UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (A)

San Floriano, 20/06/2018

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi oltre che in ciascun foglio utilizzato.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta della parte A + 3 quesiti a scelta della parte B

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

Svolgere il quesito 1 (studio di funzione) più 2 quesiti a scelta tra i restanti 4.

QUESITO 1 (____/6)

Si consideri la funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$. Dopo averne determinato il dominio e studiata la parità, se ne studi il segno, e gli eventuali asintoti. Si studi la monotonia e la concavità della funzione, determinando gli eventuali estremi e verificando che non ammette flessi. Si disegni il grafico della funzione studiata.

QUESITO 2 (____/5)

Scrivere l'equazione della tangente *t* al grafico della funzione $f\left(x\right)=-x^3+3x^2-x$ nel suo punto di flesso.
Verificare che la retta ottenuta è ortogonale a $2x+y+\sqrt{3}=0$

QUESITO 3 (____/5)

Verificare che la funzione $f\left(x\right)=\ln x$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[1,e\right]$ e trovare le coordinate del punto del grafico della funzione che soddisfa la tesi di tale teorema.

QUESITO 4 (_____/5)

Studia la crescenza della funzione $f(x)=(2x+x^2)^{10}$ determinando anche i punti di massimo/minimo.

QUESITO 5 (_____/5)

Classificare i punti di non derivabilità delle funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e $g(x)=|x^3-1|$.

Parte B

Svolgere 3 quesiti a scelta tra quelli proposti.

QUESITO 6 (_____/5)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

QUESITO 7 (_____/5)

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale: $y'' + y' - 2y = 1$

QUESITO 8 (_____/5)

a) Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Dopo aver calcolato il prodotto $C = A \cdot B$ tra le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcoli il determinante della matrice C.

QUESITO 9 (_____/5)

a) Integrando per parti, calcolare $\int_0^1 x \cdot e^x dx$

b) Stabilire se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ converge e, nel caso, determinarne il valore.

c) Determinare il volume del solido generato da una rotazione completa della funzione $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$ attorno all'asse x, nel suo dominio di definizione.

QUESITO 10 (_____/5)

Risolvere i seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

PUNTEGGIO TOTALE: _____/30

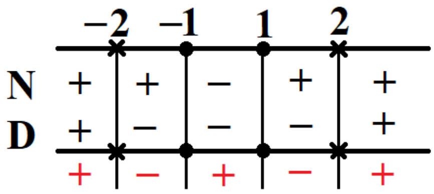
TRACCIA SINTETICA DI SVOLGIMENTO

N. 1

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$$

- DOMINIO: $x\neq\pm2$
- PARITÀ: $f\left(-x\right)=\dfrac{\left(-x\right)^2-1}{\left(-x\right)^2-4}=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}=f\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)$ è pari
- SEGNO E INTERSEZIONE CON GLI ASSI: $f\left(x\right)\geq0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\geq0$

  La funzione taglia l'asse x nei punti $\left(-1,0\right)$ e $\left(1,0\right)$ e l'asse y in $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$



- ASINTOTI:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4}=1\Rightarrow \text{asintoto orizzontale } y=1$$

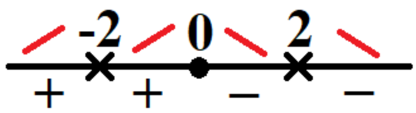
$$\lim_{x\to2}\frac{\overbrace{x^2-1}^{3}}{\underbrace{x^2-4}_{0}}=\infty\Rightarrow \text{asintoto verticale } x=2 \text{ e, per parità, anche } x=-2$$

- MONOTONIA:

$$f'\left(x\right)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2-4\right)^2}\left(x^2-4-x^2+1\right)=-6\frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$f'\left(x\right)\geq0$

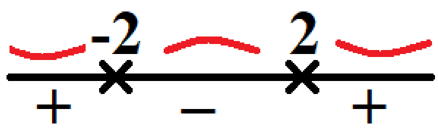
Max relativo in $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$



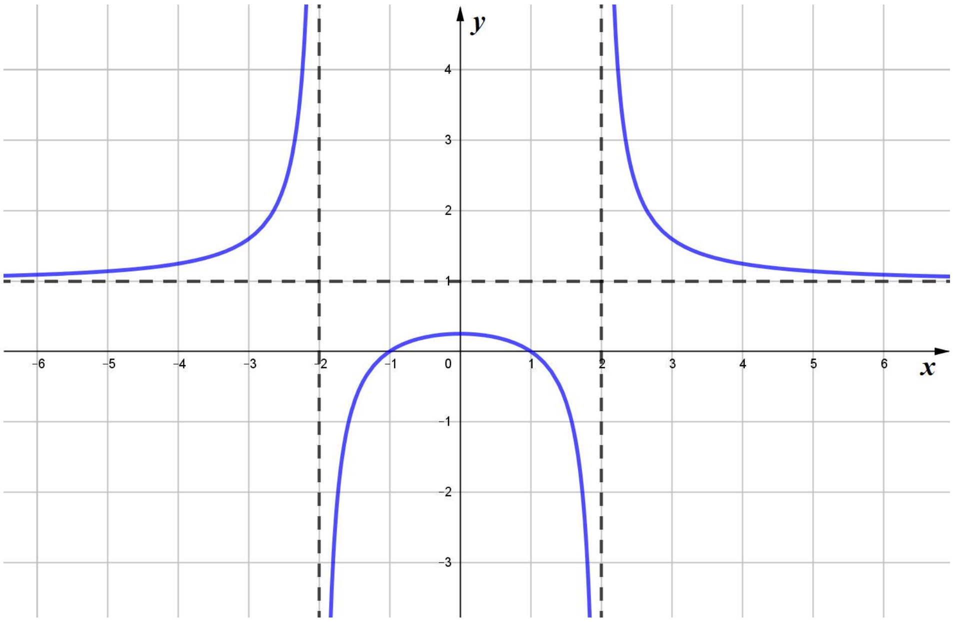
- CONCAVITÀ:

$$f''\left(x\right)=-6\frac{\left(x^2-4\right)^2-2\left(x^2-4\right)\cdot2x\cdot x}{\left(x^2-4\right)^4}=-6\frac{x^2-4-4x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=6\frac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3}\geq0\ \Leftrightarrow\ x<-2\ \vee\ x>2$$

$\Rightarrow$ la funzione non ammette flessi.



GRAFICO



N. 2

Cerchiamo il punto di flesso della funzione $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x$.

- $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$
- $f''(x) = -6x + 6 \geq 0 \iff x \leq 1$

Flesso:

$$f(1) = -1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow F(1,1)$$

Coefficiente angolare della tangente di flesso:

$$m = f'(1) = -3 + 6 - 1 = 2$$

Tangente di flesso:

$$y - 1 = 2(x-1) \iff y = 2x - 1$$

Il coefficiente angolare della retta $2x + y + \sqrt{3} = 0$ è $m' = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ le due rette sono ortogonali tra loro.

N. 3

La funzione $f(x) = \ln x$ è continua in $[1,e]$ e derivabile in $(1,e)$.
Valgono pertanto le ipotesi del Teorema di Lagrange.

$$\frac{f(e) - f(1)}{e-1} = \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

Risolviamo l'equazione $f'(c) = \frac{1}{e-1}$:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \iff c = e - 1 \text{ accettabile}$$

N. 4

Deriviamo la funzione $f(x) = (2x + x^2)^{10}$:

$$f'(x) = 10(2x + x^2)^9 (2 + 2x) = 20(x+1)(2x + x^2)^9 \geq 0 \iff$$
$$(x+1)(2x + x^2) \geq 0$$

	↘	-2	↗	-1	↘	0	↗
$x+1$	−		−		+		+
$2x+x^2$	+		−		−		+
	−		+		−		+

Min:

- $f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$
- $f(-2)=(-4+4)^{10}=0 \Rightarrow (4,0)$

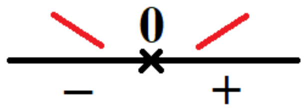
Max:

- $f(-1)=(-2+1)^{10}=1 \Rightarrow (-1,1)$

N. 5

Studiamo la derivabilità di $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$:

- Dominio: $D=\mathbb{R}$
- $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$ dominio: $D'=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\infty \Rightarrow f(x)$ non è derivabile in $x=0$
- $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\geq 0 \Leftrightarrow x>0$



$\Rightarrow$ la funzione ha un punto cuspidale in $x=0$

Studiamo la derivabilità di $g(x)=\left|x^3-1\right|$:

- Dominio: $D=\mathbb{R}$
- $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; $x^3-1>0$ per $x>1 \Rightarrow g(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 1 \\ 1-x^3 & x<1 \end{cases}$
- $g'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>1 \\ -3x^2 & x<1 \end{cases} \Rightarrow$ studiamo la derivabilità in $x=1$
- $\lim_{x\to 1^+} g'(x)=\lim_{x\to 1^+} 3x^2=3$ e $\lim_{x\to 1^-} g'(x)=\lim_{x\to 1^-} -3x^2=-3$

$\Rightarrow$ la funzione ha un punto angoloso in $x=1$

N. 6

Risolviamo: $\begin{cases} y'=xy \\ y(0)=1 \end{cases}$

Separiamo le variabili:

$$y'=xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=x\,dx$$

Integrando membro a membro:

$$\int\frac{dy}{y}=\int x\,dx \Leftrightarrow \ln|y|=\frac{x^2}{2}+c \Leftrightarrow |y|=e^{\frac{x^2}{2}+c}=e^c\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$y=k\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\text{, con } k\in\mathbb{R}$$

Imponiamo la condizione $y(0)=1$:

$$1=k\cdot e^0 \Leftrightarrow k=1$$

Soluzione del problema di Cauchy:

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}$$

N. 7

Risolviamo l'equazione $y''+y'-2y=1$.

L'equazione omogenea associata è $y''+y'-2y=0$ e l'equazione caratteristica è $\lambda^2+\lambda-2=0$:

$$\Delta=1+8=9\Rightarrow\frac{-1\pm3}{2}=\begin{matrix}\nearrow -2\\ \searrow 1\end{matrix}$$

Quindi la soluzione dell'equazione omogenea associata è:

$$\varphi=c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

Cerchiamo ora l'integrale particolare dell'equazione data tra le funzioni costanti: $\psi=k$

$$\psi'=\psi''=0$$

Sostituendo:

$$0-2k=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ la soluzione generale dell'equazione data è:

$$y=\varphi+\psi=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{1}{2}$$

N. 8

a) Determiniamo il rango della matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&0&1&2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$; la matrice è $3\times4\Rightarrow rg(A)\le3$

Consideriamo il minore 3×3:

$$\begin{vmatrix}0&2&1\\0&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot1\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3\neq0$$

$\Rightarrow rg(A)=3$

b) $\det A=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3=6$

$$\det B=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1$$

Per il Teorema di Binet:

$$\det C=\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B=6\cdot1=6$$

NOTA: Per chi volesse assolutamente sviluppare tutti i calcoli:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&-2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\det C=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&0&-2\\0&0&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}2&-2\\0&3\end{vmatrix}=6$$

N. 9

a) $\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx = \left[1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\right] - \left[e^x\right]_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) = 1$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)^2} dx$

$$\int_0^b \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^b = -\frac{1}{b+1} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{b+1} + 1 = 1$$

c) L'elemento di volume è: $dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left(5x - x^2\right)dx$

Il dominio della funzione è $[0,5]$.

Quindi:

$$V = \pi \int_0^5 \left(5x - x^2\right)dx = \pi\left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \pi\left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3}\right) = \frac{125}{6}\pi u^3$$

N. 10

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Sommando la 2° equazione con la 3°: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ sostituendo: $\begin{cases} 1 + y + z = 1 \\ 1 - y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Sommando la 2° equazione con la 3°: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -z \\ 2z = 1 \end{cases}$

Soluzione: $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} -4x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Sottraendo la 1° equazione dalla 3°: $\begin{cases} 5x = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ sostituendo: $\begin{cases} x = 0 \\ 4y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

Osserviamo che la 2° equazione è multipla della 3°; pertanto il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$

Soluzione generale:

$(0, t, -2t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$