UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA

San Floriano, 12/07/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: ________________________________ Matricola: __________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

- o **APPELLO ORDINARIO:** quesito n. 1 + altri 3 quesiti a scelta parte A + 3 quesiti a scelta parte B
- o **COMPITINO A:** tutti i quesiti della parte A
- o **COMPITINO B:** tutti i quesiti della parte B

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (_____/7)

Studiare la funzione $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}+1$, determinando esplicitamente dominio, parità, segno ed eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, monotonia ed eventuali estremi. Dopo aver verificato che $f''(x)=\frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ determinare concavità ed eventuali flessi. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (_____/4)

Data la funzione $f(x)=\frac{1}{x}-3$, calcolare l'equazione della retta *r* tangente al grafico nel suo punto di ascissa $x=1$. Determinare l'equazione dell'ulteriore tangente parallela a *r* e le coordinate del punto di tangenza. Esistono tangenti ortogonali a *r*? Motivare.

QUESITO 3 (_____/4)

Determinare gli asintoti della funzione $f(x)=\frac{\left|x^2-1\right|}{x-2}$

QUESITO 4 (_____/4)

Verificare che la funzione $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0,2]$. In caso affermativo, determinare l'ascissa del punto (o dei punti) che verifica il T. di Rolle nell'intervallo indicato.

QUESITO 5 (_____/4)

Studiare la derivabilità della funzione $f(x)=|x-1|e^x$, determinando anche gli estremi (relativi/assoluti)

QUESITO 6 (_____/4)

Dopo aver disegnato i grafici delle funzioni $f(x)=\ln x$ e $g(x)=2-x^2$, dimostra che l'equazione $\ln x=2-x^2$ ammette una soluzione reale in [1,2] e determinala con precisione $\frac{1}{10}$.

QUESITO 7 (_____/4)

Determinare il valore di *c* il modo che sia minima la somma dei quadrati delle soluzioni dell'equazione:

$$2x^2-4x+c=0$$

Parte B

QUESITO 8 (_____/7) **SOLO PARTE B – NO APPELLO**

Si consideri la matrice reale $A=\begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ k+1 & 2k-1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare il rango di A al variare di *k*. Determinare i valori di *k* per cui A è invertibile. Calcolare, inoltre, le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice per i valori di *k* per cui A non ha rango massimo.

QUESITO 9 (_____/4)

Dopo averne tracciato i grafici, trovare le intersezioni delle parabole di equazione $y=-x^2+2x+1$ e $y=(x-1)^2$ e calcolare l'area della regione piana delimitata dai due grafici.

QUESITO 10 (_____/4)

Risolvere l'equazione differenziale $y''+y'-6y=e^x$

QUESITO 11 (_____/4)

Calcolare la trasposta e il determinante della seguente matrice, dire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa:

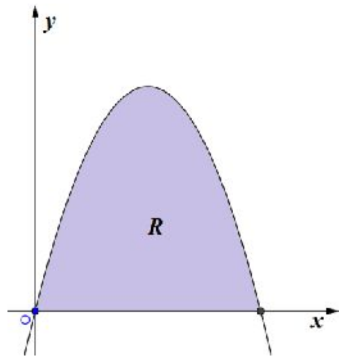
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESITO 12 (_____/4)

Dopo aver intersecato la parabola di equazione $y = -2x^2 + 4x$ con l'asse *x* determina il volume del solido di base R, le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse *x* sono:

a) quadrati;

b) triangoli di base $f(x)$ e altezza $h(x) = 2x - x^2$.



QUESITO 13 (_____/4)

Studiare la convergenza degli integrali impropri:

a) $\int_0^3 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x}\,dx$

QUESITO 14 (_____/4)

Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 11x + 7y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$

Punteggio totale: _______/30

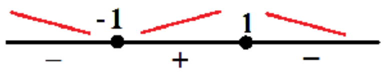
Soluzione

N. 1

$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}+1$

- DOMINIO: $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ: $f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2+1}+1=-\frac{2x}{x^2+1}+1 \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- $f(0)=1 \Rightarrow$ la funzione passa per $(0,1)$
- SEGNO: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$; in particolare $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$
- ASINTOTI: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0+1=1 \Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale
- CRESCENZA:

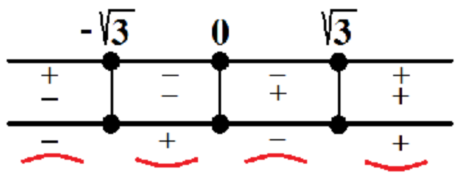
  $f'(x)=2\cdot\frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=\ldots=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\geq 0$

  min: $M_1(-1,0)$

  max: $f(1)=\frac{2}{1+1}+1=2 \Rightarrow M_2(1,2)$
- CONCAVITÀ:

  $$f''(x)=2\cdot\frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=-4x\cdot\frac{x^2+1+2-2x^2}{(x^2+1)^3}=\ldots=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\geq 0$$

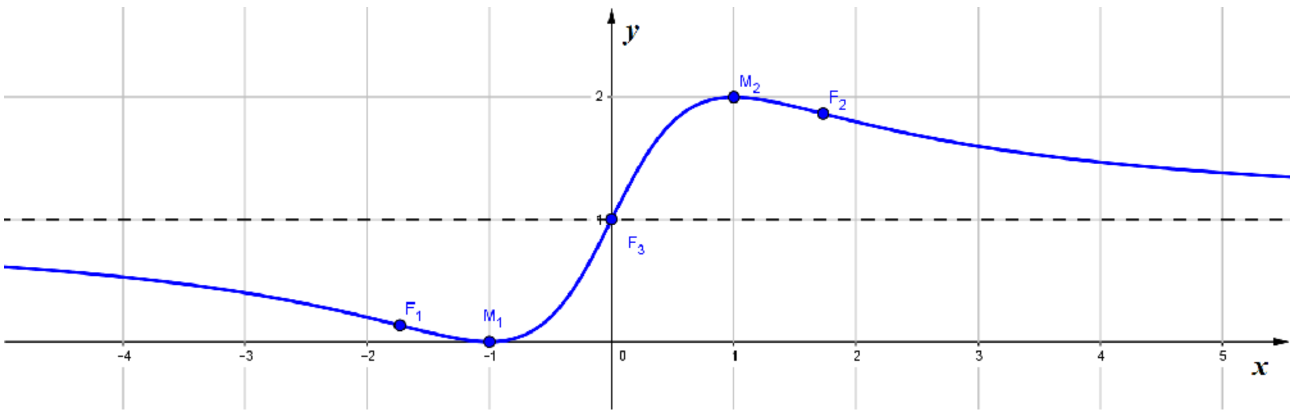
  

  $f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{3+1}+1=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $f(-\sqrt{3})=-\frac{2\sqrt{3}}{3+1}+1=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\Rightarrow$ Flessi: $F_1\left(-\sqrt{3},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2\left(\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $F_3(0,1)$

GRAFICO:



N. 2

$f(x)=\frac{1}{x}-3$

Punto di ascissa $x=1$: $f(1)=1-3=-2 \Rightarrow (1,-2)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = -1$

$\Rightarrow$ La retta tangente in $(1,-2)$ ha equazione:

$$y+2 = -(x-1) \Leftrightarrow y+2 = -x+1 \Leftrightarrow y = -x-1$$

Per trovare l'eventuale ulteriore tangente parallela a quella appena calcolata dobbiamo risolvere l'equazione:

$$m = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Calcoliamo quindi $f(-1) = -1-3 = -4 \Rightarrow$ punto di tangenza: $(-1,-4)$

$\Rightarrow$ La retta tangente in $(-1,-4)$ ha equazione:

$$y+4 = -(x+1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -x-5$$

Affinchè la tangente possa essere ortogonale a quella appena trovata il suo coefficiente angolare dev'essere $m_1 = 1$; d'altra parte l'equazione $-\frac{1}{x^2} = 1$ non ammette soluzioni reali. Pertanto **non è possibile trovare una retta tangente che sia perpendicolare a quelle appena trovate**.

N. 3

Asintoti di $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-2}$

- $f(x)$ è definita per $x \neq 2$. Pertanto:

  $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{|x^2-1|}{x-2} = \infty \Rightarrow$ asintoto verticale $x = 2$

- Dal momento che $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1$ possiamo scrivere:

  ✓ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x^2-1|}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}} = \infty \Rightarrow$ la funzione non ha asintoti orizzontali

  ✓ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x^2-1|}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1$

  ✓ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x^2-1|}{x-2} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-2} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1+2x}{x-2} = 2 \Rightarrow q = 2$

  $\Rightarrow$ asintoto obliquo: $y = x+2$

N. 4

- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ ha dominio:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D = [0,2]$$

- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ è continua in $D = [0,2]$, poiché somma di funzioni ivi continue.
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$ ha dominio $D_1 = (0,2)$; pertanto $f(x)$ è derivabile in $(0,2)$

- $f(0)=\sqrt{2}$ e $f(2)=\sqrt{2} \Rightarrow f(0)=f(2)$

$\Rightarrow$ Valgono le ipotesi del Teorema di Rolle.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x=2-x \Leftrightarrow x=1$$

$\Rightarrow$ Punto stazionario: $f(1)=\sqrt{1}+\sqrt{2-1}=2 \Rightarrow (1,2)$

N. 5

- $|x-1|$ è una funzione derivabile per $x \neq 1$, poiché composizione di funzioni ivi derivabili
- e^x è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=|x-1|e^x$ è una funzione derivabile per $x \neq 1$

Studiamone la derivabilità in $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)e^x & x \geq 1 \\ (1-x)e^x & x<1\end{cases}$$

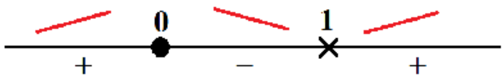
Derivando otteniamo:

$$f'(x)=\begin{cases}xe^x & x>1 \\ -xe^x & x<1\end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+} xe^x=e$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^-} -xe^x=-e$

$\Rightarrow f(x)$ ha un puto angoloso in $x=1$

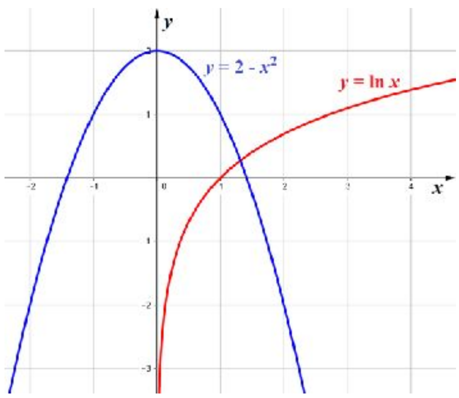
STUDIO CRESCENZA: $f(x)\geq 0$



Min: $x=1 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow (1,0)$

Max: $x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow (0,1)$

N. 6



- La funzione $\varphi(x)=\ln x-2+x^2$ è continua per $x>0 \Rightarrow$ in particolare è continua in $[1,2]$
- $\varphi(1)=\ln 1-2+1=-1<0$
- $\varphi(2)=\ln 2-2+4=2+\ln 2>0$

$\Rightarrow$ Per il Teorema degli zeri delle funzioni continue, la funzione $\varphi(x)$ ammette almeno uno zero in $[1,2]$

$\Rightarrow$ l'equazione $\ln x=2-x^2$ ammette almeno una soluzione in $[1,2]$

Approssimiamo la soluzione cercata mediante il metodo di bisezione:

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	f(a)	f(b)	(a+b)/2=c	f(c)	err.
2	1	2	-1	2,69315	1,5	0,65547	0,5
3	1	1,5	-1	0,65547	1,25	-0,21436	0,25
4	1,25	1,5	-0,21436	0,65547	1,375	0,20908	0,125
5	1,25	1,375	-0,21436	0,20908	1,3125	-0,00541	0,0625

$\Rightarrow$ La soluzione cercata è $\alpha \simeq 1{,}31$

N. 7

Ricerchiamo le soluzioni dell'equazione $2x^2-4x+c=0$. Otteniamo $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{4-2c}}{2}$; esse sono reali per $c\le 2$. Pertanto:

$$f(c)=x_1^2+x_2^2=\left(1-\frac{\sqrt{4-2c}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{4-2c}}{2}\right)^2=1-\sqrt{4-2c}+\frac{4-2c}{4}+1+\sqrt{4-2c}+\frac{4-2c}{4}=\ldots=4-c$$

$f'(c)=-1 \Rightarrow$ la funzione $f(c)$ è decrescente $\Rightarrow$ $x_1^2+x_2^2$ è minima per $c=2$

Il valore minimo della somma dei quadrati delle radici dell'equazione data è:

$$f(2)=4-2=2$$

OSSERVAZIONE: Per le note formule relative alla somma ed al prodotto delle radici di un'equazione di 2° grado (studiate nel biennio della scuola superiore) risulta:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{-4}{2}\right)^2-2\cdot\frac{c}{2}=4-c$$

N. 8

Consideriamo la matrice $A=\begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ k+1 & 2k-1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det A=\begin{vmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ k+1 & 2k-1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} k & k-1 \\ 0 & 2k-2 \\ k+1 & 2k-1 \end{matrix}=2k(2k-2)-k(k+1)(2k-2)=k(2k-2)(1-k)=\ldots=-2k(k-1)^2$$

$\det A=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=1$

Pertanto, la matrice A ha rango 3 per $k\ne 0 \wedge k\ne 1$.

- $k=0$: la matrice diventa $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ed ha rango 2 poiché $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2\ne 0$

  In tal caso:

  $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Quindi le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice sono:

  $$(-2k,0,k),\ \forall k\in\mathbb{R}$$

- $k=1$: la matrice diventa $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ed ha rango 2 poiché $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\ne 0$

In tal caso:

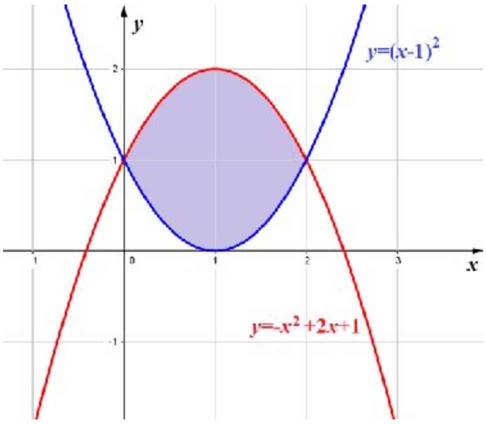
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice sono:

$$(-k, 0, k), \forall k \in \mathbb{R}$$

N. 9

Consideriamo le parabole $y = -x^2 + 2x + 1$ e $y = (x-1)^2$, nel grafico a fianco. Intersecando i grafici:



$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots\ (0,1) \text{ e } (2,1)$$

Calcoliamo l'area:

$$\int_0^2 -x^2 + 2x + 1 - (x-1)^2\, dx = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right) dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}u^2$$

N. 10

Per risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = e^x \qquad (*)$$

troviamo dapprima gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata è:

$$\varphi = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

Per trovare l'integrale generale dell'equazione data dobbiamo aggiungere a φ un integrale particolare di tale equazione; lo cerchiamo tra le funzioni del tipo $f(x) = ke^x$, poiché gli zeri del polinomio caratteristico sono diversi da 1.

$$f'(x) = f''(x) = ke^x$$

Sostituendo nella (*):

$$ke^x + ke^x - 6ke^x = e^x \Leftrightarrow -4ke^x = e^x \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4}e^x$$

N. 11

La trasposta della matrice data è $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{A è invertibile}$$

Determiniamone i complementi algebrici:

- $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
- $A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- $A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$
- $A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$
- $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$
- $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$
- $A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
- $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$
- $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

Quindi:

$$cofA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e, di conseguenza:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

N. 12

La parabola $y = -2x^2 + 4x$ taglia l'asse *x* nei punti $(0,0)$ e $(2,0)$.

a) In questo caso $S(x) = \left(-2x^2+4x\right)^2 = 4\left(-x^2+2x\right)^2 = 4\left(x^4-4x^3+4x^2\right)$. Pertanto l'elemento di volume è:

$$dV = 4\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx$$

Applicando il metodo delle fette:

$$V = \int_0^2 4\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx = 4\left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = \ldots = \frac{64}{15}u^3$$

b) In questo caso $S(x) = \frac{1}{2}\left(-2x^2+4x\right)\left(2x-x^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\left(2x+x^2\right)\left(2x-x^2\right) = \left(4x^2-x^4\right)$. Pertanto l'elemento di volume è

$$dV = \left(4x^2-x^4\right)dx$$

Applicando il metodo delle fette:

$$V = \int_0^2 \left(4x^2-x^4\right)dx = \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 4\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \ldots = \frac{64}{15}u^3$$

N. 13

a) $\int_0^3 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^3 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$\int_a^3 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\int_a^3 x^{-\frac{1}{3}}dx = 2\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right]_a^3 = 2\cdot\frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_a^3 = 3\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^3 \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} 3\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{a^2}\right) = 3\sqrt[3]{9}$$

$\Rightarrow$ l'integrale dato è convergente a $3\sqrt[3]{9}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2+2x}dx$

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\ldots=\frac{(A+B)x+2A}{x^2+2x}$$ $\Leftrightarrow$ (per il Principio di Identità dei poinomi) $\begin{cases}A+B=0\\2A=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2}\\B=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$\int_1^b\frac{1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{2}\Big[\ln|x|-\ln|x+2|\Big]_1^b=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_1^b=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|+\ln 3\right)$$

e quindi:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2+2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{b}{b+2}\right|+\ln 3\right)=\frac{1}{2}(\ln 1+\ln 3)=\frac{\ln 3}{2}$$

$\Rightarrow$ l'integrale dato è convergente a $\dfrac{\ln 3}{2}$

N. 14

a) Per risolvere il sistema $\begin{cases}x+y-z=0\\2x+y+z=0\\11x+7y+z=0\end{cases}$ applichiamo il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\11&7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-3\\0&4&-12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Il sistema diviene:

$$\begin{cases}x+2z=0\\y-3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2z\\y=3z\end{cases}$$

Soluzioni:

$$(-2k,3k,k),\forall k\in\mathbb{R}$$

b) Per risolvere il sistema $\begin{cases}x-y+z=2\\2x-y+3z=-1\\x+3z=1\end{cases}$ applichiamo il metodo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\2&-1&3&-1\\1&0&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&2\\0&-1&-3&-3\\1&0&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&-2&1\\0&1&3&3\\1&0&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&3&3\\0&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-11\\0&1&0&-9\\0&0&1&4\end{array}\right)$$

Soluzioni:

$$(-11,-9,4)$$