UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (A)

San Floriano, 22/02/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ___________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta della parte A + 3 quesiti a scelta della parte B

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (____/6)
Studiare la funzione $f(x)=2(x+1)e^{-x}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=(2x-2)e^{-x}$ si studi la concavità della funzione e se ne trovino gli eventuali flessi. Disegnare il grafico.

QUESITO 2 (____/5)
Data la funzione $f(x)=\ln(x-1)$ calcolare i valori: $f(2)$, $f'(2)$ e $f''(2)$. Scrivere l'equazione della parabola $\alpha: y=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2}(x-2)^2$ e verificare che la parabola α e la funzione logaritmica hanno la stessa tangente in $A(2,0)$.

QUESITO 3 (____/5)

Classificare le discontinuità della funzione $f(x)=\frac{x|x-1|}{x^2-1}$ e scrivere le equazioni dei suoi asintoti.

QUESITO 4 (____/5)

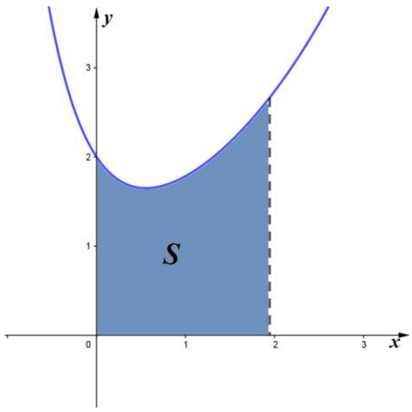
Verificare che la funzione $f(x)=2+\sqrt{|x|}$ non soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-4,4]$ motivando la risposta.

QUESITO 5 (____/5)

Dopo aver verificato che la funzione $f(x)=2^x+2x$ è ovunque crescente, spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $[-1,0]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1}.

Parte B

QUESITO 6 (____/5)



a) Calcolare l'area della regione piana S rappresentata in figura, delimitata dagli assi cartesiani, dalla retta $x=\ln 7$ e dalla curva di equazione $y=e^{-2x}+e^{\frac{x}{2}}$.

b) Determinare il volume del solido di base S, sapendo che le sue sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza

$$h(x)=e^{-\frac{x}{2}}$$

QUESITO 7 (____/5)

Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

QUESITO 8 (____/5)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y''+y'-6y=e^{-x}$.

QUESITO 9 (____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-y+2z=7 \\ x-2y+3z=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \end{cases}$

QUESITO 10 (_____/5)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{2}{x^2+2x}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x}$. Studiare la convergenza dell'integrale $\int_3^{+\infty}\frac{2}{x^2+2x}dx$.

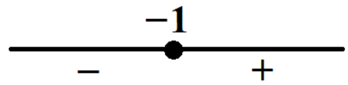
PUNTEGGIO TOTALE: _______/30

FILA A – SVOLGIMENTO SINTETICO

N. 1

$f(x)=2(x+1)e^{-x}$

- Funzione trascendente, prodotto tra un'esponenziale ed una funzione polinomiale; $D=\mathbb{R}$
- $f(-x)=2(-x+1)e^{x} \Rightarrow f(x)$ non è né pari né dispari
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$



$f(0)=2(0+1)e^{0}=2$

$\Rightarrow$ la curva taglia gli assi del riferimento cartesiano in $(-1,0)$ e $(0,2)$

- ASINTOTI:

$$\lim_{x\to-\infty} 2\underbrace{(x+1)}_{-\infty}\underbrace{e^{-x}}_{+\infty}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}2\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{1}\underbrace{e^{-x}}_{+\infty}=+\infty$$

$\Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti per $x\to-\infty$

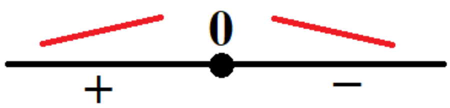
$$\lim_{x\to+\infty}2(x+1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}2\frac{x+1}{e^{x}}=_H\lim_{x\to+\infty}2\cdot\frac{1}{e^{x}}=0$$

$\Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to-\infty$

- CRESCENZA:

$f'(x)=2\left[1\cdot e^{-x}-e^{-x}(x+1)\right]=-2xe^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$

Max per $x=0$, cioè nel punto $(0,2)$



- CONCAVITÀ:

$f''(x)=-2\left[1\cdot e^{-x}-e^{-x}x\right]=2(x-1)e^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

Flesso di ascissa $x=1$

$f(1)=2(1+1)e^{-1}=4e^{-1}\simeq 1.47$

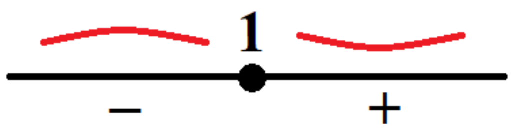
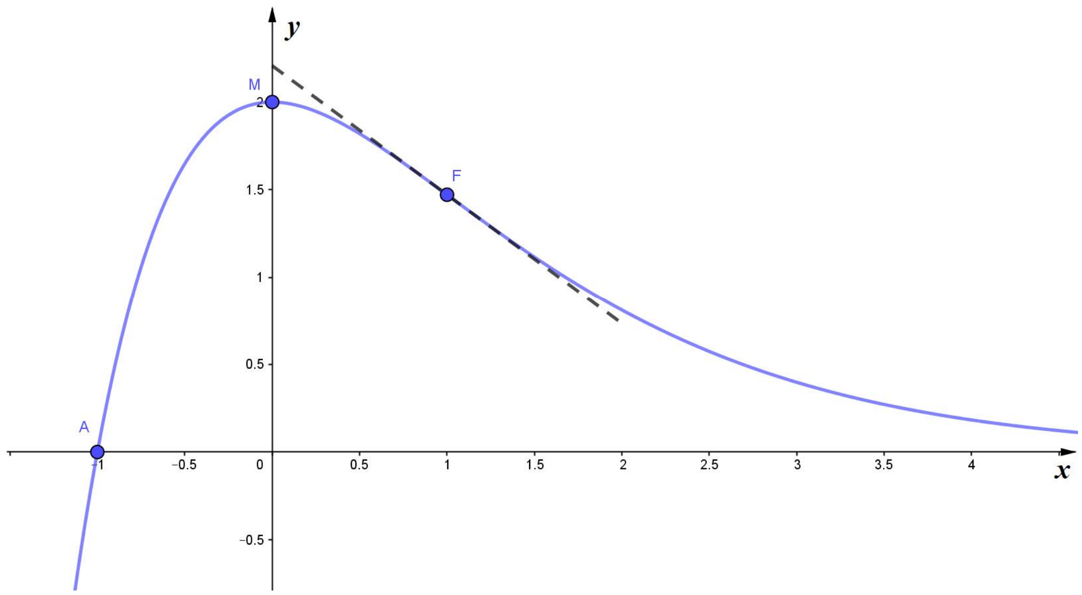


GRAFICO:



N. 2

Essendo $f(x)=\ln(x-1)$ risulta $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ e quindi $f''(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Pertanto:

- $f(2)=\ln(2-1)=\ln 1=0$
- $f'(2)=\dfrac{1}{2-1}=1$
- $f''(2)=-\dfrac{1}{(2-1)^2}=-1$

Otteniamo quindi la parabola:

$$\alpha : y=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2}(x-2)^2=(x-2)-\frac{1}{2}(x-2)^2$$

Sviluppando i calcoli:

$$y=x-2-\frac{1}{2}x^2+2x-2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$$

È immediato verificare che la parabola passa per il punto $(2,0)$; infatti: $y(2)=-2+6-4=0$.

È immediato verificare che pure la funzione logaritmica passa per il punto $(2,0)$; infatti abbiamo verificato che: $f(2)=0$

Calcoliamo ora il coefficiente angolare della tangente alla parabola in $(2,0)$:

$$y'=-x+3 \Rightarrow y'(2)=-2+3=1$$

cioè lo stesso coefficiente angolare della tangente alla funzione logaritmica in tale punto.

$\Rightarrow$ le due curve hanno la stessa tangente in $(2,0)$:

$$y=x-2$$

N. 3

$f(x)=\dfrac{x|x-1|}{x^2-1}$ Dominio: $x\neq \pm 1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x|x-1|}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x}{x+1}=\infty \Rightarrow$ discontinuità 2° specie per $x=-1$ (asintoto verticale)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x|x-1|}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x|x-1|}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ discontinuità 1° specie per $x=1$; salto = 1

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1}=1 \text{ e } \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

$\Rightarrow$ $y=1$ asintoto orizzontale per $x\to +\infty$ e $y=-1$ asintoto orizzontale per $x\to -\infty$

N. 4

La funzione $f(x)=2+\sqrt{|x|}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ in quanto somma tra una funzione costante (e quindi continua in $\mathbb{R}$) e la funzione $\sqrt{|x|}$, composizione tra funzioni continue.

Quindi $f(x)$ è continua in $[-4,4]$.

Inoltre è facile verificare che $f(-4)=2+\sqrt{|-4|}=4=2+\sqrt{|4|}=f(4)$.

Il problema è la derivabilità all'interno dell'intervallo; infatti si può scrivere:

$$f(x)=\begin{cases}2+\sqrt{-x} & x<0\\ 2+\sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$$

e derivando otteniamo:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & x<0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\end{cases}$$

D'altra parte:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$

$\Rightarrow$ la funzione presenta una cuspide in $x=0$

$\Rightarrow$ il Teorema di Rolle non è applicabile per $f(x)$ nell'intervallo $[-4,4]$

N. 5

Consideriamo a funzione $f(x)=2^x+2x$. È derivabile in $\mathbb{R}$ poiché somma di funzioni ivi derivabili.

$f'(x)=2^x\cdot\ln 2+2>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ la funzione è ovunque crescente.

ESISTENZA:

$f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}\Rightarrow$ è continua in $\mathbb{R}$

$f(-1)=2^{-1}-2=-\dfrac{3}{2}<0$

$f(0)=2^0+0=1>0$

$\Rightarrow$ per il teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette uno zero nell'intervallo dato.

UNICITÀ:

$f(x)$ è crescente in $\mathbb{R}\Rightarrow$ è invertibile in $\mathbb{R}\Rightarrow$ lo zero è unico

a	b	f(a)	f(b)	m=(a+b)/2	f(m)	Δ
-1	0	-1,5	1	-0,5	-0,29289	0,5
-0,5	0	-0,29289	1	-0,25	0,340896	0,25
-0,5	-0,25	-0,29289	0,340896	-0,375	0,021105	0,125
-0,5	-0,375	-0,29289	0,021105	$\boxed{-0,4375}$	-0,13659	0,0625

Lo zero cercato è:

$$\alpha\simeq -0.44$$

N. 6

a) L'area richiesta è data dall'integrale:

$$\int_0^{\ln 7} e^{-2x}+e^{\frac{x}{2}}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}+2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{\ln 7}=\left[-\frac{1}{2}\left(e^{\ln 7}\right)^{-2}+2\left(e^{\ln 7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[-\frac{1}{2}+2\right]=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}+2\sqrt{7}\right]-\left[-\frac{1}{2}+2\right]=$$

$$=-\frac{1}{98}+2\sqrt{7}-\frac{3}{2}=\left(2\sqrt{7}-\frac{74}{49}\right)u^2$$

b) Utilizziamo il metodo delle fette. Il volume elementare vale:

$$dV=S(x)dx=e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{-2x}+e^{\frac{x}{2}}\right)dx=\left(e^{-\frac{5}{2}x}+1\right)dx$$

Integrando otteniamo:

$$V=\int_0^{\ln 7} e^{-\frac{5}{2}x}+1\,dx=\left[x-\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}x}\right]_0^{\ln 7}=\left[\left(\ln 7-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{7^5}}\right)-\left(0-\frac{2}{5}\right)\right]=\left[\ln 7-\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{7}}{343}-1\right)\right]u^3$$

N. 7

Possiamo osservare che, sommando la 2° e la 3° riga della matrice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{2}\\ 2 & 0 & -1 & \sqrt{2}\\ 2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

otteniamo la 4° riga. Pertanto il rango della matrice è sicuramente inferiore a 4.

Osserviamo, inoltre, che sviluppando il determinante della sottomatrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

secondo la 1° riga otteniamo:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$\Rightarrow\ rg(A)=3$

N. 8

Risolviamo $y''+y'-6y=e^{-x}$.

1° STEP:

Risolviamo l'equazione omogenea associata $y''+y'-6y=0$.

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

Gli zeri sono:

$$\Delta=1+24=25\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{matrix}\nearrow 2\\ \searrow -3\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$$

2° STEP:

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione data. Dal momento che il termine di perturbazione è una funzione esponenziale, proviamo con una funzione esponenziale dello stesso tipo: $\psi=k\cdot e^{-x}$.

Derivando otteniamo:

- $\psi'=-ke^{-x}$
- $\psi''=ke^{-x}$

Sostituendo:

$$ke^{-x}-ke^{-x}-6ke^{-x}=e^{-x}\Leftrightarrow -6ke^{-x}=e^{-x}\Leftrightarrow -6k=1\Leftrightarrow k=-\frac{1}{6}$$

L'integrale particolare è:

$$\psi=-\frac{1}{6}e^{-x}$$

3° STEP:

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y=\varphi+\psi=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-x}$$

N. 9

a) Risolviamo il sistema $\begin{cases}3x+y-2z=1\\x-y+2z=7\\x-2y+3z=10\end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-2&1\\1&-1&2&7\\1&-2&3&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-2&1\\1&-1&2&7\\0&1&-1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-2&1\\0&4&-8&-20\\0&1&-1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-2&1\\0&1&-2&-5\\0&1&-1&-3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&0&6\\0&1&-2&-5\\0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

La soluzione è, perciò:

$$(2,-1,2)$$

b) Risolviamo il sistema $\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y-3z=0\\2x+3y-2z=0\end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-4\end{pmatrix}$$

Il sistema diviene, quindi:

$$\begin{cases}x+5z=0\\y-4z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5z\\y=4z\end{cases}$$

pertanto la soluzione cercata è:

$$(-5z,4z,z),\ \forall z\in\mathbb{R}$$

N. 10

Cerchiamo le costanti richieste:

$$\frac{2}{x^2+2x}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+Bx+2B}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2B}{x^2+2x}$$

Per il principio di identità dei polinomi, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases}A+B=0\\2B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\end{cases}$$

Abbiamo ottenuto, quindi:

$$\frac{2}{x^2+2x}=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}$$

Studiamo ora la convergenza dell'integrale:

$$\int_3^{+\infty}\frac{2}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{2}{x^2+2x}dx$$

Calcoliamo innanzitutto:

$$\int_3^b\frac{2}{x^2+2x}dx=\int_3^b\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}dx=\Big[\ln|x|-\ln|x+2|\Big]_3^b=\left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_3^b=$$

$$=\left[\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|-\ln\left|\frac{3}{3+2}\right|\right]=\left[\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|-\ln\left|\frac{3}{5}\right|\right]=\ln\left|\frac{5}{3}\cdot\frac{b}{b+2}\right|$$

Pertanto:

$$\int_3^{+\infty}\frac{2}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{2}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{5}{3}\cdot\frac{b}{b+2}\right|=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

L'integrale dato converge a $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (B)

San Floriano, 22/02/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ______________________________ Matricola: ________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta della parte A + 3 quesiti a scelta della parte B

Firma: ______________________________________ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (____/6)
Studiare la funzione $f(x)=2(1-x)e^x$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=-(2x+2)e^x$ si studi la concavità della funzione e se ne trovino gli eventuali flessi. Disegnare il grafico.

QUESITO 2 (____/5)
Data la funzione $f(x)=\ln(x-3)$ calcolare i valori: $f(4)$, $f'(4)$ e $f''(4)$. Scrivere l'equazione della parabola $\alpha: y=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2}(x-4)^2$ e verificare che la parabola α e la funzione logaritmica hanno la stessa tangente in $A(4,0)$.

QUESITO 3 (____/5)

Classificare le discontinuità della funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x\left|x-2\right|}{x^2-4}$ e scrivere le equazioni dei suoi asintoti.

QUESITO 4 (____/5)

Verificare che la funzione $f(x)=-2+\sqrt{|x|}$ non soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $\left[-9,9\right]$ motivando la risposta.

QUESITO 5 (____/5)

Dopo aver verificato che la funzione $f\left(x\right)=3^x+3x$ è ovunque crescente, spiegare perché essa ammette un unico zero nell'intervallo $\left[-1,0\right]$. Utilizzando il metodo di bisezione, stimare il valore dello zero della funzione con approssimazione 10^{-1}.

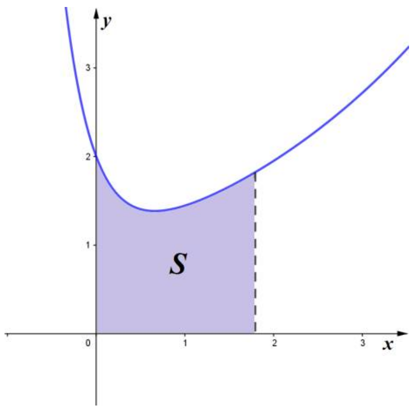
Parte B

QUESITO 6 (____/5)

a) Calcolare l'area della regione piana S rappresentata in figura, delimitata dagli assi cartesiani, dalla retta $x=\ln 6$ e dalla curva di equazione $y=e^{-3x}+e^{\frac{x}{3}}$.

b) Determinare il volume del solido di base S, sapendo che le sue sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza

$$h\left(x\right)=e^{-\frac{x}{3}}$$



QUESITO 7 (____/5)

Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \pi \\ 1 & 0 & 1 & -\pi \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

QUESITO 8 (____/5)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y''-y'-6y=e^{-x}$.

QUESITO 9 (____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-y+2z=7 \\ 2x-3y+5z=17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+5y-5z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \end{cases}$

QUESITO 10 (_____/5)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{2}{x^2-2x}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}$. Studiare la convergenza dell'integrale $\int_3^{+\infty}\frac{2}{x^2-2x}\,dx$.

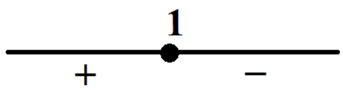
PUNTEGGIO TOTALE: _______/30

FILA B – SVOLGIMENTO SINTETICO

N. 1

$f(x)=2(1-x)e^{x}$

- Funzione trascendente, prodotto tra un'esponenziale ed una funzione polinomiale; $D=\mathbb{R}$
- $f(-x)=2(x+1)e^{-x} \Rightarrow f(x)$ non è né pari né dispari
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$



  $f(0)=2(1-0)e^{0}=2$

  $\Rightarrow$ la curva taglia gli assi del riferimento cartesiano in $(1,0)$ e $(0,2)$
- ASINTOTI:

  $$\lim_{x\to-\infty} 2\underbrace{(1-x)}_{\downarrow \atop +\infty}\underbrace{e^{x}}_{\downarrow \atop 0} = \lim_{x\to-\infty} 2\frac{1-x}{e^{-x}} =_H \lim_{x\to-\infty} 2\frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x}=0$$

  $\Rightarrow$ la funzione ammette l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x\to-\infty$

  $$\lim_{x\to+\infty} 2\underbrace{(x+1)}_{\downarrow \atop +\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow \atop +\infty}=+\infty$$

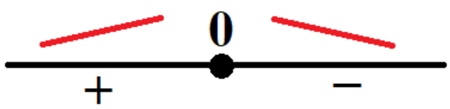
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\downarrow \atop -1}\underbrace{e^{x}}_{\downarrow \atop +\infty}=-\infty$$

  $\Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti per $x\to+\infty$

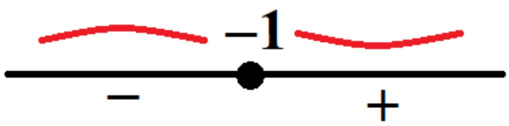
- CRESCENZA:

  $f'(x)=2\left[-1\cdot e^{x}+e^{x}(1-x)\right]=-2xe^{x}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$

  Max per $x=0$, cioè nel punto $(0,2)$



- CONCAVITÀ:

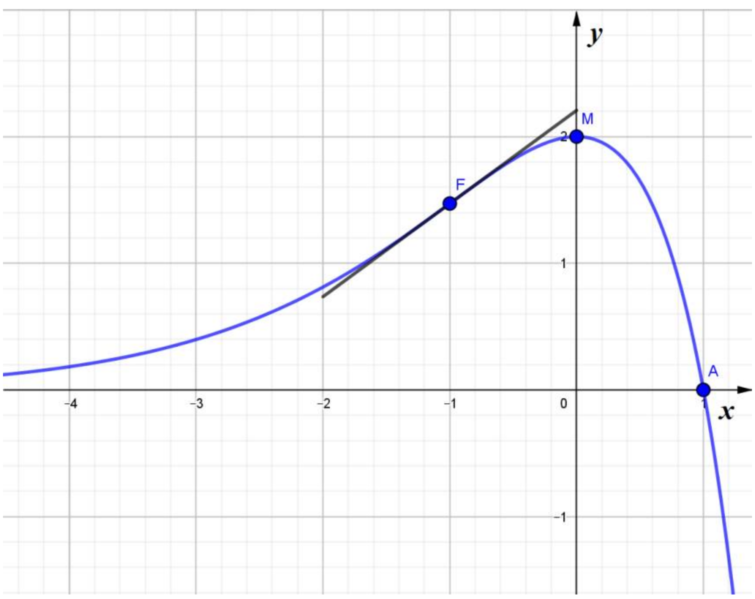


  $f''(x)=-2\left[1\cdot e^{x}+e^{x}x\right]=-2(x+1)e^{x}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

  Flesso di ascissa $x=1$

  $f(-1)=2(1+1)e^{-1}=4e^{-1}\simeq 1.47$

GRAFICO:



N. 2

Essendo $f\left(x\right)=\ln\left(x-3\right)$ risulta $f'\left(x\right)=\frac{1}{x-3}$ e quindi $f''\left(x\right)=-\frac{1}{\left(x-3\right)^2}$. Pertanto:

- $f\left(4\right)=\ln\left(4-3\right)=\ln 1=0$
- $f'\left(4\right)=\frac{1}{4-3}=1$
- $f''\left(4\right)=-\frac{1}{\left(4-3\right)^2}=-1$

Otteniamo quindi la parabola:

$$\alpha : y=f\left(4\right)+f'\left(4\right)\left(x-4\right)+\frac{f''\left(4\right)}{2}\left(x-4\right)^2=\left(x-4\right)-\frac{1}{2}\left(x-4\right)^2$$

Sviluppando i calcoli:

$$y=x-4-\frac{1}{2}x^2+4x-8 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+5x-12$$

È immediato verificare che la parabola passa per il punto $\left(4,0\right)$; infatti: $y\left(2\right)=-8+20-12=0$.
È immediato verificare che pure la funzione logaritmica passa per il punto $\left(4,0\right)$; infatti abbiamo verificato che: $f\left(4\right)=0$
Calcoliamo ora il coefficiente angolare della tangente alla parabola in $\left(4,0\right)$:

$$y'=-x+5 \Rightarrow y'\left(4\right)=-4+5=1$$

cioè lo stesso coefficiente angolare della tangente alla funzione logaritmica in tale punto.
$\Rightarrow$ le due curve hanno la stessa tangente in $\left(4,0\right)$:

$$y=x-4$$

N. 3

$f\left(x\right)=\frac{x\left|x-2\right|}{x^2-4}$ Dominio: $x\neq\pm 2$

$\lim_{x\to -2} f\left(x\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x\left|x-2\right|}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{x\left(2-x\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{-x}{x+2}=\infty \Rightarrow$ discontinuità 2° specie per $x=-2$ (asintoto verticale)

$$\lim_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\left|x-2\right|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x\left|x-2\right|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x\left(2-x\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x}{x+2}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ discontinuità 1° specie per $x=2$; salto = 1

$$\lim_{x\to +\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+2}=1 \text{ e } \lim_{x\to -\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(2-x\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x+2}=-1$$

$\Rightarrow$ $y=1$ asintoto orizzontale per $x\to +\infty$ e $y=-1$ asintoto orizzontale per $x\to -\infty$

N. 4

La funzione $f(x)=-2+\sqrt{\left|x\right|}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ in quanto somma tra una funzione costante (e quindi continua in $\mathbb{R}$) e la funzione $\sqrt{\left|x\right|}$, composizione tra funzioni continue.
Quindi $f\left(x\right)$ è continua in $\left[-9,9\right]$.
Inoltre è facile verificare che $f\left(-9\right)=-2+\sqrt{\left|-9\right|}=1=-2+\sqrt{\left|9\right|}=f\left(9\right)$.

Il problema è la derivabilità all'interno dell'intervallo; infatti si può scrivere:

$$f(x)=\begin{cases}-2+\sqrt{-x} & x<0\\ -2+\sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$$

e derivando otteniamo:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & x<0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\end{cases}$$

D'altra parte:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$

$\Rightarrow$ la funzione presenta una cuspide in $x=0$
$\Rightarrow$ il Teorema di Rolle non è applicabile per $f(x)$ nell'intervallo $[-9,9]$

N. 5

Consideriamo a funzione $f(x)=3^x+3x$. È derivabile in $\mathbb{R}$ poiché somma di funzioni ivi derivabili.

$f'(x)=3^x\cdot\ln 3+3>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ la funzione è ovunque crescente.

ESISTENZA:

$f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}\Rightarrow$ è continua in $\mathbb{R}$

$f(-1)=3^{-1}-3=-\dfrac{8}{3}<0$

$f(0)=3^0+0=1>0$

$\Rightarrow$ per il teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione ammette uno zero nell'intervallo dato.

UNICITÀ:

$f(x)$ è crescente in $\mathbb{R}\Rightarrow$ è invertibile in $\mathbb{R}\Rightarrow$ lo zero è unico

a	b	f(a)	f(b)	m=(a+b)/2	f(m)	Δ
-1	0	-2,66667	1	-0,5	-0,92265	0,5
-0,5	0	-0,92265	1	-0,25	0,009836	0,25
-0,5	-0,25	-0,92265	0,009836	-0,375	-0,46266	0,125
-0,375	-0,25	-0,46266	0,009836	-0,3125	-0,22809	0,0625

Lo zero cercato è:

$$\alpha\simeq -0.31$$

N. 6

a) L'area richiesta è data dall'integrale:

$$\int_0^{\ln 6} e^{-3x}+e^{\frac{x}{3}}dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}+3e^{\frac{x}{3}}\right]_0^{\ln 6}=\left[-\frac{1}{3}\left(e^{\ln 6}\right)^{-3}+3\left(e^{\ln 6}\right)^{\frac{1}{3}}\right]-\left[-\frac{1}{3}+3\right]=\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{216}+3\sqrt[3]{6}\right]-\left[-\frac{1}{3}+3\right]=$$

$$=-\frac{1}{648}+3\sqrt[3]{6}-\frac{8}{3}=\left(3\sqrt[3]{6}-\frac{1729}{648}\right)u^2$$

b) Utilizziamo il metodo delle fette. Il volume elementare vale:

$$dV=S(x)dx=e^{-\frac{x}{3}}\left(e^{-3x}+e^{\frac{x}{3}}\right)dx=\left(e^{-\frac{10}{3}x}+1\right)dx$$

Integrando otteniamo:

$$V=\int_0^{\ln 6} e^{-\frac{10}{3}x}+1\,dx=\left[x-\frac{3}{10}e^{-\frac{10}{3}x}\right]_0^{\ln 6}=\left[\left(\ln 6-\frac{3}{10}\sqrt[3]{\frac{1}{6^{10}}}\right)-\left(0-\frac{3}{10}\right)\right]=\left[\ln 6-\frac{3}{10}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{6^{10}}}-1\right)\right]u^3$$

N. 7

Possiamo osservare che, sommando la 2° e la 3° riga della matrice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -\sqrt{2}\\ -1 & 0 & 1 & \sqrt{2}\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

otteniamo la 4° riga. Pertanto il rango della matrice è sicuramente inferiore a 4.

Osserviamo, inoltre, che sviluppando il determinante della sottomatrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

secondo la 1° riga otteniamo:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$\Rightarrow rg(A)=3$

N. 8

Risolviamo $y''-y'-6y=e^{-x}$.

1° STEP:

Risolviamo l'equazione omogenea associata $y''-y'-6y=0$.

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2-\lambda-6=0$$

Gli zeri sono:

$$\Delta=1+24=25\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{matrix}\nearrow -2\\ \searrow\ 3\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$$

2° STEP:

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione data. Dal momento che il termine di perturbazione è una funzione esponenziale, proviamo con una funzione esponenziale dello stesso tipo: $\psi=k\cdot e^{-x}$.

Derivando otteniamo:

- $\psi'=-ke^{-x}$
- $\psi''=ke^{-x}$

Sostituendo:

$$ke^{-x}+ke^{-x}-6ke^{-x}=e^{-x}\Leftrightarrow -4ke^{-x}=e^{-x}\Leftrightarrow -4k=1\Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$$

L'integrale particolare è:

$$\psi=-\frac{1}{4}e^{-x}$$

3° STEP:

La soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-x}$$

N. 9

a) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ 2x - 3y + 5z = 17 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 5 & 17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La soluzione è, perciò:

$$(2, -1, 2)$$

b) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 3x + 5y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ mediante il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Il sistema diviene, quindi:

$$\begin{cases} 3x + 15z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5z \\ y = 4z \end{cases}$$

pertanto la soluzione cercata è:

$$(-5z, 4z, z),\ \forall z \in \mathbb{R}$$

N. 10

Cerchiamo le costanti richieste:

$$\frac{2}{x^2 - 2x} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + Bx - 2B}{x(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2B}{x^2 - 2x}$$

Per il principio di identità dei polinomi, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto, quindi:

$$\frac{2}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}$$

Studiamo ora la convergenza dell'integrale:

$$\int_3^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 2x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{2}{x^2 - 2x}\, dx$$

Calcoliamo innanzitutto:

$$\int_3^b \frac{2}{x^2 - 2x}\, dx = \int_3^b \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x|\right]_3^b = \left[\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right]_3^b =$$

$$=\left[\ln\left|\frac{b-2}{b}\right|-\ln\left|\frac{3-2}{3}\right|\right]=\left[\ln\left|\frac{b-2}{b}\right|-\ln\left|\frac{1}{3}\right|\right]=\ln\left|3\cdot\frac{b-2}{b}\right|$$

Pertanto:

$$\int_3^{+\infty}\frac{2}{x^2-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{2}{x^2-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|3\cdot\frac{b-2}{b}\right|=\ln 3$$

L'integrale dato converge a $\ln 3$