



**Informazioni personali**

Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che consegua con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

**Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta dal n. 2 al n. 5 + 3 quesiti a scelta dal n. 6 al n. 10**

Firma: \_\_\_\_\_ Numero di fogli consegnati: \_\_\_\_\_

Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: \_\_\_\_\_

**INDICAZIONI PER I CANDIDATI**

DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!

Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.

NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.

Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.

Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

*Lorenzo Meneghini*

**Testo della prova d'esame**  
**Parte A**

**QUESITO 1 (\_\_\_/6)**

Si consideri la funzione  $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 4}$ . Dopo averne determinato il dominio e studiata la parità: si studi il segno di  $f(x)$ , si verifichi che la funzione non ammette né massimi né minimi relativi e se ne trovi il punto di flesso. Si disegni il grafico della funzione studiata e se ne trovi la tangente nell'origine O del riferimento.

**QUESITO 2 (\_\_\_/5)**

Tra i seguenti limiti, uno non può essere calcolato mediante il Teorema di de l'Hospital. Specificare quale dopo averli calcolati:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3 + 1)}{x^2(1 - e^x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x + 2} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x^2}{x^2}$

**QUESITO 3 (\_\_\_/5)**

In un parco naturale vengono immessi  $N_0$  camosci. A causa della scarsità di risorse ambientali, si prevede che a lungo andare la popolazione possa avvicinarsi alla soglia limite di  $N_\infty$  esemplari, senza però superarla.

Sapendo che la crescita della popolazione è modellizzata tramite la curva logistica  $N(t) = 1600 \left( 1 + 19e^{-\frac{t}{5}} \right)^{-1}$ ,

ove il tempo è misurato in anni, determinare:

- il numero  $N_0$  di camosci che costituiscono la popolazione iniziale ed il valore di soglia  $N_\infty$  della popolazione;
- la rapidità di crescita della popolazione dopo 10 anni (esprimere il risultato con un numero intero).  
Trovare, inoltre, il tempo necessario, dall'introduzione dei camosci nel parco:
- per superare i 400 esemplari;
- per superare la soglia critica di 1590 camosci.

**QUESITO 4 (\_\_\_/5)**

Studiare la derivabilità della funzione  $f(x) = |x^3 - 3x^2|$ , determinandone gli eventuali estremi relativi/assoluti.

**QUESITO 5 (\_\_\_/5)**

Dalle misure sperimentali effettuate su individui di molte specie animali emerge che il rapporto tra peso dello scheletro  $P_s$  e peso corporeo  $P$  non è costante, ma segue una relazione del tipo

$$\ln P_s = A + B \cdot \ln P \quad (*)$$

Trovare i parametri  $A$  e  $B$  sapendo che: se  $P = 33.4 \text{ kg}$  allora  $P_s = 2.7 \text{ kg}$ ; se  $P = 28.3 \text{ kg}$  allora  $P_s = 2.4 \text{ kg}$ .

Trovare poi i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  della funzione allometrica  $P_s = \alpha \cdot P^\beta$  deducibile dalla (\*).

Qual è la stima del peso dello scheletro per un individuo il cui peso corporeo sia  $P = 37.4 \text{ kg}$ ?

**Parte B****QUESITO 6 (\_\_\_/5)**

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:  $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$

**QUESITO 7 (\_\_\_/5)**

- Verificare che esistono due numeri reali  $A$  e  $B$  tali che  $\frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2}$  per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ . Determinare, quindi, l'area della regione piana racchiusa dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}, \text{ dall'asse } x \text{ e dalle rette } x = 1 \text{ e } x = k, \text{ per } k > 1.$$

- Detta  $A(k)$  l'area calcolata al punto precedente, calcolare:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$$

- Determinare il volume del solido generato da una rotazione completa della funzione  $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$  attorno all'asse  $x$ , nel suo dominio di definizione.

**QUESITO 8 (\_\_\_/5)**

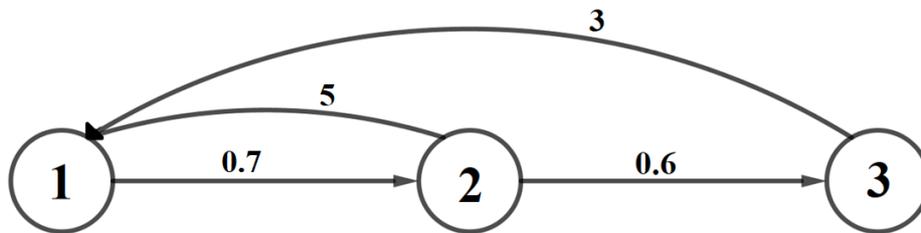
Risolvere i sistemi lineari:

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - 4z = -5 \\ x - 5y - 7z = -11 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 10x - 8y - 3z = 0 \\ 13x + 6y - 8z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

**QUESITO 9 (\_\_\_/5)**

Si consideri il diagramma di vita rappresentato in figura, relativo ad una popolazione suddivisa in tre classi di età.



a) Determinare la matrice di Leslie A. Dire se è invertibile.

b) All'inizio di un intervallo di previsione, la popolazione è così composta:  $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 390 \\ 70 \\ 36 \end{pmatrix}$ . Determinare la

composizione  $\vec{N}(t+1)$  della popolazione dopo un intervallo di previsione. Calcolare, inoltre, la composizione  $\vec{N}(t-1)$  della popolazione nell'intervallo di previsione precedente.

**QUESITO 10 (\_\_\_/5)**

Due voliere contengono uccelli di specie diverse. La composizione percentuale è rappresentata in tabella:

	Lunghezza		
	cardellini	passeri	pettirossi
Voliera 1	46%	34%	20%
Voliera 2	36%	40%	24%

Ad un certo punto le due popolazioni vengono mischiate. Determinare le proporzioni della nuova popolazione, costituita dall'unione delle precedenti, sapendo che nella prima voliera ci sono 450 uccelli in tutto, mentre quelli della seconda sono 350

**PUNTEGGIO TOTALE: \_\_\_\_\_/30**