- **APPELLO ORDINARIO:** quesiti n. 1 / 2 / 5 / 6 / 7 / 10
- **COMPITINO A:** quesiti n. 1 / 2 / 3 / 4 / 5
- **COMPITINO B:** quesiti n. 6 / 7 / 8 / 9 / 10 / 11 / 12

Testo della prova d'esame (A)

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''\left(x\right)=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

La funzione $y=x\cdot e^x$ e la retta $y=ex$ si intersecano nell'origine ed in un altro punto P. Dopo aver determinato le coordinate del punto P, scrivere l'equazione della tangente al grafico della funzione nel punto P.

QUESITO 3 (_____/6)

Verificare se la funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo [0, 2] ed individuare, in tale intervallo, i punti che soddisfano la relazione da esso espressa.

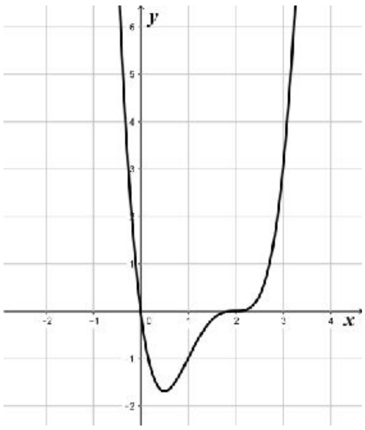
QUESITO 4 (_____/6)

Determinare le equazioni degli asintoti della funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x\ln x}{x-2}$.

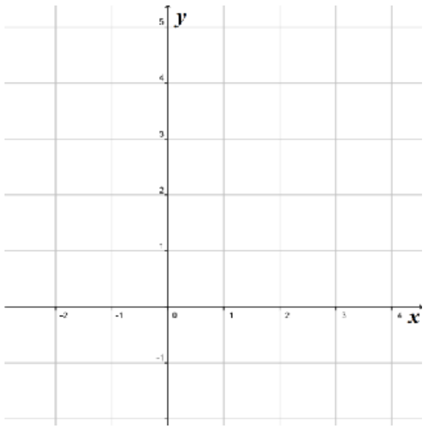
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f\left(x\right)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio.

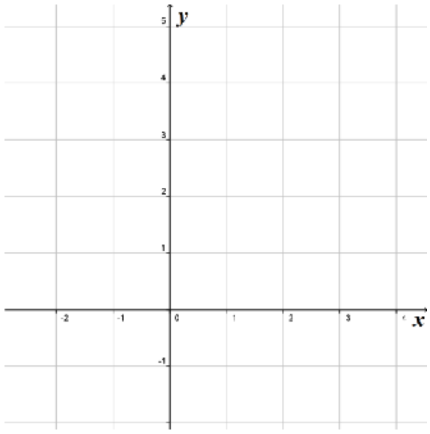
$y=f\left(x\right)$



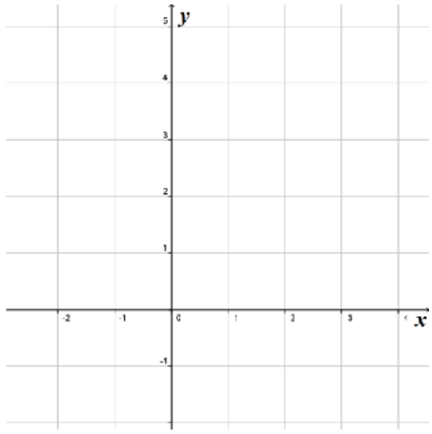
$y=\left|f\left(x\right)\right|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-1)+1$

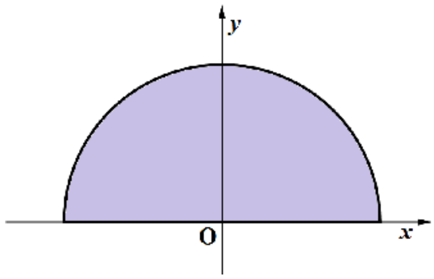


Individuare le ascisse degli eventuali punti angolosi della funzione $y = |f(x)|$ e le equazioni degli eventuali asintoti verticali della funzione $y = \ln|f(x)|$.

QUESITO 6 (_____/4)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - xy + 4x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

QUESITO 7 (_____/4)



a) La funzione $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ descrive la superficie S in figura, base di un solido le cui sezioni con piani ortogonali all'asse *x* sono quadrati. Determinare il volume del solido.

b) Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ e studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

QUESITO 8 (_____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 9 (_____/5)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' - 2y' - 8y = e^{2x}$.

QUESITO 10 (_____/4)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ -x - z = -3 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ 2x - 4y - 3z = 0 \end{cases}$

QUESITO 11 (_____/5)

a) Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcolare il prodotto tra la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e la sua trasposta.

QUESITO 12 (______/5)

Tra le primitive della funzione $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $(0,1)$; calcolare

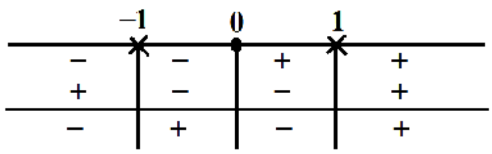
$$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

SOLUZIONI

N. 1

La funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ ha dominio $D: x \neq \pm 1$.

- PARITÀ: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x) \Rightarrow$ funzione dispari!!



- SEGNO:
  La funzione passa per l'origine.

- ASINTOTI:

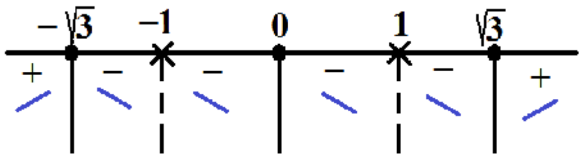
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow x = 1$$ è asintoto verticale per la funzione (e, per simmetria, anche $x = -1$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty \Rightarrow$$ no asintoti orizzontali!!

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow q = 0$$

Quindi la funzione ammette la retta $y = x$ come asintoto obliquo.



- CRESCENZA:

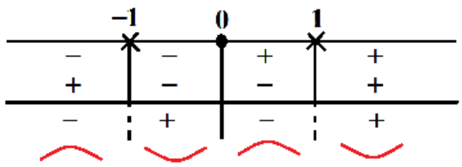
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \ldots = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \geq 0$$

Max: $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

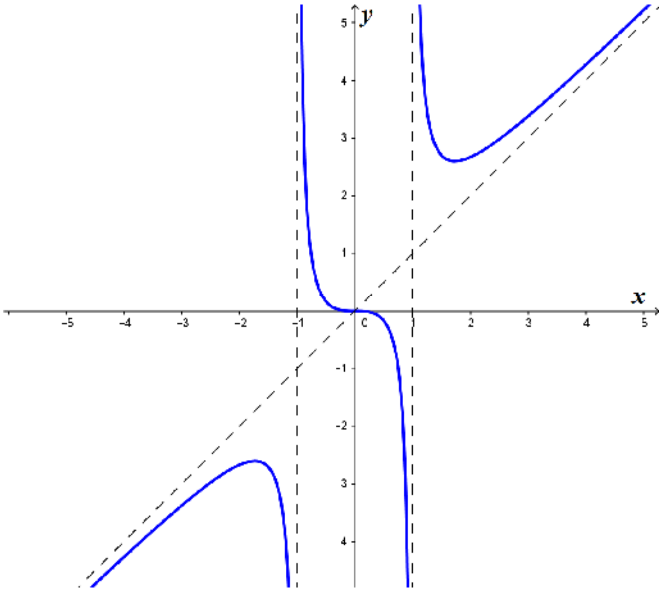
min: $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- CONCAVITÀ:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x(x^4 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = \ldots = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \geq 0$$



Quindi la funzione data ammette un unico flesso di ascissa $x_0 = 0$, cioè: $(0,0)$



N. 2
Intersechiamo la curva con la retta:

$$\begin{cases} y = x \cdot e^x \\ y = ex \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$ex = x \cdot e^x \Rightarrow x\left(e^x - e\right) = 0$$

ed ammette come soluzioni $x = 0, x = 1$.
Quindi $P(1, e)$.
Per trovare la tangente in P al grafico della funzione:

$$y' = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1) \Rightarrow m = y'(1) = 2e$$

Equazione della tangente:

$$y - e = 2e(x-1) \Leftrightarrow y = 2ex - e$$

N. 3
La funzione $f(x)$ è continua e derivabile nel suo dominio: $x \neq -1$.
Pertanto è continua in $[0,2]$ e derivabile in $(0,2)$.
$\Rightarrow$ $f(x)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo [0, 2].
Essendo:

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \text{e} \quad f(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

risulta

$$\frac{f(2) - f(0)}{2-0} = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Pertanto:

$$f'(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2-0} \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

La soluzione accettabile è:

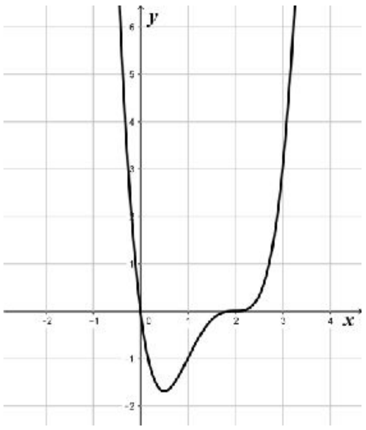
$$x = -1 + \sqrt{3}$$

N. 4
La funzione è definita per $x>0, x\neq 2$.

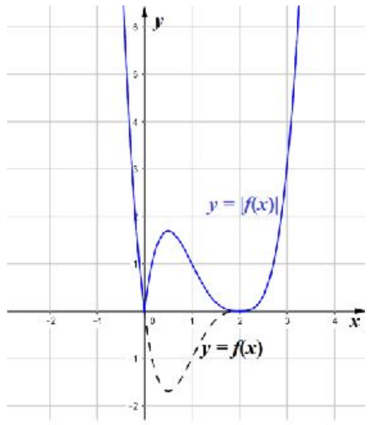
- o $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} =_H \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x-2} = 0$
- o $\lim_{x\to 2} \frac{x\ln x}{x-2} = \infty \Rightarrow$ asintoto verticale: $x=2$
- o $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\ln x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-2}\ln x = +\infty$ essendo $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow f(x)$ non ha asintoti orizzontali.
- o $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x-2} =_H \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow f(x)$ non ha nemmeno asintoti obliqui.

N. 5

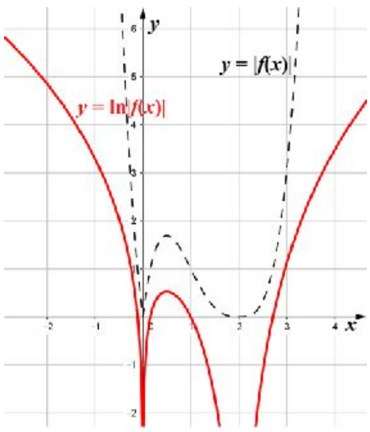
$y = f(x)$



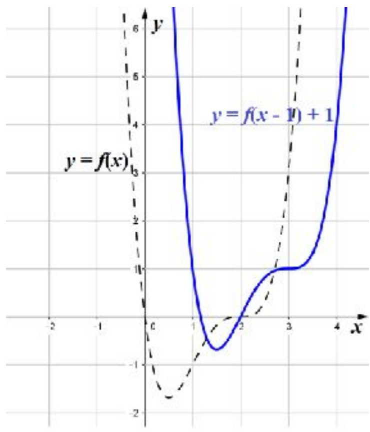
$y = |f(x)|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-1)+1$



- o La funzione $y=|f(x)|$ ha un punto angoloso in $x=0$, ma non in $x=2$ in quanto la funzione $f(x)$ ha ivi tangente orizzontale.
- o La funzione $y=\ln|f(x)|$ ammette asintoti verticali $x=0$ e $x=2$ in corrispondenza degli zeri della funzione $f(x)$.

N. 6
Separiamo le variabili:

$$y' - xy + 4x = 0 \Leftrightarrow y' = x(y-4) \Leftrightarrow \frac{dy}{y-4} = x\,dx$$

Integrando membro a membro otteniamo:

$$\ln|y-4| = \frac{x^2}{2} + c$$

e passando all’esponenziale

$$|y-4| = e^{c+\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow |y-4| = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

da cui si ricava $y = 4 + k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ con $k \in \mathbb{R}$.
Determiniamo la funzione che risolve il problema di Cauchy:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 4 + k = 1 \Leftrightarrow k = -3$$

La soluzione cercata è, quindi:

$$y = 4 - 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

N. 7

a) L’elemento di volume è $dV = S(x)dx = [f(x)]^2 dx = (4 - x^2)dx$. Integrando, otteniamo:

$$V = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \ldots = \frac{32}{3} u^3$$

b) Affinchè risulti $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ dev’essere:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2 - 1}$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]$$

Per definizione:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \int_{2}^{b} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_{2}^{b} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 3) = \frac{\ln 3}{2}$$

L’integrale converge a $\frac{\ln 3}{2}$.

N. 8

Calcoliamo il determinante della matrice, applicando il metodo di Sarrus:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice è invertibile.}$$

Per trovare l’inversa, calcoliamo la matrice cofattore:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi:

$$cofA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(cofA)^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N. 9

Prima di risolvere l'equazione non omogenea $y''-2y'-8y=e^{2x}$, dobbiamo trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$y''-2y'-8y=0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2-2\lambda-8=0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}=1+8=9\Rightarrow 1\pm 3= \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi=c_1e^{4x}+c_2e^{-2x}$$

Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea tra le funzioni del tipo $f(x)=ke^{2x}$.
Derivando otteniamo:

$$f'(x)=2ke^{2x} \quad \text{e} \quad f''(x)=4ke^{2x}$$

Sostituendo:

$$ke^{2x}[4-4-8]=e^{2x} \Leftrightarrow -8ke^{2x}=e^{2x} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{8}$$

La soluzione cercata è, quindi:

$$y=c_1e^{4x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{8}e^{2x}$$

N. 10

a) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ -x-z=-3 \\ 4x-y+z=7 \end{cases}$ applicando il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

La soluzione del sistema è

$$(1,-1,2)$$

b) Risolviamo il sistema $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ 5x-3y-4z=0 \\ 2x-4y-3z=0 \end{cases}$ applicando il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema si è ridotto a $\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$ ed ammette ∞^1 soluzioni, del tipo:

$$(-y,y,-2y), y\in\mathbb{R}$$

N. 11

a) Osserviamo che nella matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la 4° riga è la somma della 2° e della 3° $\Rightarrow rg(A)<4$.

Calcoliamo il determinante del minore di ordine 3

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

applicando il Teorema di Laplace alle 1° riga:

$$\det M=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}(-5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=10\neq 0$$

Quindi $rg(A)=3$.

b) Consideriamo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e la sua trasposta $A^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il loro prodotto scalare righe per colonne è:

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

N. 12

Integrando per parti:

$$\int x\cdot e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\int -\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot 1dx=-\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$$

Imponendo la condizione di passaggio per $(0,1)$:

$$F(0)=-\frac{1}{4}+c=1 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4}$$

Quindi la primitiva cercata è

$$F(x)=-e^{-2x}\cdot\frac{2x-1}{4}+\frac{5}{4}$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\cdot\frac{2x-1}{4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{4e^{2x}}=_H\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{8e^{2x}}=0$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty} -e^{-2x}\cdot\frac{2x-1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

Testo della prova d'esame (B)

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''\left(x\right)=\dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$, determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/6)

La funzione $y=x\cdot e^{-x}$ e la retta $y=ex$ si intersecano nell'origine ed in un altro punto P. Dopo aver determinato le coordinate del punto P, scrivere l'equazione della tangente al grafico della funzione nel punto P.

QUESITO 3 (_____/6)

Verificare se la funzione $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo [–1, 1] ed individuare, in tale intervallo, i punti che soddisfano la relazione da esso espressa.

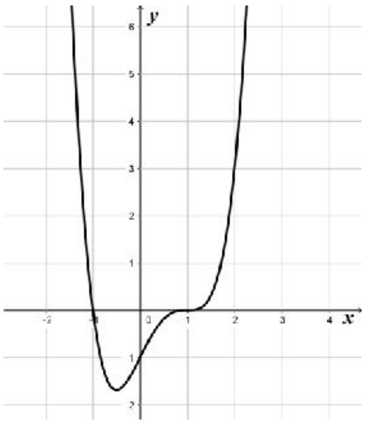
QUESITO 4 (_____/6)

Determinare le equazioni degli asintoti della funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x\ln x}{x-3}$.

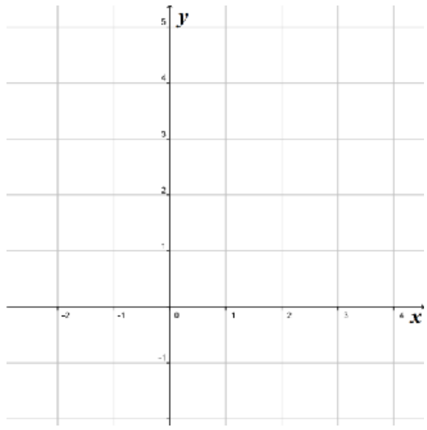
QUESITO 5 (_____/6)

Dato il grafico della funzione $f\left(x\right)$ in figura, disegnare i grafici delle funzioni seguenti, negli spazi a disposizione in questo foglio.

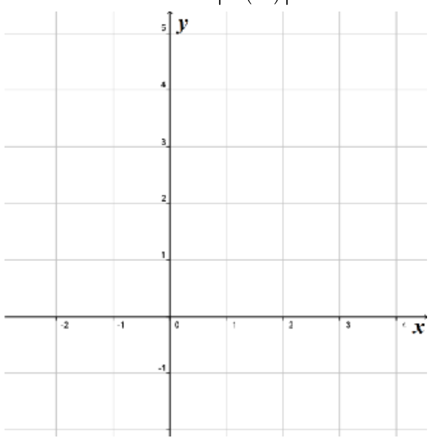
$y=f\left(x\right)$



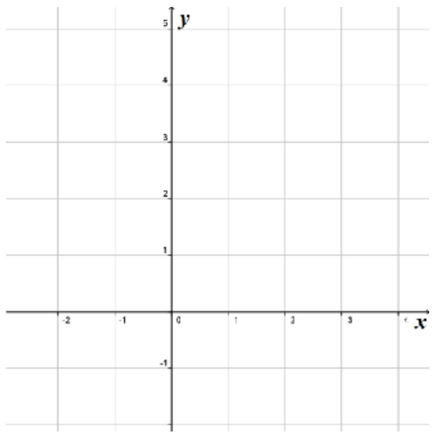
$y=\left|f\left(x\right)\right|$



$y=\ln\left|f\left(x\right)\right|$



$y=f\left(x-1\right)+1$

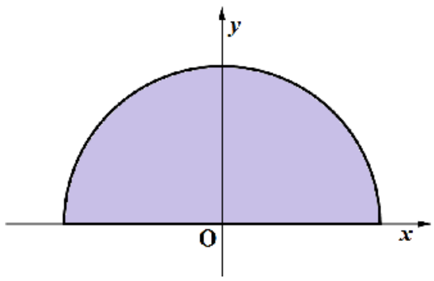


Individuare le ascisse degli eventuali punti angolosi della funzione $y = |f(x)|$ e le equazioni degli eventuali asintoti verticali della funzione $y = \ln|f(x)|$.

QUESITO 6 (_____/4)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' - xy + 6x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

QUESITO 7 (_____/4)



a) La funzione $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ descrive la superficie S in figura, base di un solido le cui sezioni con piani ortogonali all'asse *x* sono quadrati. Determinare il volume del solido.

b) Dimostrare che esistono due numeri reali A e B tali che $\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$ e studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4}\, dx$$

QUESITO 8 (_____/4)

Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

QUESITO 9 (_____/5)

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea: $y'' + 2y' - 8y = e^{-2x}$.

QUESITO 10 (_____/4)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 5x - 2y + 2z = 8 \\ -2x - y - 2z = -5 \\ -x - z = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

QUESITO 11 (_____/5)

a) Determinare il rango della matrice: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) Calcolare il prodotto tra la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e la sua trasposta.

QUESITO 12 (_____/5)

Tra le primitive della funzione $f(x) = x \cdot e^{3x}$ sia $F(x)$ quella passante per il punto $(0,2)$; calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)$$

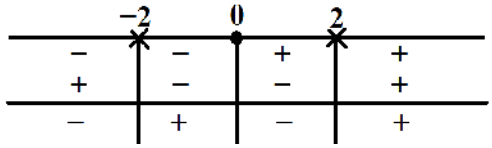
SOLUZIONI

N. 1

La funzione $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ ha dominio $D: x \neq \pm 2$.

- PARITÀ: $f\left(-x\right)=\dfrac{\left(-x\right)^3}{\left(-x\right)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f\left(x\right) \Rightarrow$ funzione dispari!!

- SEGNO:
  La funzione passa per l'origine.



- ASINTOTI:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow x=2$$ è asintoto verticale per la funzione (e, per simmetria, anche $x=-2$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-\frac{4}{x^2}}=\infty \Rightarrow$$ no asintoti orizzontali!!

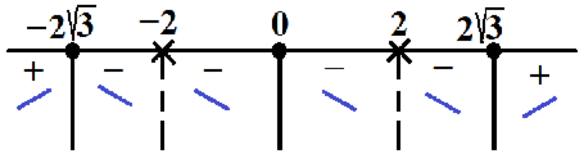
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1 \Rightarrow m=1$$

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-1}=0 \Rightarrow q=0$$

Quindi la funzione ammette la retta $y=x$ come asintoto obliquo.

- CRESCENZA:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-4\right)-2x\cdot x^3}{\left(x^2-4\right)^2}=\ldots=\frac{x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2}\geq 0$$

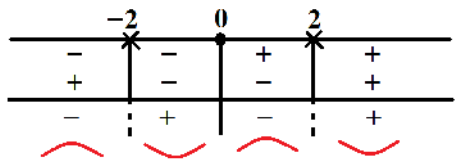


Max: $\left(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3}\right)$

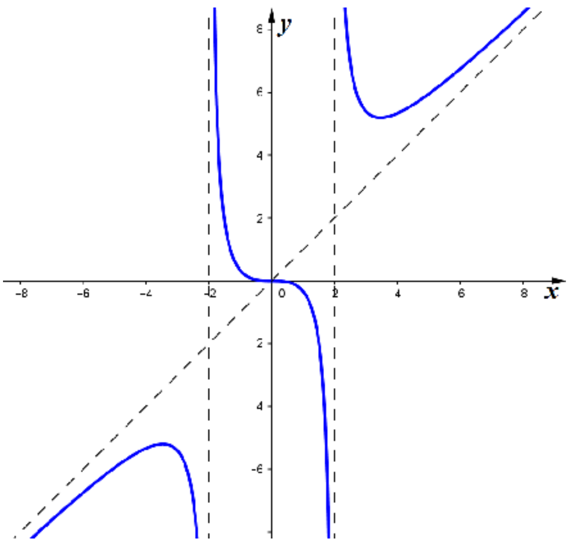
min: $\left(2\sqrt{3},3\sqrt{3}\right)$

- CONCAVITÀ:

$$f''(x)=\frac{\left(4x^3-24x\right)\left(x^2-4\right)^2-2\left(x^2-4\right)\cdot 2x\left(x^4-12x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=\ldots=\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}\geq$$



Quindi la funzione data ammette un unico flesso di ascissa $x_0=0$,
cioè: $(0,0)$



N. 2

Intersechiamo la curva con la retta:

$$\begin{cases} y = x \cdot e^{-x} \\ y = ex \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$ex = x \cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; x\left(e^{-x} - e\right) = 0$$

ed ammette come soluzioni $x = 0, x = 1$.

Quindi $P(-1, -e)$.

Per trovare la tangente in P al grafico della funzione:

$$y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x) \;\Rightarrow\; m = y'(-1) = 2e$$

Equazione della tangente:

$$y + e = 2e(x+1) \;\Leftrightarrow\; y = 2ex + e$$

N. 3

La funzione $f(x)$ è continua e derivabile nel suo dominio: $x \neq -2$.

Pertanto è continua in $[-1,1]$ e derivabile in $(-1,1)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo [–1,1].

Essendo:

$$f(-1) = \frac{-1-2}{-1+2} = -3 \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{1-2}{1+2} == -\frac{1}{3}$$

risulta

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{-\frac{1}{3}+3}{2} = \frac{4}{3}$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

Pertanto:

$$f'(x) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -2 \pm \sqrt{3}$$

La soluzione accettabile è:

$$x = -2 + \sqrt{3}$$

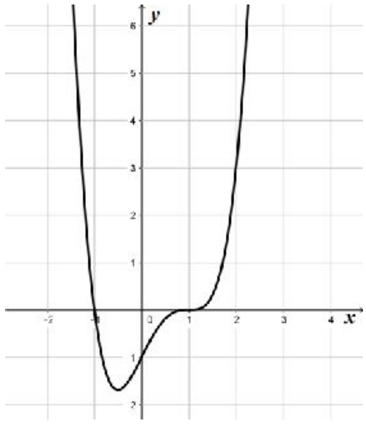
N. 4

La funzione è definita per $x > 0, x \neq 3$.

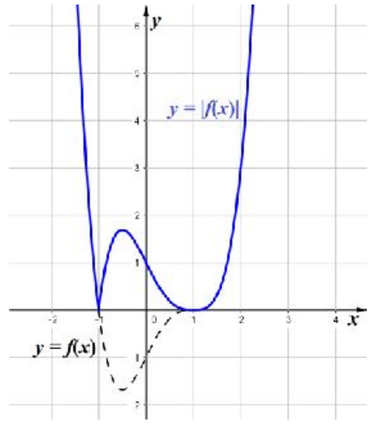
- $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} =_H \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to0^+} -x = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{x-3} = 0$
- $\lim\limits_{x\to3} \frac{x\ln x}{x-3} = \infty \;\Rightarrow$ asintoto verticale: $x = 3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-3} \ln x = +\infty$ essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x}} = 1 \;\Rightarrow\; f(x)$ non ha asintoti orizzontali.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-3} =_H \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ non ha nemmeno asintoti obliqui.

N. 5

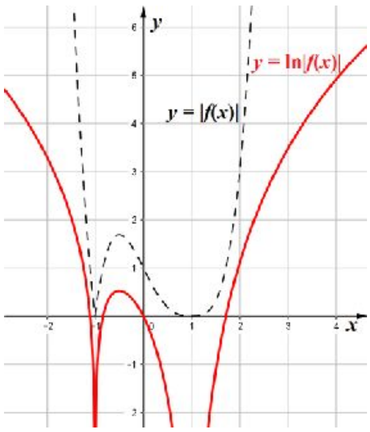
$y = f(x)$



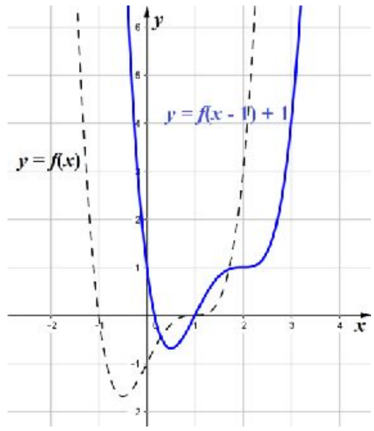
$y = |f(x)|$



$y = \ln|f(x)|$



$y = f(x-1)+1$



- La funzione $y = |f(x)|$ ha un punto angoloso in $x=-1$, ma non in $x=1$ in quanto la funzione $f(x)$ ha ivi tangente orizzontale.
- La funzione $y = \ln|f(x)|$ ammette asintoti verticali $x=-1$ e $x=1$ in corrispondenza degli zeri della funzione $f(x)$.

N. 6

Separiamo le variabili:

$$y' - xy + 6x = 0 \Leftrightarrow y' = x(y-6) \Leftrightarrow \frac{dy}{y-6} = x\,dx$$

Integrando membro a membro otteniamo:

$$\ln|y-6| = \frac{x^2}{2} + c$$

e passando all'esponenziale

$$|y-6| = e^{c+\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow |y-6| = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

da cui si ricava $y = 6 + k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Determiniamo la funzione che risolve il problema di Cauchy:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow 6 + k = 1 \Leftrightarrow k = -5$$

La soluzione cercata è, quindi:

$$y = 6 - 5 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

N. 7

a) L'elemento di volume è $dV = S(x)dx = [f(x)]^2 dx = (9 - x^2)dx$. Integrando, otteniamo:

$$V=\int_{-3}^{3} 9-x^2\,dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}=27-\frac{27}{3}-\left(-27+\frac{27}{3}\right)=...=36u^3$$

b) Affinchè risulti $\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$ dev'essere:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases}A+B=0\\2A-2B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\B=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right]$$

Per definizione:

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-4}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\int_3^b\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\left[\ln|x-2|-\ln|x+2|\right]_3^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right|-\ln\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{4}(\ln 1+\ln 5)=\frac{\ln 5}{4}$$

L'integrale converge a $\frac{\ln 5}{4}$.

N. 8

Calcoliamo il determinante della matrice, applicando il metodo di Sarrus:

$$\left|\begin{matrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&0\\-3&1\\0&0\end{matrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{la matrice è invertibile.}$$

Per trovare l'inversa, calcoliamo la matrice cofattore:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3&0\\0&1\end{vmatrix}=3\qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3&1\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}=0\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}=0\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\-3&0\end{vmatrix}=0\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\-3&1\end{vmatrix}=1$$

Quindi:

$$cofA=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{(cofA)^T}{|A|}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

N. 9

Prima di risolvere l'equazione non omogenea $y''+2y'-8y=e^{-2x}$, dobbiamo trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$y''+2y'-8y=0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2+2\lambda-8=0\Rightarrow\frac{\Delta}{4}=1+8=9\Rightarrow 1\pm 3=\begin{matrix}\nearrow -4\\ \searrow 2\end{matrix}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$\varphi=c_1e^{-4x}+c_2e^{2x}$$

Cerchiamo ora un integrale particolare dell'equazione non omogenea tra le funzioni del tipo $f(x)=ke^{-2x}$.

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = -2ke^{2x} \quad \text{e} \quad f''(x) = 4ke^{-2x}$$

Sostituendo:

$$ke^{-2x}[4-4-8] = e^{-2x} \Leftrightarrow -8ke^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$$

La soluzione cercata è, quindi:

$$y = c_1e^{-4x} + c_2e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}$$

N. 10

a) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 5x-2y+2z=8 \\ -2x-y-2z=-5 \\ -x-z=-3 \end{cases}$ applicando il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La soluzione del sistema è

$$(0,-1,3)$$

b) Risolviamo il sistema $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ -2x+4y+3z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ applicando il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0 \\ 0\ 2\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema si è ridotto a $\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$ ed ammette ∞^1 soluzioni, del tipo:

$$(-y, y, -2y), y \in \mathbb{R}$$

N. 11

a) Osserviamo che nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

la 4° riga è la somma delle prime due $\Rightarrow rg(A) < 4$.

Calcoliamo il determinante del minore di ordine 3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

applicando il Teorema di Laplace alle 1° riga:

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Quindi $rg(A) = 3$.

b) Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e la sua trasposta $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il loro prodotto scalare righe per colonne è:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

N. 12

Integrando per parti:

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 1 dx = \frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$$

Imponendo la condizione di passaggio per $(0,1)$:

$$F(0) = -\frac{1}{9} + c = 2 \iff c = \frac{19}{9}$$

Quindi la primitiva cercata è

$$F(x) = \frac{3x-1}{9} e^{3x} + \frac{19}{9}$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{9} e^{3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{9e^{-3x}} =_H \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{-27e^{-3x}} = 0$$

quindi

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{9} e^{3x} + \frac{19}{9} = \frac{19}{9}$$