UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (A)

San Floriano, 22/11/2018

Informazioni personali

Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: __________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!

Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.

NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.

Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.

Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x) = 4 \cdot \frac{x}{1+x^2} - 2$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x) = 8x \frac{x^2-3}{\left(x^2+1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

a) Senza utilizzare il teorema di de l'Hospital, calcolare: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{e^{3x}-1}$

b) Studiare la continuità della funzione $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|x}$ per $x=0$ e $x=1$

QUESITO 3 (_____/4)

Classificare i punti di non derivabilità delle funzioni $f(x)=x|x-1|$ e $g(x)=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

QUESITO 4 (_____/6)

Dopo 3 giorni un campione di Radon-222 si riduce al 58% della quantità iniziale; la legge del decadimento radioattivo è del tipo:

$$M(t)=M_0\cdot e^{kt},$$

ove il tempo t è misurato in giorni. Sapendo che la massa iniziale del campione è $100\,g$, determinare:

a) il valore della costante k, approssimato alla 4° cifra decimale;
b) la rapidità di variazione dopo 3 giorni;
c) il tempo di dimezzamento del Radon-222;
d) il tempo necessario perché il campione si riduca a 10 g.

QUESITO 5 (_____/4)

Il rapporto tra la biomassa M (in kg di sostanza secca) e diametro alla base D (in cm) per le piante di Eucalipto è descritto dalla relazione allometrica:

$$M=0.11\cdot D^{1.846}$$

Stimare:

a) la biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 30 cm;
b) il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 70 kg.

QUESITO 6 (_____/4)

Verificare che i grafici delle funzioni $f(x)=e^{2x}$ e $g(x)=(x-1)^2$ passano per il punto $A(0,1)$. Dopo aver determinato l'equazione delle tangenti ai grafici delle due funzioni nel loro punto comune A, dire se tali rette sono perpendicolari tra loro.

Punteggio totale: ___________/30

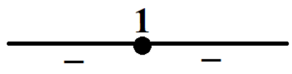
Soluzione – fila A

N. 1

$f(x)=4\cdot\frac{x}{1+x^2}-2$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ: $f(-x)=4\cdot\frac{(-x)}{1+(-x)^2}-2=-4\cdot\frac{x}{1+x^2}-2\neq f(x)$ e $f(-x)\neq -f(x)\Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}-1\geq 0\Leftrightarrow \frac{2x-x^2-1}{x^2+1}\geq 0\Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq 0$

  $f(0)=-2$

  $\Rightarrow$ La curva interseca gli assi cartesiani in $(1,0)$ e $(0,-2)$

- ASINTOTI:

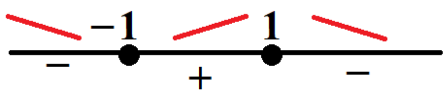
  $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 4\cdot\frac{x}{\underbrace{1+x^2}_{\downarrow\, 0}}-2=-2$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 4\cdot\frac{x}{\underbrace{1+x^2}_{\downarrow\, 0}}-2=-2$

  $\Rightarrow$ $y=-2$ è asintoto orizzontale della funzione

- MONOTONIA:

  $f'(x)=4\cdot\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)}-0=4\cdot\frac{1-x^2}{(x^2+1)}\geq 0\Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$

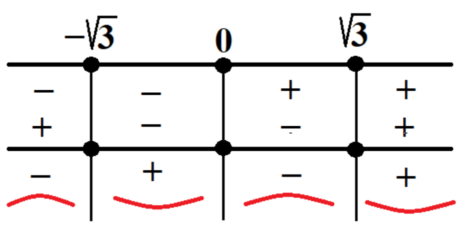
  Min: $f(-1)=\frac{-4}{1+1}-2=-4\Rightarrow M_1(-1,-4)$

  Max: $f(1)=\frac{4}{1+1}-2=0\Rightarrow M_2(1,0)$

- CONCAVITÀ:

  $f''(x)=4\cdot\frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)(2x)(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=-\frac{8x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}\left[x^2+1+2(1-x^2)\right]=$

  $=-\frac{8x}{(x^2+1)^3}\left[3-x^2\right]=\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\geq 0\Leftrightarrow x(x^2-3)\geq 0$

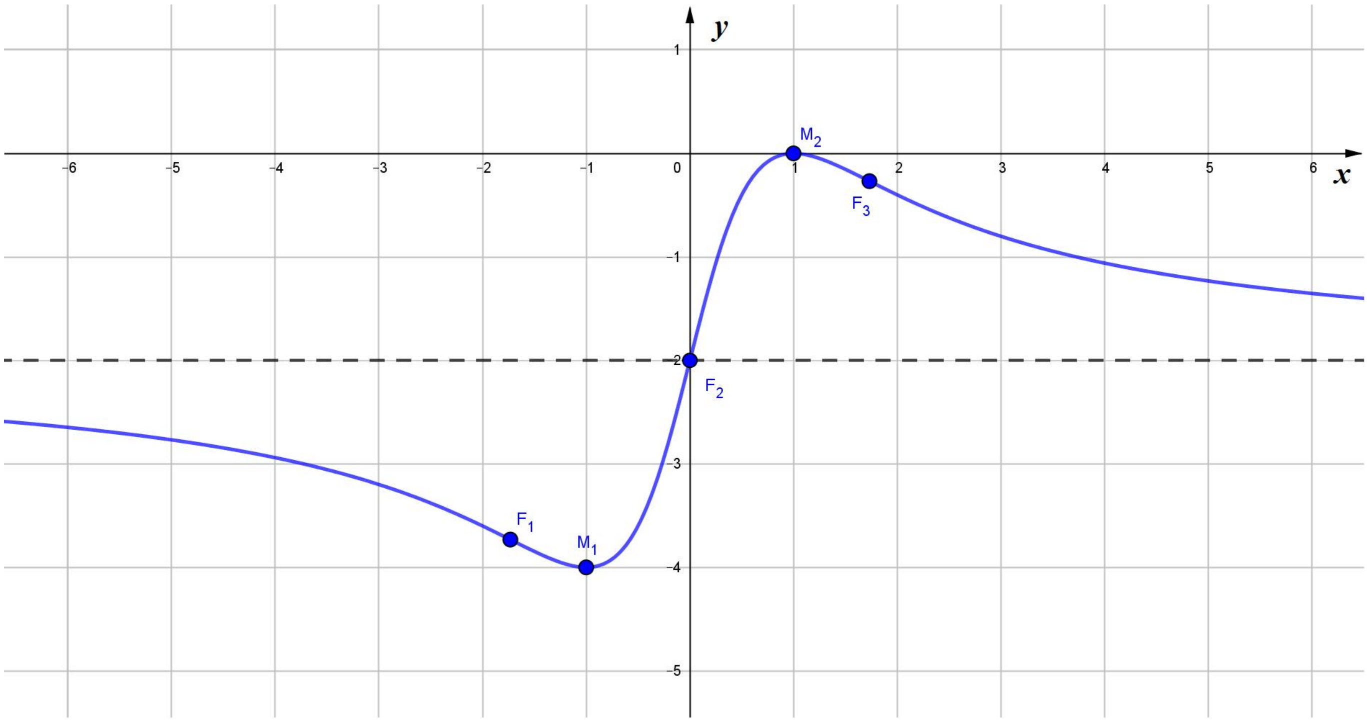
  Flessi:

  $f(-\sqrt{3})=\frac{-4\sqrt{3}}{3+1}-2=-\sqrt{3}-2$

  $f(\sqrt{3})=\frac{4\sqrt{3}}{3+1}-2=\sqrt{3}-2$

  $\Rightarrow$ flessi: $F_1(-\sqrt{3},-\sqrt{3}-2)$, $F_2(0,-2)$ e $F_3(\sqrt{3},\sqrt{3}-2)$

- GRAFICO:



N. 2

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+1)}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}\cdot\dfrac{x}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}2\cdot\dfrac{\ln(2x+1)}{2x}\cdot\dfrac{3x}{e^{3x}-1}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{\overbrace{x^2-1}}}{\underbrace{|x-1|}_{\overset{\downarrow}{1}}\underbrace{x}_{\overset{\downarrow}{0^+}}}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{\overbrace{x^2-1}}}{\underbrace{|x-1|}_{\overset{\downarrow}{1}}\underbrace{x}_{\overset{\downarrow}{0^-}}}=+\infty$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 2° specie in 0; asintoto verticale: $x=0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|x}=$ dal momento che $x\to1^-$ possiamo assumere che $x<1$, quindi

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(1-x)x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+1)}{-x}=-2$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|x}=$ dal momento che $x\to1^+$ possiamo assumere che $x>1$, quindi

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x+1)}{x}=2$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 1° specie in 1; salto: $s=2-(-2)=4$

N. 3

- $f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ x - x^2 & x < 1 \end{cases}$

  La funzione è continua in $\mathbb{R}$, poiché è prodotto di funzioni continue.

  Derivando otteniamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ 1-2x & x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x - 1 = 2 - 1 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 - 2x = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow$ la funzione ammette un punto angoloso in $x = 1$

- $g(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ (composizione di funzioni continue).

  Derivando otteniamo:

  $g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, definita per $x \neq 1$

  Dal momento che:

$$\lim_{x \to 1} g'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

  concludiamo che la funzione $g(x)$ ha un flesso a tangente verticale (ascendente) in $x = 1$

N. 4

Osserviamo innanzitutto che:

$$M(0) = 100 \Rightarrow M_0 \cdot e^0 = 100 \Rightarrow M_0 = 100$$

Quindi il modello del decadimento è:

$$M(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$$

a) $M(3) = 100 \cdot e^{3k} = 58 \Leftrightarrow e^{3k} = \frac{29}{50} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{29}{50}\right) \simeq -0.1816$

b) La rapidità di variazione è definita da: $M'(t) = M_0 \cdot k \cdot e^{k \cdot t}$

   Quindi:

$$M'(3) = M_0 \cdot k \cdot e^{3k} \simeq -18.16 \cdot e^{-0.5448} \simeq -10.532$$

c) Per calcolare il tempo di dimezzamento dobbiamo risolvere l'equazione:

$$M(t) = \frac{M_0}{2} \Leftrightarrow 100 \cdot e^{k \cdot t} = 50 \Leftrightarrow e^{k \cdot t} = 0.5 \Leftrightarrow kt = -\ln 2 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 2}{k} \simeq 3.816889761$$

   Essendo $0.816889761 \cdot 24 \simeq 19.6$, il tempo di dimezzamento è di 3 giorni e 19 ore circa.

d) Per calcolare il tempo necessario perché il campione si riduca a 10 g dobbiamo risolvere l'equazione:

$$M(t) = 10 \Leftrightarrow 100 \cdot e^{k \cdot t} = 10 \Leftrightarrow e^{k \cdot t} = 0.1 \Leftrightarrow k \cdot t = -\ln 10 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 10}{k} \simeq 12.6794333$$

   Essendo $0.6794333 \cdot 24 \simeq 16.3$, il tempo necessario è di 12 giorni e 16 ore circa.

N. 5

Il modello è:

$$M = 0.11 \cdot D^{1.846}$$

a) La biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 30 cm è, quindi:

$$M = 0.11 \cdot 30^{1.846} = 58.64\,kg$$

b) Per calcolare il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 70 kg dobbiamo risolvere l'equazione:

$$70 = 0.11 \cdot D^{1.846} \Leftrightarrow D^{1.846} = \frac{70}{0.11} \Leftrightarrow 1.846 \ln D = \ln\left(\frac{70}{0.11}\right) \Leftrightarrow \ln D = \frac{1}{1.846}\ln\left(\frac{70}{0.11}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln D \simeq 3.4972 \Leftrightarrow D \simeq e^{3.4972} \simeq 33.02\,cm$$

N. 6

- Verifichiamo che il grafico di $f(x) = e^{2x}$ passa per $A(0,1)$:

$$f(0) = e^0 = 1$$

- $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_1 = f'(0) = 2 \cdot e^0 = 2$

  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:

$$y - 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

- Verifichiamo che il grafico di $g(x) = (x-1)^2$ passa per $A(0,1)$:

$$g(0) = (0-1)^2 = 1$$

- $g'(x) = 2(x-1)$

  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_2 = g'(0) = 2(0-1) = -2$

  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:

$$y - 1 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

$\Rightarrow$ le due tangenti non sono ortogonali

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (B)

San Floriano, 22/11/2018

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: __________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=4x\frac{3-x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

a) Senza utilizzare il teorema di de l'Hospital, calcolare: $\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{4x}}{\ln(5x+1)}$

b) Studiare la continuità della funzione $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x+2)}$ per $x = 0$ e $x = -2$

QUESITO 3 (_____/4)

Classificare i punti di non derivabilità delle funzioni $f(x) = (x+3)|x|$ e $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

QUESITO 4 (_____/6)

Una popolazione batterica è inizialmente costituita da 60 esemplari e cresce secondo la legge

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt},$$

ove il tempo t è espresso in minuti. Sapendo che la popolazione arriva a 170 batteri in 30 minuti, determinare:

a) il valore della costante k, approssimato alla 4° cifra decimale;
b) la rapidità di variazione dopo mezzora;
c) il tempo di raddoppio della popolazione;
a) il tempo necessario perché la popolazione superi di 1000 batteri.

QUESITO 5 (_____/4)

Il rapporto tra la biomassa M (in kg di sostanza secca) e diametro alla base D (in cm) per le piante di Eucalipto è descritto dalla relazione allometrica:

$$M = 0.0483 \cdot D^{2.259}$$

Stimare:

a) la biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 40 cm;
b) il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 80 kg.

QUESITO 6 (_____/4)

Verificare che i grafici delle funzioni $f(x) = e^{-2x}$ e $g(x) = (x-1)^2$ passano per il punto $A(0,1)$. Dopo aver determinato l'equazione delle tangenti ai grafici delle due funzioni nel loro punto comune A, dire se tali rette sono coincidenti.

Punteggio totale: ___________/30

Soluzione – fila B

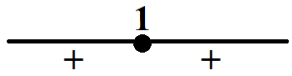
N. 1

$$f(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}$$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ: $f(-x)=1-\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}=1+\frac{2x}{x^2+1}\neq f(x)$ e $f(-x)\neq -f(x)\Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\frac{2x}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq 0$

  $f(0)=1$

  $\Rightarrow$ La curva interseca gli assi cartesiani in $(1,0)$ e $(0,1)$



- ASINTOTI:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\downarrow\ 0}=1$$

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\downarrow\ 0}=1$$

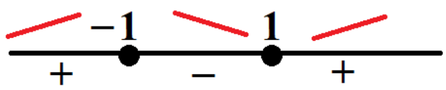
  $\Rightarrow\ y=1$ è asintoto orizzontale della funzione

- MONOTONIA:

  $$f'(x)=0-2\cdot\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)}=2\cdot\frac{x^2-1}{(x^2+1)}\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1\geq 0$$

  Max: $f(-1)=1+\frac{2}{1+1}=2\Rightarrow M_1(-1,2)$

  Min: $f(1)=1-\frac{2}{1+1}=0\Rightarrow M_2(1,0)$



- CONCAVITÀ:

  $$f''(x)=2\cdot\frac{2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)(2x)(x^2-1)}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}\left[x^2+1-2(x^2-1)\right]=$$

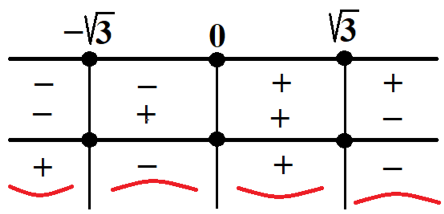
  $$=\frac{4x}{(x^2+1)^3}\left[3-x^2\right]=\frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}\geq 0\Leftrightarrow x(3-x^2)\geq 0$$

  Flessi:

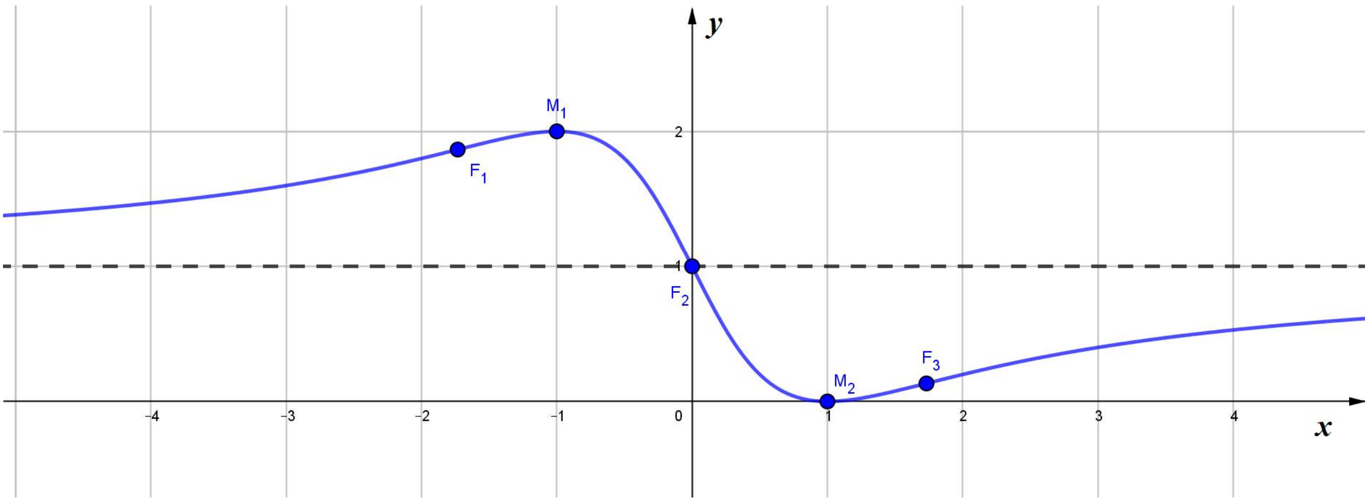
  $$f(-\sqrt{3})=1+\frac{2\sqrt{3}}{3+1}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  $$f(\sqrt{3})=1-\frac{2\sqrt{3}}{3+1}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  $\Rightarrow$ flessi: $F_1\left(-\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2(0,2)$ e $F_3\left(\sqrt{3},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



○ GRAFICO:



N. 2

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{\ln(5x+1)}=\lim_{x\to 0}-\frac{e^{4x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(5x+1)}=\lim_{x\to 0}-4\cdot\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{5x}{\ln(5x+1)}\cdot\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}$

b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{\overbrace{x^2-x}^{\to 2}}{\underbrace{|x|}_{\to 2}\underbrace{(x+2)}_{\to 0^+}}=+\infty$

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{\overbrace{x^2-x}^{\to 2}}{\underbrace{|x|}_{\to 2}\underbrace{(x+2)}_{\to 0^-}}=-\infty$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 2° specie in – 2; asintoto verticale: $x=-2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{|x|(x+2)}=$ dal momento che $x\to 0^-$ possiamo assumere che $x<0$, quindi

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-1)x}{-x(x+2)}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{|x|(x+2)}=$ dal momento che $x\to 0^+$ possiamo assumere che $x>0$, quindi

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)x}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x+2}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 1° specie in 0; salto: $s=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

N. 3

○ $f(x)=(x+3)|x|=\begin{cases} x^2+3x & x\geq 0 \\ -x^2-3x & x<0 \end{cases}$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$, poiché è prodotto di funzioni continue.

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & x>0 \\ -3-2x & x<0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x+3 = 3$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -3-2x = -3$

$\Rightarrow$ la funzione ammette un punto angoloso in $x=0$

- $g(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ (composizione di funzioni continue).

  Derivando otteniamo:

  $g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, definita per $x \neq -1$

  Dal momento che:

  $$\lim_{x\to -1} g'(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty$$

  concludiamo che la funzione $g(x)$ ha un flesso a tangente verticale (ascendente) in $x=-1$

N. 4

Osserviamo innanzitutto che:

$$N(0) = 60 \Rightarrow N_0 \cdot e^0 = 60 \Rightarrow N_0 = 60$$

Quindi il modello è:

$$N(t) = 60 \cdot e^{k\cdot t}$$

a) $N(30) = 60 \cdot e^{30k} = 170 \Leftrightarrow e^{30k} = \frac{17}{6} \Leftrightarrow k = \frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{17}{6}\right) \simeq 0.0347$

b) La rapidità di variazione è definita da: $N'(t) = N_0 \cdot k \cdot e^{k\cdot t}$

   Quindi:

   $$N'(30) = N_0 \cdot k \cdot e^{30k} \simeq 2.0829 \cdot e^{1.0415} \simeq 5.9018$$

c) Per calcolare il tempo di raddoppio dobbiamo risolvere l'equazione:

   $$N(t) = 2N_0 \Leftrightarrow 60 \cdot e^{k\cdot t} = 120 \Leftrightarrow e^{k\cdot t} = 2 \Leftrightarrow kt = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{k} \simeq 19.98$$

   $\Rightarrow$ il tempo di raddoppio è di 20 minuti circa.

d) Per calcolare il tempo necessario perché la popolazione raggiunga i 1000 esemplari dobbiamo risolvere l'equazione:

   $$N(t) = 1000 \Leftrightarrow 60 \cdot e^{k\cdot t} = 1000 \Leftrightarrow e^{k\cdot t} = \frac{50}{3} \Leftrightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{50}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{50}{3}\right)}{k} \simeq 81.07811864$$

   $\Rightarrow$ il tempo necessario è di circa 81 minuti.

N. 5

Il modello è:

$$M = 0.0483 \cdot D^{2.259}$$

a) La biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 40 cm è, quindi:

$$M = 0.0483 \cdot 40^{2.259} = 200.91\, kg$$

b) Per calcolare il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 70 kg dobbiamo risolvere l'equazione:

$$80 = 0.0483 \cdot D^{2.259} \Leftrightarrow D^{2.259} = \frac{80}{0.0483} \Leftrightarrow 2.259 \ln D = \ln\left(\frac{80}{0.0483}\right) \Leftrightarrow \ln D = \frac{1}{2.259} \ln\left(\frac{80}{0.0483}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln D \simeq 3.2813 \Leftrightarrow D \simeq e^{3.2813} \simeq 26.61\, cm$$

N. 6

- Verifichiamo che il grafico di $f(x) = e^{-2x}$ passa per $A(0,1)$:

$$f(0) = e^0 = 1$$

- $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$

  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_1 = f'(0) = -2 \cdot e^0 = -2$

  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:

$$y - 1 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

- Verifichiamo che il grafico di $g(x) = (x-1)^2$ passa per $A(0,1)$:

$$g(0) = (0-1)^2 = 1$$

- $g'(x) = 2(x-1)$

  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_2 = g'(0) = 2(0-1) = -2$

  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:

$$y - 1 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

$\Rightarrow$ le due tangenti coincidono.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (C)

San Floriano, 22/11/2018

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI

DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!

Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.

NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.

Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.

Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.

Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.

Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=-2\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=8x\frac{3-x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

a) Senza utilizzare il teorema di de l'Hospital, calcolare: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(7x+1)}$

b) Studiare la continuità della funzione $f(x)=\frac{x^2-1}{|x+1|(x-2)}$ per $x=2$ e $x=-1$

QUESITO 3 (_____/4)

Classificare i punti di non derivabilità delle funzioni $f(x)=(x-2)|x+1|$ e $g(x)=(x-3)^{\frac{1}{7}}$.

QUESITO 4 (_____/6)

Dopo 10 anni un campione di Piombo-210 si riduce al 73% della quantità iniziale; la legge del decadimento radioattivo è del tipo:

$$M(t)=M_0\cdot e^{kt}.$$

ove il tempo t è misurato in anni. Sapendo che la massa iniziale del campione è $150\,g$, determinare:

a) il valore della costante k, approssimato alla 4° cifra decimale;
b) la rapidità di variazione dopo 10 anni;
c) il tempo di dimezzamento del Piombo-210;
d) il tempo necessario perché il campione si riduca 10 g.

QUESITO 5 (_____/4)

Il rapporto tra la biomassa M (in kg di sostanza secca) e diametro alla base D (in cm) per le piante di Eucalipto è descritto dalla relazione allometrica:

$$M=0.0924\cdot D^{1.901}$$

Stimare:

a) la biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 50 cm;
b) il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 75 kg.

QUESITO 6 (_____/4)

Verificare che i grafici delle funzioni $f(x)=e^{-2x}$ e $g(x)=(x+1)^2$ passano per il punto $A(0,1)$. Dopo aver determinato l'equazione delle tangenti ai grafici delle due funzioni nel loro punto comune A, dire se tali rette sono perpendicolari tra loro.

Punteggio totale: ___________/30

Soluzione – fila C

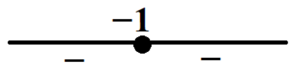
N. 1

$$f(x) = -2\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)$$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ: $f(-x) = -2\left(-\frac{2x}{x^2+1}+1\right) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+x^2+1}{x^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \leq 0$

  $f(0) = -2$

  $\Rightarrow$ La curva interseca gli assi cartesiani in $(-1,0)$ e $(0,-2)$



- ASINTOTI:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2\left(\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\downarrow\, 0}+1\right) = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2\left(\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\downarrow\, 0}+1\right) = -2$$

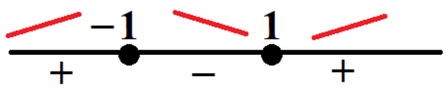
$\Rightarrow$ $y=-2$ è asintoto orizzontale della funzione

- MONOTONIA:

$$f'(x) = -2\cdot 2\cdot\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)} = 4\cdot\frac{x^2-1}{(x^2+1)} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0$$

Max: $f(-1) = -2\left(\frac{-2}{1+1}+1\right) = 0 \Rightarrow M_1(-1,0)$

Min: $f(1) = -2\left(\frac{2}{1+1}+1\right) = -4 \Rightarrow M_2(1,-4)$



- CONCAVITÀ:

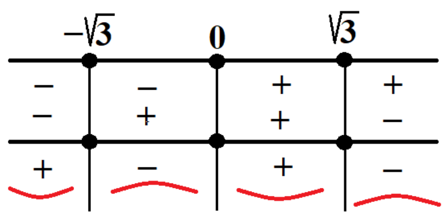
$$f''(x) = 4\cdot\frac{2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)(2x)(x^2-1)}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}\left[x^2+1-2(x^2-1)\right] =$$

$$= \frac{8x}{(x^2+1)^3}\left[3-x^2\right] = \frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow x(3-x^2) \geq 0$$

Flessi:

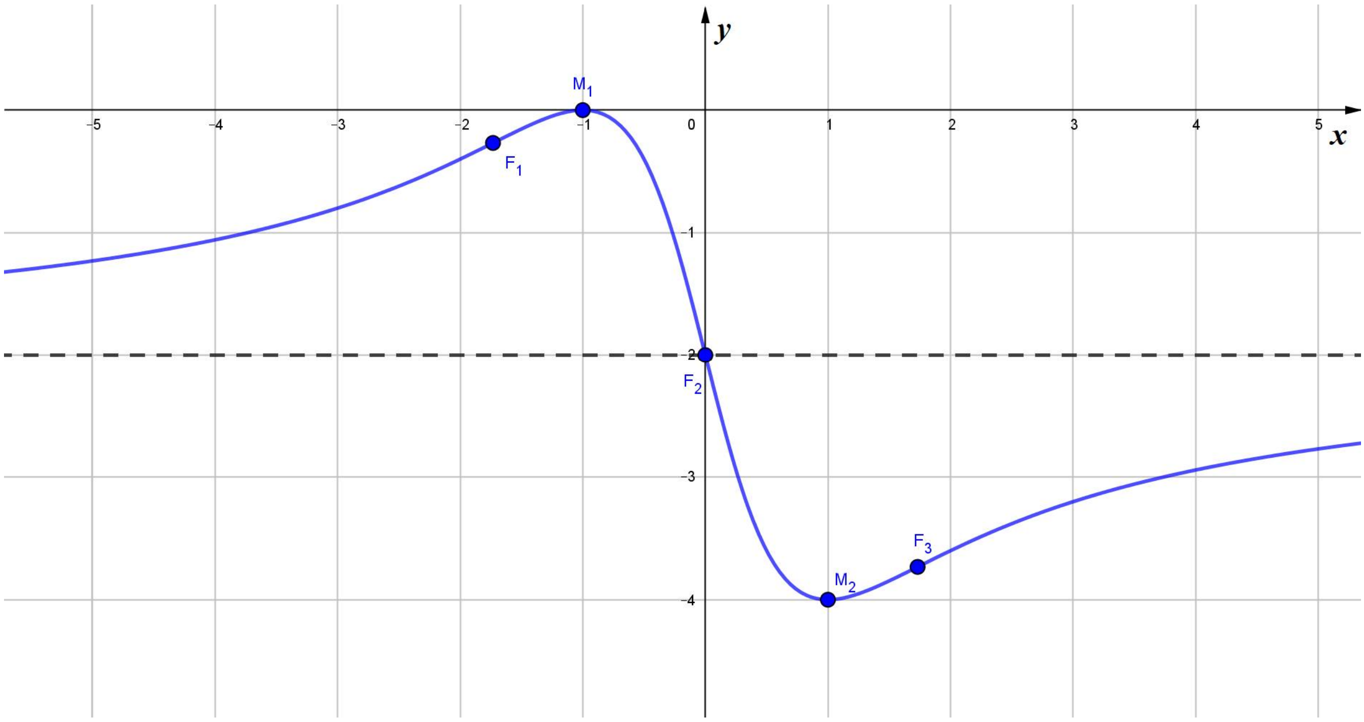
$$f(-\sqrt{3}) = -2\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3+1}+1\right) = \sqrt{3}-2$$

$$f(\sqrt{3}) = -2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3+1}+1\right) = -\sqrt{3}-2$$



$\Rightarrow$ flessi: $F_1\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}-2\right)$, $F_2\left(0,-2\right)$ e $F_3\left(\sqrt{3},-\sqrt{3}-2\right)$

- GRAFICO:



N. 2

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(7x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(7x+1)}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{7x}{\ln(7x+1)}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$$

b) $$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overbrace{x^2-1}^{\overset{3}{\uparrow}}}{\underbrace{|x+1|}_{\underset{3}{\downarrow}}\underbrace{(x-2)}_{\underset{0^+}{\downarrow}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{x^2-1}^{\overset{3}{\uparrow}}}{\underbrace{|x+1|}_{\underset{3}{\downarrow}}\underbrace{(x-2)}_{\underset{0^-}{\downarrow}}}=-\infty$$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 2° specie in 2; asintoto verticale: $x=2$

$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1}{|x+1|(x-2)}=$ dal momento che $x\to -1^-$ possiamo assumere che $x<-1$, quindi

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{(-1-x)(x-2)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1)}{-(x-2)}=-\frac{2}{3}$$

$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{|x+1|(x-2)}=$ dal momento che $x\to -1^+$ possiamo assumere che $x>-1$, quindi

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 1° specie in 1; salto: $s=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

N. 3

- $f(x)=(x-2)|x+1|=\begin{cases} x^2-x-2 & x\geq 1 \\ -x^2+x+2 & x<1 \end{cases}$

  La funzione è continua in $\mathbb{R}$, poiché è prodotto di funzioni continue.

  Derivando otteniamo:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>1 \\ 1-2x & x<1 \end{cases}$$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x-1=2-1=1$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1-2x=1-2=-1$

  $\Rightarrow$ la funzione ammette un punto angoloso in $x=1$

- $g(x)=(x-3)^{\frac{1}{7}}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ (composizione di funzioni continue).

  Derivando otteniamo:

  $g'(x)=\frac{1}{7}(x-3)^{-\frac{6}{7}}=\frac{1}{7\sqrt[7]{(x-3)^6}}$, definita per $x\neq 1$

  Dal momento che:

$$\lim_{x\to 3} g'(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{7\sqrt[7]{(x-3)^6}}=+\infty$$

  concludiamo che la funzione $g(x)$ ha un flesso a tangente verticale (ascendente) in $x=3$

N. 4

Osserviamo innanzitutto che:

$$M(0)=150 \Rightarrow M_0\cdot e^0=150 \Rightarrow M_0=150$$

Quindi il modello del decadimento è:

$$M(t)=150\cdot e^{k\cdot t}$$

a) $M(10)=150\cdot e^{10k}=109.5 \Leftrightarrow e^{10k}=\frac{109.5}{150} \Leftrightarrow k=\frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{109.5}{150}\right)\simeq -0.0315$

b) La rapidità di variazione è definita da: $M'(t)=M_0\cdot k\cdot e^{k\cdot t}$

   Quindi:

$$M'(10)=M_0\cdot k\cdot e^{10k}\simeq -4.725\cdot e^{-0.315}\simeq -3.4483$$

c) Per calcolare il tempo di dimezzamento dobbiamo risolvere l'equazione:

$$M(t)=\frac{M_0}{2} \Leftrightarrow 150\cdot e^{k\cdot t}=75 \Leftrightarrow e^{k\cdot t}=0.5 \Leftrightarrow kt=-\ln 2 \Leftrightarrow t=-\frac{\ln 2}{k}\simeq 22.0046724$$

   $\Rightarrow$ il tempo di dimezzamento è di 22 anni circa.

d) Per calcolare il tempo necessario perché il campione si riduca a 10 g dobbiamo risolvere l'equazione:

$$M(t)=10 \Leftrightarrow 150\cdot e^{k\cdot t}=10 \Leftrightarrow e^{k\cdot t}=\frac{1}{15} \Leftrightarrow k\cdot t=-\ln 15 \Leftrightarrow t=-\frac{\ln 15}{k}\simeq 85.96984765$$

Essendo $0.96984765\cdot 12\simeq 11.64$, il tempo necessario è di circa 85 anni e 11 mesi (e mezzo).

N. 5

Il modello è:

$$M=0.0924\cdot D^{1.901}$$

a) La biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 30 cm è, quindi:

$$M=0.0924\cdot 50^{1.901}=156.82kg$$

b) Per calcolare il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 70 kg dobbiamo risolvere l'equazione:

$$75=0.0924\cdot D^{1.901} \Leftrightarrow D^{1.901}=\frac{75}{0.0924} \Leftrightarrow 1.901\ln D=\ln\left(\frac{75}{0.0924}\right) \Leftrightarrow \ln D=\frac{1}{1.901}\ln\left(\frac{75}{0.0924}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln D\simeq 3.5234 \Leftrightarrow D\simeq e^{3.5234}\simeq 33.9\,cm$$

N. 6

- Verifichiamo che il grafico di $f(x)=e^{-2x}$ passa per $A(0,1)$:
$$f(0)=e^0=1$$
- $f'(x)=-2\cdot e^{-2x}$
  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_1=f'(0)=-2\cdot e^0=-2$
  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:
$$y-1=-2(x-0) \Leftrightarrow y=-2x+1$$
- Verifichiamo che il grafico di $g(x)=(x+1)^2$ passa per $A(0,1)$:
$$g(0)=(0+1)^2=1$$
- $g'(x)=2(x+1)$
  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_2=g'(0)=2(0+1)=2$
  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:
$$y-1=2(x-0) \Leftrightarrow y=2x+1$$

$\Rightarrow$ le due tangenti non sono ortogonali

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

1° Parziale di MATEMATICA (D)

San Floriano, 22/11/2018

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: _________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che il mio elaborato venga corretto e valutato. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: _____________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che il mio elaborato non venga corretto nè valutato.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI UTILIZZARE TESTI E/O APPUNTI, NÈ COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della "brutta copia" (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni. Punteggi parziali potranno essere assegnati a svolgimenti incompleti o con errori non particolarmente gravi.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. Buon lavoro!

Lorenzo Meneghini

Testo della prova

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}+1$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=4x\frac{x^2-3}{\left(x^2+1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

a) Senza utilizzare il teorema di de l'Hospital, calcolare: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-5x} - 1}{\ln(4x+1)}$

b) Studiare la continuità della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x|(x-1)}$ per $x = 0$ e $x = 1$

QUESITO 3 (_____/4)

Classificare i punti di non derivabilità delle funzioni $f(x) = (x+1)|x|$ e $g(x) = \sqrt[5]{x+3}$.

QUESITO 4 (_____/6)

Una coltura batterica si sviluppa secondo la legge

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt},$$

ove il tempo è espresso in ore. Sapendo che la popolazione è inizialmente costituita da 120 batteri e che dopo un'ora i batteri sono 180, determinare:

a) il valore della costante k, approssimato alla 4° cifra decimale;
b) la rapidità di variazione dopo 2 ore;
c) il tempo di raddoppio della popolazione;
a) il tempo necessario perché la popolazione raggiunga i 75000 batteri.

QUESITO 5 (_____/4)

Il rapporto tra la biomassa M (in kg di sostanza secca) e diametro alla base D (in cm) per le piante di Eucalipto è descritto dalla relazione allometrica:

$$M = 0.0483 \cdot D^{2.259}$$

Stimare:

a) la biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 35 cm;
b) il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 90 kg.

QUESITO 6 (_____/4)

Verificare che i grafici delle funzioni $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = (x+1)^2$ passano per il punto $A(0,1)$. Dopo aver determinato l'equazione delle tangenti ai grafici delle due funzioni nel loro punto comune A, dire se tali rette sono coincidenti.

Punteggio totale: ___________/30

Soluzione – fila D

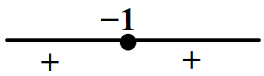
N. 1

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}+1$$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ: $f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}+1=\frac{2x}{x^2+1}+1\neq f(x)$ e $f(-x)\neq -f(x)\Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- SEGNO E INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$

  $f(0)=1$

  $\Rightarrow$ La curva interseca gli assi cartesiani in $(1,0)$ e $(0,1)$



- ASINTOTI:

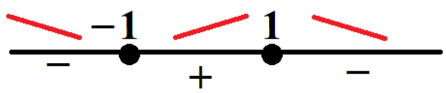
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\downarrow\atop 0}+1=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\downarrow\atop 0}+1=1$$

$\Rightarrow$ $y=1$ è asintoto orizzontale della funzione

- MONOTONIA:

$$f'(x)=2\cdot\frac{x^2+1-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}+0=2\cdot\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$$



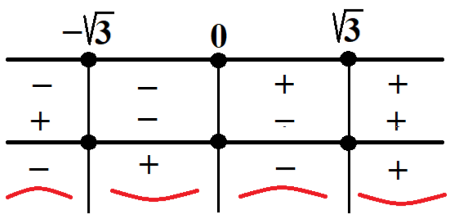
Min: $f(-1)=-\frac{2}{1+1}+1=0 \Rightarrow M_1(-1,0)$

Max: $f(1)=\frac{2}{1+1}+1=2 \Rightarrow M_2(1,2)$

- CONCAVITÀ:

$$f''(x)=2\cdot\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)(2x)\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-4x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}\left[x^2+1+2\left(1-x^2\right)\right]=$$

$$=-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^3}\left[3-x^2\right]=\frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}\geq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)\geq 0$$



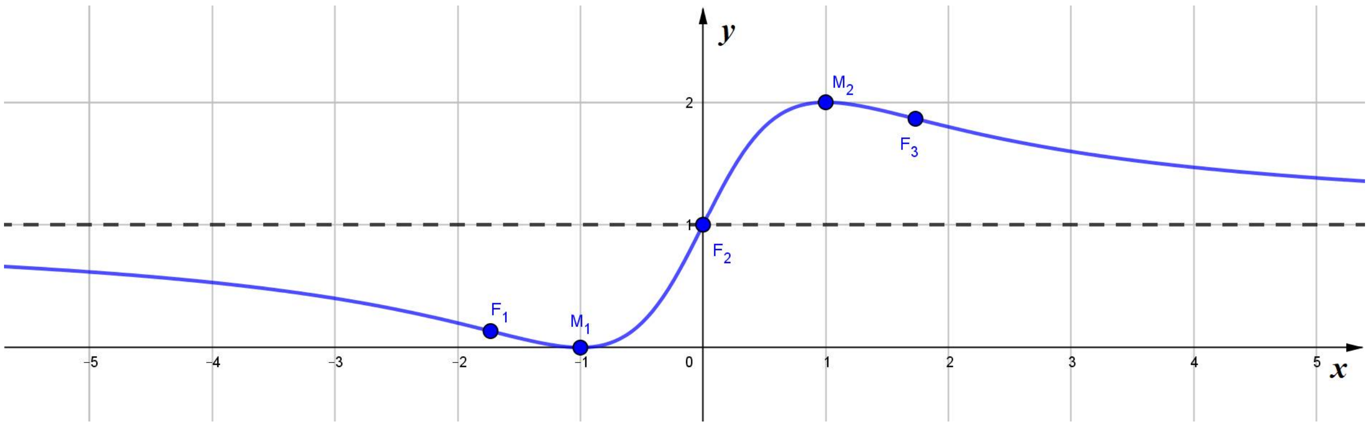
Flessi:

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3+1}+1=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3+1}+1=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ flessi: $F_1\left(-\sqrt{3},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2(0,1)$ e $F_3\left(\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- GRAFICO:



N. 2

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\ln(4x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(4x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}-5\dfrac{e^{-5x}-1}{-5x}\cdot\dfrac{4x}{\ln(4x+1)}\cdot\dfrac{1}{4}=-\dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\overbrace{x^2-2x}^{\uparrow\, -1}}{\underbrace{|x|}_{\downarrow\, 1}\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\, 0^+}}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\overbrace{x^2-2x}^{\uparrow\, -1}}{\underbrace{|x|}_{\downarrow\, 1}\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\, 0^-}}=+\infty$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 2° specie in 1; asintoto verticale: $x=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x-1)}=$ dal momento che $x\to 0^-$ possiamo assumere che $x<0$, quindi

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x-2)x}{-x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{x-2}{x-1}=-2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-2x}{|x|(x-1)}=$ dal momento che $x\to 0^+$ possiamo assumere che $x>0$, quindi

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-2)x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-2}{x-1}=2$

$\Rightarrow$ la funzione ha una discontinuità di 1° specie in 0; salto: $s=2-(-2)=4$

N. 3

- $f(x)=(x+1)|x|=\begin{cases}x^2+x & x\ge 0\\ -x^2-x & x<0\end{cases}$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$, poiché è prodotto di funzioni continue.

Derivando otteniamo:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ -2x-1 & x<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} -2x-1=-1$

$\Rightarrow$ la funzione ammette un punto angoloso in $x=0$

- $g(x)=\sqrt[5]{x+3}=(x+3)^{\frac{1}{5}}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ (composizione di funzioni continue).

  Derivando otteniamo:

  $g'(x)=\dfrac{1}{5}(x+3)^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{(x+3)^4}}$, definita per $x\neq -3$

  Dal momento che:

$$\lim_{x\to -3} g'(x)=\lim_{x\to -3}\frac{1}{5\sqrt[5]{(x+3)^4}}=+\infty$$

  concludiamo che la funzione $g(x)$ ha un flesso a tangente verticale (ascendente) in $x=-3$

N. 4

Osserviamo innanzitutto che:

$$N(0)=120 \Rightarrow N_0\cdot e^0=120 \Rightarrow N_0=120$$

Quindi il modello è:

$$N(t)=120\cdot e^{k\cdot t}$$

a) $N(1)=120\cdot e^k=180 \Leftrightarrow e^k=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow k=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\simeq 0.4055$

b) La rapidità di variazione è definita da: $N'(t)=N_0\cdot k\cdot e^{k\cdot t}$

   Quindi:

$$N'(2)=N_0\cdot k\cdot e^k\simeq 48.66\cdot e^{0.811}\simeq 109.49$$

c) Per calcolare il tempo di raddoppio dobbiamo risolvere l'equazione:

$$N(t)=2N_0 \Leftrightarrow 120\cdot e^{k\cdot t}=240 \Leftrightarrow e^{k\cdot t}=2 \Leftrightarrow kt=\ln 2 \Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{k}\simeq 1.709364193$$

   $\Rightarrow$ dal momento che $0.709364193\cdot 60=42.56$, il tempo di raddoppio è di 1 ora e 43 minuti circa.

d) Per calcolare il tempo necessario perché la popolazione raggiunga i 75000 dobbiamo risolvere l'equazione:

$$N(t)=75000 \Leftrightarrow 120\cdot e^{k\cdot t}=75000 \Leftrightarrow e^{k\cdot t}=625 \Leftrightarrow k\cdot t=\ln 625 \Leftrightarrow t=\frac{4\ln 5}{k}\simeq 15.87608298$$

   $\Rightarrow$ dal momento che $0.87608298\cdot 60=52.56$ il tempo necessario è di circa 15 ore e 53 minuti.

N. 5

Il modello è:

$$M=0.0483\cdot D^{2.259}$$

a) La biomassa di una pianta il cui diametro alla base è 35 cm è, quindi:

$$M=0.0483\cdot 35^{2.259}=148.59\,kg$$

b) Per calcolare il diametro alla base di una pianta la cui biomassa è 90 kg dobbiamo risolvere l'equazione:

$$90 = 0.0483 \cdot D^{2.259} \Leftrightarrow D^{2.259} = \frac{90}{0.0483} \Leftrightarrow 2.259 \ln D = \ln\left(\frac{90}{0.0483}\right) \Leftrightarrow \ln D = \frac{1}{2.259}\ln\left(\frac{90}{0.0483}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln D \simeq 3.3334 \Leftrightarrow D \simeq e^{3.3334} \simeq 28.03\,cm$$

N. 6

- Verifichiamo che il grafico di $f(x) = e^{2x}$ passa per $A(0,1)$:
$$f(0) = e^0 = 1$$
- $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$
  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_1 = f'(0) = 2 \cdot e^0 = 2$
  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:
$$y - 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

- Verifichiamo che il grafico di $g(x) = (x+1)^2$ passa per $A(0,1)$:
$$g(0) = (0+1)^2 = 1$$

- $g'(x) = 2(x+1)$
  $\Rightarrow$ il coefficiente angolare della tangente è $m_2 = g'(0) = 2(0+1) = 2$
  $\Rightarrow$ l'equazione della tangente in A al grafico della funzione data è:
$$y - 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

$\Rightarrow$ le due tangenti coincidono.