0}{2} \Leftrightarrow e^{kt} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow kt = -\ln 2 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 2}{k} \simeq -\frac{\ln 2}{-0.1155} \simeq 6h$$

d) Affinchè il campione si riduca a 10 g:

$$M(t) = 10 \Leftrightarrow 80 \cdot e^{kt} = 10 \Leftrightarrow e^{kt} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow kt = -\ln 8 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 8}{k} \simeq -\frac{3\ln 2}{-0.1155} \simeq 18h$$

N. 5

a) In questo caso: $M = 0.11 \cdot 25^{1.846} = 41.88kg$

b) Dobbiamo risolvere l'equazione: $M = 0.11 \cdot D^{1.846}$

Per farlo, eleviamo ambo i membro a $\frac{1}{1.846}$:

$$M^{\frac{1}{1.846}} = \left(0.11 \cdot D^{1.846}\right)^{\frac{1}{1.846}} \Leftrightarrow M^{\frac{1}{1.846}} = 0.11^{\frac{1}{1.846}} \cdot D^{1.846 \cdot \frac{1}{1846}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D = 0.11^{-\frac{1}{1.846}} \cdot M^{\frac{1}{1.846}} = \left(0.11^{-1} \cdot M\right)^{\frac{1}{1.846}}$$

$$D = \left(0.11^{-1} \cdot 60\right)^{\frac{1}{1.846}} \simeq (545.4545)^{\frac{1}{1.846}} \simeq 30.38cm$$

N. 6

Consideriamo il problema di Cauchy: $\begin{cases} -y' = y^2 e^{2x} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$-y' = y^2 e^{2x} \Leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = y^2 e^{2x} \Leftrightarrow -\frac{dy}{y^2} = e^{2x} dx$$

Integrando otteniamo:

$$\frac{1}{y} = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

In base alle condizioni iniziali otteniamo:

$$2 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

Quindi:

$$\frac{1}{y} = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{e^{2x} + 3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2}{e^{2x} + 3}$$

N. 7

La parabola $y = 2x - x^2$ intercetta l'asse *x* in $(0,0)$ e $(2,0)$ $\Rightarrow$ l'intervallo di integrazione è $[0,2]$.

- Rotazione attorno all'asse *x*:

  per il *metodo delle fette*, l'elemento di volume è $dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx$.

  Quindi:

$$V = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left[\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right] = \frac{16}{15}\pi\, u^3$$

- Rotazione attorno all'asse *y*:
  per il *metodo dei gusci cilindrici*, l'elemento di volume è $dV = 2\pi x f\left(x\right)dx = 2\pi\left(2x^2 - x^3\right)dx$.
  Quindi:

$$V = 2\pi\int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right)dx = 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi\left[\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right] = 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi\, u^3$$

N. 8

a) $\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -x + 3y + z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + \left(1 - y\right) = 7 \\ -x + 3y + \left(1 - y\right) = -2 \\ z = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -x + 2y = -3 \\ z = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow$ sommando

membro a membro le prime due equazioni: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x = 3 \\ z = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 - y = 3 \\ z = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

Soluzione: $\left(1, -1, 2\right)$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -2x + 7y + 4z = 0 \\ 8x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Sommando tra loro la 1° equazione con la 3°:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 0 \\ -2x + 7y + 4z = 0 \\ 8x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -2x - 14x + 4z = 0 \\ 8x - 4x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \\ z = 4x \end{cases}$$

Soluzione: $\left(k, -2k, 4k\right)$, per ogni $k \in \mathbb{R}$

N. 9

Osserviamo che risulta:

$$\frac{x-3}{x^2\left(x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A\left(x^2 + x\right) + B\left(x+1\right) + Cx^2}{x^2\left(x+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(A + C\right)x^2 + \left(A + B\right)x + B}{x^2\left(x+1\right)}$$

se e solo se:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 1 \\ B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -A = -4 \\ A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

Quindi:

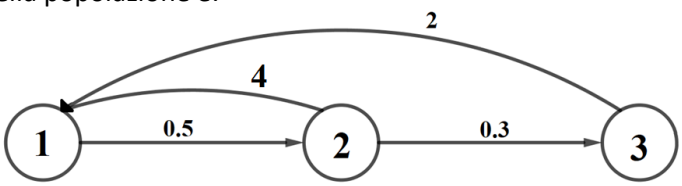
$$\int_1^2 \frac{x-3}{x^2(x+1)}dx = \int_1^2 \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x+1}dx = \left[4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1|\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(4\ln 2 + \frac{3}{2} - 4\ln 3\right) - \left(4\ln 1 + 3 - 4\ln 2\right)\right] = \left[4\ln 2 + \frac{3}{2} - 4\ln 3 - 3 + 4\ln 2\right] =$$

$$= 8\ln 2 - \frac{3}{2} - 4\ln 3 = 4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$$

N. 10

a) Il diagramma di vita della popolazione è:



$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 4 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{matrix} = 0.3 - 0 = 0.3 \neq 0 \Rightarrow$$ la matrice A è invertibile.

b) Per trovare la composizione $\overrightarrow{N}_{t+1}$ della popolazione all'istante $t+1$ è sufficiente applicare la matrice A al vettore $\overrightarrow{N}_t$:

$$\overrightarrow{N}_{t+1} = A\overrightarrow{N}_t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 35 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se invece vogliamo calcolare la composizione della popolazione all'istante $t-1$ dobbiamo risolvere il sistema:

$$A \cdot \overrightarrow{N}_{t-1} = \overrightarrow{N}_t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2z = 70 \\ \frac{x}{2} = 10 \\ \frac{3}{10}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2z = 70 \\ x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \\ 40 + 2z = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \\ z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{N}_{t-1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$