

Testo del 2° parziale – fila A

QUESITO 1 (____/3)

Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = 4xy + 2y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

QUESITO 2 (____/4)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' - 2y' - 8y = 4x$

QUESITO 3 (____/4)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{4}{x^2 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3}$ e studiare la convergenza

dell'integrale: $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2 + 3x} dx$

QUESITO 4 (____/5)

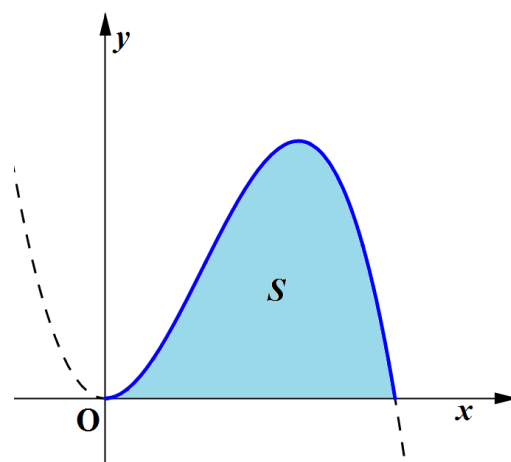
Si consideri la superficie S rappresentata in figura a fianco, delimitata dall'asse delle ascisse e dalla funzione

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^3$$

Dopo aver determinato le intersezioni della curva con l'asse delle x determinare il volume del solido:

- ottenuto dalla rotazione della superficie S attorno all'asse x
- ottenuto dalla rotazione della superficie S attorno all'asse y
- di base S, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono

rettangoli di altezza $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$



QUESITO 5 (____/3)

Ricorrendo ad un'opportuna sostituzione, calcolare l'area sotto il grafico della funzione $f(x) = e^x \sqrt{e^x + 4}$, nell'intervallo $[\ln 5, \ln 12]$.

QUESITO 6 (____/3)

Determinare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

QUESITO 7 (____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 8 (____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ 2x + y = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 9y - 5z = 0 \\ 7x + y + 3z = 0 \\ 4x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

n. 1

L'equazione $y' = 4xy + 2y$ è a variabili separabili. Infatti si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = y(4x + 2) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (4x + 2)dx$$

Integrando membro a membro:

$$\ln|y| = 2x^2 + 2x + c$$

e, passando all'esponenziale:

$$|y| = e^{2x^2+2x+c} = e^c \cdot e^{2x^2+2x}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è, quindi, del tipo:

$$y = k \cdot e^{2x^2+2x}, k \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale consente di determinare la costante:

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow ke^0 = 3 \Leftrightarrow k = 3$$

Quindi:

$$y = 3e^{2x^2+2x}$$

n. 2

Consideriamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' - 8y = 4x$ e la sua *omogenea associata*: $y'' - 2y' - 8y = 0$. Il

polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, ed i suoi zeri sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3 = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{matrix}$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$f(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$$

Ricerca integrale particolare dell'equazione non omogenea; proviamo con un polinomio di 1° grado del tipo:

$$g(x) = ax + b$$

Derivando otteniamo

$$g'(x) = a \quad \text{e} \quad g''(x) = 0$$

Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo la relazione

$$0 - 2a - 8(ax + b) = 4x \Leftrightarrow (-2a - 8b) - 8ax = 4x$$

che risulta un'identità se e solo se:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -8a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{4}a \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{8} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'integrale particolare cercato è $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Concludendo, la soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$$

n. 3

Osserviamo che:

$$\frac{4}{x^2 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} = \frac{(A + B)x + 3A}{x^2 + 3x}$$

Affinchè la precedente sia una identità è necessario (e sufficiente) che:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Pertanto abbiamo dimostrato che

$$\frac{4}{x^2 + 3x} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right)$$

Consideriamo ora:

$$\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2 + 3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{4}{x^2 + 3x} dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_1^b \frac{4}{x^2 + 3x} dx &= \frac{4}{3} \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} dx = \frac{4}{3} [\ln|x| - \ln|x+3|]_1^b = \frac{4}{3} \left[\ln \left| \frac{x}{x+3} \right| \right]_1^b = \\ &= \frac{4}{3} \left[\ln \left| \frac{b}{b+3} \right| - \ln \frac{1}{4} \right] = \frac{4}{3} \left[\ln \left| \frac{b}{b+3} \right| + \ln 4 \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^2 + 3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{4}{x^2 + 3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} \left[\ln \left| \frac{b}{b+3} \right| + \ln 4 \right] = \frac{4}{3} [\ln 1 + \ln 4] = \frac{4}{3} \ln 4$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $\frac{4}{3} \ln 4$.

n. 4

Calcoliamo le intersezioni della curva con l'asse x:

$$x^2 - \frac{1}{4}x^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 4$$

a) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV = \pi(f(x))^2 dx = \frac{1}{16} \pi(4x^2 - x^3)^2 dx$$

Integrando nell'intervallo $[0, 4]$ otteniamo:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{16} \pi \int_0^4 (4x^2 - x^3)^2 dx = \frac{1}{16} \pi \int_0^4 (16x^4 - 8x^5 + x^6) dx = \frac{1}{16} \pi \left[\frac{16}{5} x^5 - \frac{8}{6} x^6 + \frac{x^7}{7} \right]_0^4 = \\ &= \frac{1}{16} \pi \cdot \left[\frac{16}{5} 4^5 - \frac{4}{3} 4^6 + \frac{4^7}{7} \right] = \frac{1}{4^2} \pi \cdot 4^7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = 1024\pi \cdot \frac{1}{105} = \frac{1024}{105} \pi u^3 \end{aligned}$$

b) Applicando il metodo dei gusci cilindrici, l'elemento di volume è

$$dV = 2\pi x \cdot f(x) dx = \frac{2\pi}{4} (4x^3 - x^4) dx$$

Integrando nell'intervallo $[0, 4]$ otteniamo:

$$V_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \frac{\pi}{2} \left[x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 4^4 \left(1 - \frac{4}{5} \right) = \dots = \frac{128}{5} \pi u^3$$

c) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV = S(x) dx = \frac{1}{4} (4x^2 - x^3) \cdot \frac{e^x}{x^2} dx = \frac{1}{4} (4 - x) e^x dx$$

Integrando nell'intervallo $[0, 4]$ otteniamo:

$$V_3 = \frac{1}{4} \int_0^4 (4 - x) e^x dx = \int_0^4 e^x dx - \frac{1}{4} \int_0^4 x \cdot e^x dx$$

Integrando per parti:

$$\int_0^4 x \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^4 - \int_0^4 e^x dx$$

Quindi:

$$V_3 = \int_0^4 e^x dx - \frac{1}{4} [x \cdot e^x]_0^4 + \frac{1}{4} \int_0^4 e^x dx = \frac{5}{4} \int_0^4 e^x dx - \frac{1}{4} [4e^4 - 0] = \frac{5}{4} [e^x]_0^4 - e^4 = \frac{5}{4} e^4 - \frac{5}{4} - e^4 = \left(\frac{e^4}{4} - \frac{5}{4} \right) u^3$$

n. 5

L'area cercata è data dall'integrale: $\int_{\ln 5}^{\ln 12} e^x \sqrt{e^x + 4} dx$.

Posto $t = e^x + 4$, risulta: $dt = e^x dx$.

Inoltre, se $x = \ln 5$ risulta $t = e^{\ln 5} + 4 = 9$; se $x = \ln 12$ risulta $t = e^{\ln 12} + 4 = 16$.

Pertanto:

$$\int_{\ln 5}^{\ln 12} e^x \sqrt{e^x + 4} dx = \int_9^{16} \sqrt{t} dt = \int_9^{16} t^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right]_9^{16} = \frac{2}{3} [\sqrt{16^3} - \sqrt{9^3}] = \frac{74}{3} u^2$$

n. 6

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango: $rg(A) \leq 3$.

Per determinarlo, calcoliamo il determinante del seguente minore, applicando il metodo di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg(A) = 3$$

n. 7

Calcoliamo il determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Matrice invertibile.

Calcoliamo la matrice $\text{cof}A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \text{cof}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}A)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n. 8

a) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ 2x + y = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{cases}$ applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Soluzione: $(2, 0, 1)$

b) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 3x - 9y - 5z = 0 \\ 7x + y + 3z = 0 \\ 4x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$ applichiamo ancora il metodo di riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & -9 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 3 & -9 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 0 & 39 & 26 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 3 & -9 & -5 \\ 0 & -66 & -44 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 3 & -9 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 3 & -9 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 3 & -9 & -5 \\ 0 & 9 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Otteniamo, quindi:

$$\begin{cases} 3x + z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -3x \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$(x, 2x, -3x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Testo del 2° parziale – fila B

QUESITO 1 (____/3)

Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = -4xy + 3y \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

QUESITO 2 (____/4)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' - 2y' - 3y = -3x$

QUESITO 3 (____/4)

Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{2}{3x - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3 - x}$ e studiare la convergenza

dell'integrale: $\int_4^{+\infty} \frac{2}{3x - x^2} dx$

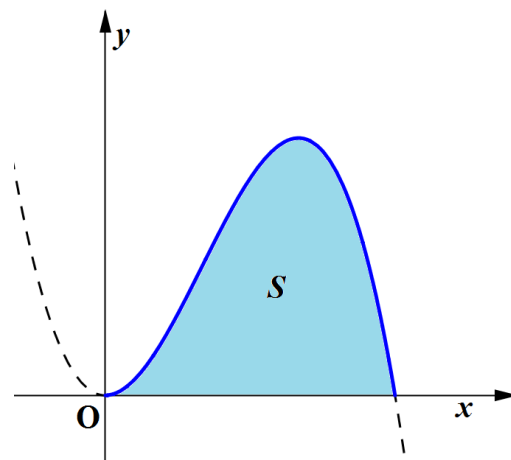
QUESITO 4 (____/5)

Si consideri la superficie S rappresentata in figura a fianco, delimitata dall'asse delle ascisse e dalla funzione

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{5}x^3$$

Dopo aver determinato le intersezioni della curva con l'asse delle x determinare il volume del solido:

- ottenuto dalla rotazione della superficie S attorno all'asse x
- ottenuto dalla rotazione della superficie S attorno all'asse y
- di base S, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza $h(x) = \frac{e^x}{x^2}$



QUESITO 5 (____/3)

Ricorrendo ad un'opportuna sostituzione, calcolare l'area sotto il grafico della funzione $f(x) = e^x \sqrt{e^x + 1}$, nell'intervallo $[\ln 3, \ln 8]$.

QUESITO 6 (____/3)

Determinare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

QUESITO 7 (____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 8 (____/5)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y + 6z = 12 \\ 2x + y = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 7y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 9y - 5z = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

n. 1

L'equazione $y' = -4xy + 3y$ è a variabili separabili. Infatti si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = y(-4x + 3) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (-4x + 3)dx$$

Integrando membro a membro:

$$\ln|y| = -2x^2 + 3x + c$$

e, passando all'esponenziale:

$$|y| = e^{-2x^2+3x+c} = e^c \cdot e^{-2x^2+3x}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è, quindi, del tipo:

$$y = k \cdot e^{-2x^2+3x}, k \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale consente di determinare la costante:

$$y(0) = -4 \Leftrightarrow ke^0 = -4 \Leftrightarrow k = -4$$

Quindi:

$$y = -4e^{-2x^2+3x}$$

n. 2

Consideriamo l'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = -3x$ e la sua *omogenea associata*: $y'' - 2y' - 3y = 0$. Il

polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, ed i suoi zeri sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2 = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$.

Soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$f(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

Ricerca integrale particolare dell'equazione non omogenea; proviamo con un polinomio di 1° grado del tipo:

$$g(x) = ax + b$$

Derivando otteniamo

$$g'(x) = a \quad \text{e} \quad g''(x) = 0$$

Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo la relazione

$$0 - 2a - 3(ax + b) = -3x \Leftrightarrow (-2a - 3b) - 3ax = -3x$$

che risulta un'identità se e solo se:

$$\begin{cases} -2a - 3b = 0 \\ -3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = 1 \end{cases}$$

L'integrale particolare cercato è $g(x) = x - \frac{2}{3}$.

Concludendo, la soluzione generale dell'equazione differenziale data è:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + x - \frac{2}{3}$$

n. 3

Osserviamo che:

$$\frac{2}{3x - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3 - x} = \frac{(-A + B)x + 3A}{3x - x^2}$$

Affinchè la precedente sia una identità è necessario (e sufficiente) che:

$$\begin{cases} B - A = 0 \\ 3A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{2}{3} \\ A = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Pertanto abbiamo dimostrato che

$$\frac{2}{3x - x^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3 - x} \right)$$

Consideriamo ora:

$$\int_4^{+\infty} \frac{2}{3x - x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{2}{3x - x^2} dx$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_4^b \frac{2}{3x - x^2} dx = \frac{2}{3} \int_4^b \frac{1}{x} + \frac{1}{3 - x} dx = \frac{2}{3} [\ln|x| - \ln|3 - x|]_4^b = \frac{2}{3} \left[\ln \left| \frac{x}{3 - x} \right| \right]_4^b = \frac{2}{3} \left[\ln \left| \frac{b}{3 - b} \right| - \ln 4 \right]$$

Quindi:

$$\int_4^{+\infty} \frac{2}{3x - x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{2}{3x - x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left[\ln \left| \frac{b}{3 - b} \right| - \ln 4 \right] = \frac{2}{3} [\ln 1 - \ln 4] = -\frac{2}{3} \ln 4$$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a $-\frac{2}{3} \ln 4$.

n. 4

Calcoliamo le intersezioni della curva con l'asse x:

$$x^2 - \frac{1}{5}x^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^2(5 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 5$$

a) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV = \pi(f(x))^2 dx = \frac{1}{25} \pi(5x^2 - x^3)^2 dx$$

Integrando nell'intervallo $[0, 4]$ otteniamo:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{25} \pi \int_0^5 (5x^2 - x^3)^2 dx = \frac{1}{25} \pi \int_0^5 (25x^4 - 10x^5 + x^6) dx = \frac{1}{25} \pi \left[5x^5 - \frac{10}{6}x^6 + \frac{x^7}{7} \right]_0^5 \\ &= \frac{1}{25} \pi \cdot \left[5^6 - \frac{5}{3}5^6 + \frac{5^7}{7} \right] = \frac{1}{5^2} \pi \cdot 5^7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = 3125\pi \cdot \frac{1}{105} = \frac{625}{21} \pi u^3 \end{aligned}$$

b) Applicando il metodo dei gusci cilindrici, l'elemento di volume è

$$dV = 2\pi x \cdot f(x) dx = \frac{2\pi}{5} (5x^3 - x^4) dx$$

Integrando nell'intervallo $[0, 5]$ otteniamo:

$$V_2 = \frac{2\pi}{5} \int_0^5 (5x^3 - x^4) dx = \frac{2\pi}{5} \left[\frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^5 = \frac{2\pi}{5} \cdot 5^5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \dots = \frac{125}{2} \pi u^3$$

c) Applicando il metodo delle fette, l'elemento di volume è

$$dV = S(x) dx = \frac{1}{5} (5x^2 - x^3) \cdot \frac{e^x}{x^2} dx = \frac{1}{5} (5 - x) e^x dx$$

Integrando nell'intervallo $[0, 5]$ otteniamo:

$$V_3 = \frac{1}{5} \int_0^5 (5 - x) e^x dx = \int_0^5 e^x dx - \frac{1}{5} \int_0^5 x \cdot e^x dx$$

Integrando per parti:

$$\int_0^5 x \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^5 - \int_0^5 e^x dx$$

Quindi:

$$V_3 = \int_0^5 e^x dx - \frac{1}{5} [x \cdot e^x]_0^5 + \frac{1}{5} \int_0^5 e^x dx = \frac{6}{5} \int_0^5 e^x dx - \frac{1}{5} [5e^5 - 0] = \frac{6}{5} [e^x]_0^5 - e^5 = \frac{6}{5} e^5 - \frac{6}{5} - e^5 = \left(\frac{e^5}{5} - \frac{6}{5} \right) u^3$$

n. 5

L'area cercata è data dall'integrale: $\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x \sqrt{e^x + 1} dx$.

Posto $t = e^x + 1$, risulta: $dt = e^x dx$.

Inoltre, se $x = \ln 3$ risulta $t = e^{\ln 3} + 1 = 4$; se $x = \ln 8$ risulta $t = e^{\ln 8} + 1 = 9$.

Pertanto:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x \sqrt{e^x + 1} dx = \int_4^9 \sqrt{t} dt = \int_4^9 t^{\frac{1}{2}} dt = \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right]_4^9 = \frac{2}{3} [\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}] = \frac{38}{3} u^2$$

n. 6

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango: $rg(A) \leq 3$.

Per determinarlo, calcoliamo il determinante del seguente minore, applicando il metodo di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

$$\Rightarrow rg(A) = 3$$

n. 7

Calcoliamo il determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Matrice invertibile.

Calcoliamo la matrice $\text{cof}A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \text{cof}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}A)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n. 8

a) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 3x + 5y + 6z = 12 \\ 2x + y = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{cases}$ applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 12 \\ 0 & 7 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Soluzione: $(2, 0, 1)$

b) Per risolvere il sistema $\begin{cases} 5x + 7y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - 9y - 5z = 0 \end{cases}$ applichiamo ancora il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -9 & -5 \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -1 \\ 5 & -8 & -6 \\ 3 & -9 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 15 & 5 \\ 3 & -9 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 66 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Otteniamo, quindi:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -3y \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$(-2y, y, -3y), \forall y \in \mathbb{R}$$