UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA (A)

San Floriano, 14/06/2017

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi.

Nome e cognome: _________________________________ Matricola: ___________________________

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti. (segnare l'opzione prescelta)

- o **APPELLO ORDINARIO:** quesito n. 1 + altri 3 quesiti a scelta parte A + 3 quesiti a scelta parte B (escluso n. 8)
- o **COMPITINO A:** tutti i quesiti della parte A
- o **COMPITINO B:** tutti i quesiti della parte B

Firma: ____ Numero di fogli consegnati: ______________

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: ____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame

Parte A

QUESITO 1 (_____/7)
Studiare la funzione $f(x)=x^3(x-2)$, determinando, in particolare le tangenti di flesso. Disegnare il grafico della funzione.

QUESITO 2 (______/4)
Verificare che la parabola $y = kx^2 - (6k+1)x + (5k+1)$ passa per il punto $A(1,0)$, $\forall k \in \mathbb{R}$; determinare il valore del parametro *k* in modo che la parabola e la funzione $y = \ln x$ abbiano la stessa tangente nel punto $A(1,0)$ e l'equazione della parabola corrispondente.

QUESITO 3 (______/4)
Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{|x-2|}$

QUESITO 4 (______/4)
Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2k^2x^2 + 2x - 3k - 6 & x > 1 \\ 3kx^2 + 2x + 2 & x \le 1 \end{cases}$ determinare per quali valori di *k* è continua in $x = 1$.

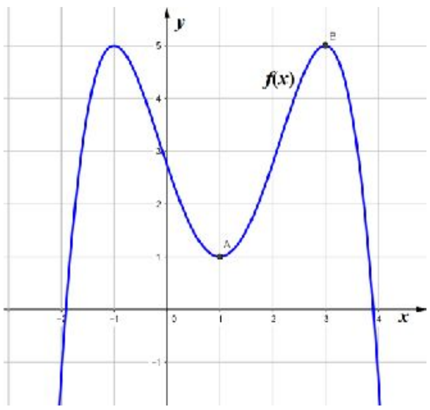
QUESITO 5 (______/4)
Determinare gli estremi della funzione:

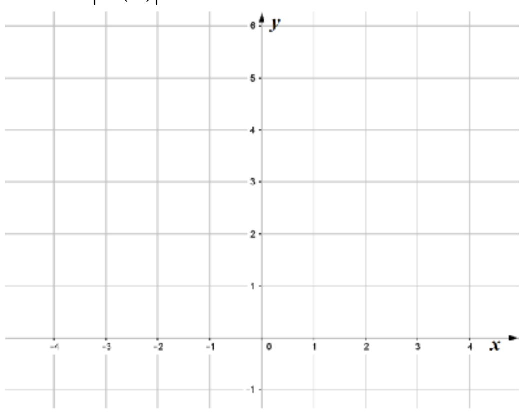
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$$

Specificare se si tratta di estremi relativi o assoluti.

QUESITO 6 (______/4)
Dopo averne studiato il dominio, dire – motivando esaurientemente la risposta – se le funzioni $f(x) = -4\ln x$ e $g(x) = -2\ln x^2$ sono, in realtà, la stessa funzione.

QUESITO 7 (______/4)
Dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura, disegnare il grafico di $|f(x)|$:

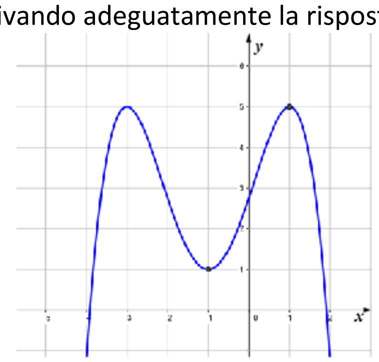


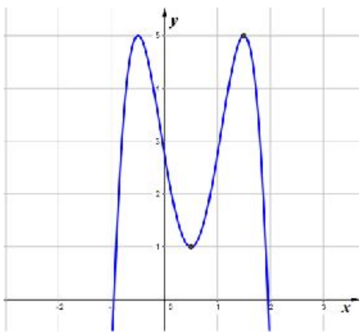


Facendo riferimento al grafico di $f(x)$, stabilire qual è, tra i seguenti, il grafico di:

a) $f(x)+2$
b) $f(-x)$
c) $f(2x)$

motivando adeguatamente la risposta.





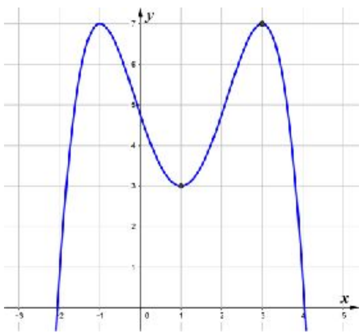


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Parte B

QUESITO 8 (_____/7) **SOLO PARTE B – NO APPELLO**

Si consideri la matrice reale $A=\begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$. Calcolare il rango di A al variare di *k*. Determinare i valori di *k* per cui A è invertibile. Calcolare, inoltre, le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice per i valori di *k* per cui A non ha rango massimo.

QUESITO 9 (_____/4)
Dopo averne tracciato i grafici, trovare le intersezioni delle parabole di equazione $y=-x^2+2x+2$ e $y=x^2+2x$ e calcolare l'area della regione piana delimitata dai due grafici.

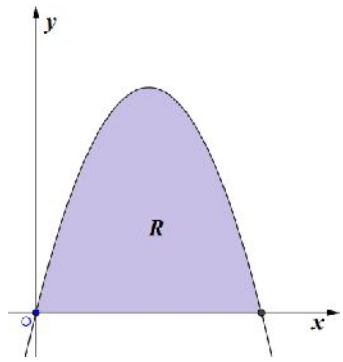
QUESITO 10 (_____/4)
Risolvere l'equazione differenziale $y''-5y'+6y=e^{3x}$

QUESITO 11 (_____/4)
Calcolare la trasposta e il determinante della seguente matrice, dire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESITO 12 (_____/4)
Dopo aver intersecato la parabola di equazione $y=-2x^2+4x$ con l'asse *x* determina il volume del solido generato da una rotazione del segmento parabolico in figura attorno:

a) all'asse *x*;
b) all'asse *y*.



QUESITO 13 (_____/4)
Studiare la convergenza degli integrali impropri:

a) $\int_0^2 \frac{2\ln x}{x}dx$

b) $\int_{-1}^{+\infty} e^{-x-1}dx$

QUESITO 14 (_____/4)
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 6x+9y+10z=22 \\ 3x+24y+5z=11 \\ 3x+2y+5z=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=2 \\ x-2y-z=1 \\ 4x-7y-2z=7 \end{cases}$

Punteggio totale: _______/30

SOLUZIONE

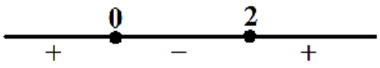
PARTE A

N. 1

- $f(x)=x^3(x-2)=x^4-2x^3$ è una funzione polinomiale, di dominio $D=\mathbb{R}$, continua nel suo dominio
- $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^3=x^4+2x^3 \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari

- SEGNO E INT. ASSI:

  $x^3(x-2)\geq 0 \iff x(x-2)\geq 0$, essendo $x^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \iff x^2-2x\geq 0$

  Il grafico della funzione interseca gli assi cartesiani in $O(0,0)$ e $A(2,0)$.

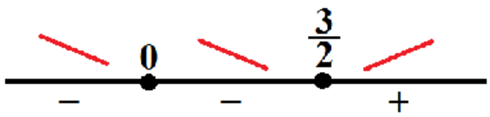
- ASINTOTI:

  Il dominio è $\mathbb{R} \Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti verticali.

  ✓ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x^4\left(1-\frac{2}{x}\right)=+\infty \Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti orizzontali

  ✓ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)=\infty \Rightarrow$ la funzione non ammette asintoti obliqui

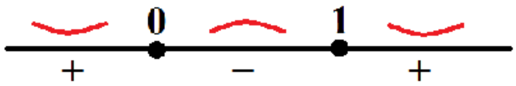
- CRESCENZA:

  $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)\geq 0 \iff x=0 \vee x\geq \frac{3}{2}$

  min: $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}\left(\frac{3}{2}-2\right)=-\frac{27}{16} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{16}\right)$

- CONCAVITÀ:

  $f''(x)=12x^2-12x=12(x^2-x)\geq 0 \iff x\leq 0 \vee x\geq 1$

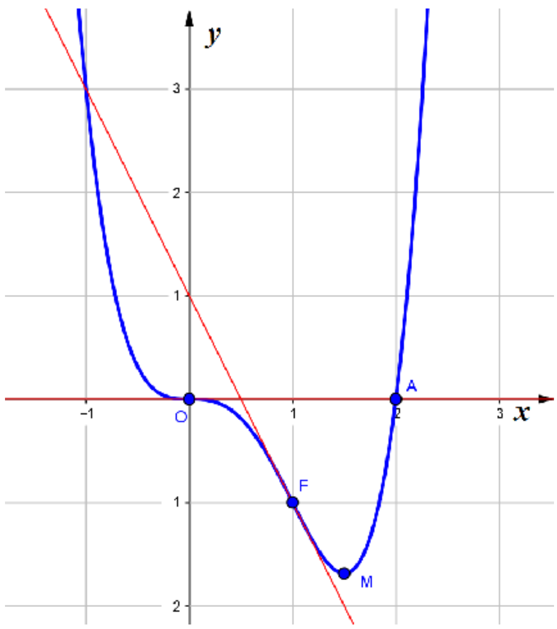
  $f(1)=1-2=-1 \Rightarrow$ La funzione ammette dei flessi in $O(0,0)$ e $F(1,-1)$

- TANGENTI DI FLESSO:

  ✓ Tangente in O: $m_1=f'(0)=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

  ✓ Tangente in F: $m_2=f'(1)=2(2-3)=-2 \Rightarrow y+1=-2(x-1) \Rightarrow \ldots \boxed{y=-2x+1}$

Il grafico della funzione è:



N. 2

Verifichiamo il passaggio della parabola $y = kx^2 - (6k+1)x + (5k+1)$ per $A(1,0)$:

$$y(1) = k - 6k - 1 + 5k + 1 = 0 \Rightarrow \text{verificato!}$$

La tangente alla parabola in A ha coefficiente angolare $m_1 = y'(1)$:

$$y' = 2kx - (6k+1) \Rightarrow m_1 = y'(1) = 2k - 6k - 1 = -4k - 1$$

Anche la funzione $f(x) = \ln x$ ha il grafico passante per A, in quanto $\ln 1 = 0$; le due curve sono tangenti in A se e solo se le due tangenti hanno lo stesso coefficiente angolare.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m_2 = f'(1) = 1$$

Quindi:

$$m_1 = m_2 \Leftrightarrow -4k - 1 = 1 \Leftrightarrow \ldots k = -\frac{1}{2}$$

La parabola è, pertanto:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \left[6\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right]x + \left(-\frac{5}{2} + 1\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

N. 3

Il dominio di $f(x) = \dfrac{x+2}{|x-2|}$ è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- $\lim_{x \to 2} \dfrac{x+2}{|x-2|} = +\infty \Rightarrow x = 2$ è asintoto verticale
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{|x-2|} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-2} = 1 \Rightarrow y = 1$ è asintoto orizzontale
- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{|x-2|} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{2-x} = -1 \Rightarrow y = -1$ è asintoto orizzontale

N. 4

Affinchè la funzione $f(x) = \begin{cases} 2k^2x^2 + 2x - 3k - 6 & x > 1 \\ 3kx^2 + 2x + 2 & x \le 1 \end{cases}$ sia continua in $x = 1$ è sufficiente che:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3kx^2 + 2x + 2 = 3k + 4$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2k^2x^2 + 2x - 3k - 6 = 2k^2 - 3k - 4$

La condizione di continuità in $x = 1$ è, perciò:

$$2k^2 - 3k - 4 = 3k + 4 \Leftrightarrow 2k^2 - 6k - 8 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$$

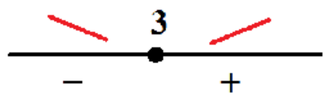
$$\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Concludendo: la funzione è continua in $x = 1$ per $k_1 = -1 \vee k_2 = 4$.

N. 5

Studiamo la crescenza di $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$:

$$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-3) + 2(x-4) + 2(x-5) = \ldots = 2(5x - 15) = 10(x-3) \ge 0$$



La funzione ha un minimo in $x = 3$.

$$f(3) = 4 + 1 + 4 + 1 = 10 \Rightarrow M(3,10)$$

NOTA: In realtà la funzione è una parabola (polinomio di 2° grado), quindi ha un minimo assoluto nel suo vertice e non ha massimi (né relativi né assoluti).

N. 6

- Il dominio di $f(x)$ è: $x>0$, cioè $D_1=(0,+\infty)$
- Il dominio di $g(x)$ è: $x\neq 0$, cioè $D_2=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

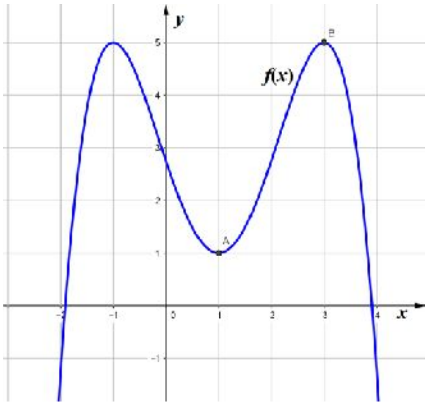
Pertanto, nonostante per $x>0$ si possa scrivere, per le proprietà dei logaritmi:

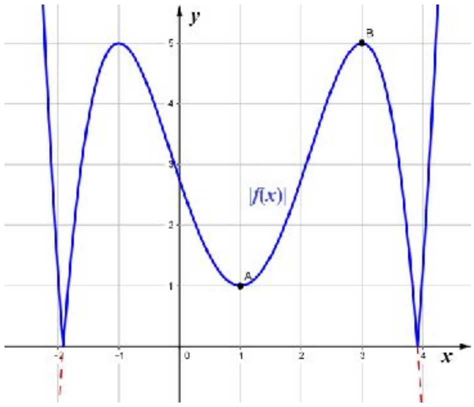
$$-2\ln x^2=-2\cdot 2\ln x=-4\ln x$$

le due funzioni hanno dominio diverso e, quindi, **non possono essere uguali**.

N. 7

Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene da quello di $f(x)$ simmetrizzando rispetto all'asse *x* gli archi del grafico di $f(x)$ che giacciono nel semipiano delle $y<0$, come in figura.





Consideriamo ora:

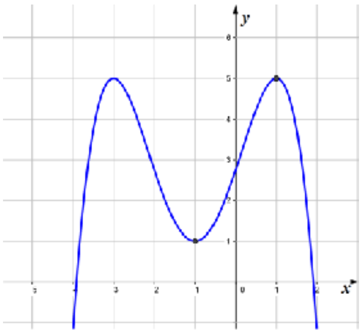


Fig. 1

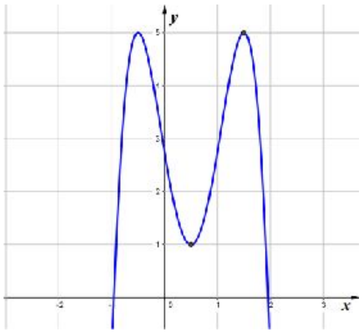


Fig. 2

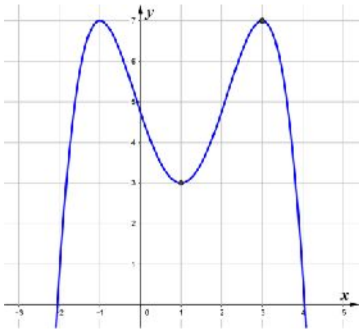


Fig. 3

a) Il grafico di $f(x)+2$ è quello in fig. 3, poiché si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ di 2 *u* verso l'alto.
b) Il grafico di $f(-x)$ è quello in fig. 1, simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto all'asse *y*.
c) Il grafico di $f(2x)$ è quello in fig. 2, ottenuto mediante una *contrazione* lungo l'asse *x*.

PARTE B

N. 8

Consideriamo la matrice $A=\begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$ e calcoliamone il determinante:

$$\det A=\begin{vmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{vmatrix}\begin{matrix} k & k-1 \\ 0 & 2k-2 \\ 1 & k-1 \end{matrix}=k(2k-2)(2-k)-k(2k-2)=2k(k-1)(2-k-1)=-2k(k-1)^2$$

Risulta $\det A=0 \iff k=0\vee k=1$

Quindi:

- $rg(A)=3 \iff k\neq 0\wedge k\neq 1$

Consideriamo i casi particolari:

- Se $k=0$ la matrice diviene: $A_0=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-2&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$ ed ha un minore non banale: $\begin{vmatrix}0&-2\\1&-1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow rg(A_0)=2$

  Il sistema lineare corrispondente è:

$$\begin{cases}-y=0\\-2y=0\\x-y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=-2z\end{cases}$$

  Soluzione generale:

$$(-2t,0,t)\ \ \forall t\in\mathbb{R}$$

- Se $k=1$ la matrice diviene: $A_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ ed ha rango 1 dal momento che ha una riga di zeri e due righe sono identiche.

  Otteniamo, quindi, il sistema $\begin{cases}x+z=0\\x+z=0\end{cases}$, equivalente alla singola equazione $x+z=0 \Rightarrow x=-z$.

  Soluzioni:

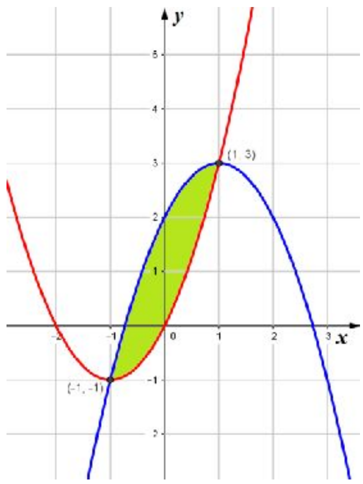
$$(-a,b,a)\ \ \forall a,b\in\mathbb{R}$$

N. 9

Intersechiamo le parabole:

$$\begin{cases}y=-x^2+2x+2\\y=x^2+2x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ sottraendo membro a membro: } \begin{cases}x^2-1=0\\y=x^2+2x\end{cases} \begin{matrix}\nearrow \begin{cases}x=1\\y=1+2=3\end{cases}\\ \searrow \begin{cases}x=-1\\y=1-2=-1\end{cases}\end{matrix}$$



Le intersezioni sono $(1,3)$ e $(-1,-1)$.

Quindi l'area cercata vale:

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+2x+2)-(x^2+2x)\,dx=\int_{-1}^{1}-2x^2+2\,dx=$$

dal momento che la funzione integranda è pari:

$$=4\int_0^1 1-x^2\,dx=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=4\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}u^2$$

N. 10

Consideriamo l'equazione differenziale $y''-5y'+6y=e^{3x}$.

- Risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$y''-5y'+6y=0$$

  L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$\Delta=25-24=1\Rightarrow\frac{5\pm1}{2}=\begin{matrix}\nearrow 3\\ \searrow 2\end{matrix}$$

  $\Rightarrow$ l'integrale generale dell'equazione omogenea è $\varphi=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

- Ricerca di un integrale particolare dell'equazione data; dal momento che $\lambda = 3$ è uno zero dell'equazione caratteristica, consideriamo una funzione del tipo: $\psi = kx \cdot e^{3x}$

  $$\psi' = k\left[e^{3x} + 3e^{3x}x\right] = ke^{3x}(3x+1) \qquad \psi'' = k\left[3e^{3x}(3x+1) + 3e^{3x}\right] = ke^{3x}(9x+6)$$

  Sostituendo nell'equazione data:

  $$ke^{3x}(9x+6) - 5ke^{3x}(3x+1) + 6kxe^{3x} = ke^{3x}(9x+6-15x-5+6x) = ke^{3x} = e^{3x} \Rightarrow k = 1$$

  $\Rightarrow$ l'integrale particolare cercato è $\psi = xe^{3x}$

Concludendo:
La soluzione dell'equazione differenziale data è $y = \varphi + \psi = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + xe^{3x}$.

N. 11

La trasposta della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il determinante di A è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 0 - (-3) = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice A è invertibile.
Calcoliamone i complementi algebrici:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$\Rightarrow$ la matrice cofattore è:

$$cofA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(cofA)^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

N. 12

Intersecando la parabola $y = -2x^2 + 4x$ con l'asse *x* otteniamo: $x^2 - 2x = 0 \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = 2 \end{matrix}$

a) Rotazione attorno all'asse *x*:
   Applicando il *"metodo delle fette"*,

   $$V_x = \pi\int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right)^2 dx = 4\pi\int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)^2 dx = 4\pi\int_0^2 x^4 - 4x^3 + 4x^2\, dx =$$

   $$= 4\pi\left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = 4\pi\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = 64\pi\left(\frac{2}{5} - 1 + \frac{2}{3}\right) = 64\pi\frac{6-15+10}{15} = \frac{64}{15}\pi\, u^3$$

b) Rotazione attorno all'asse *y*:
   Applicando il *"metodo dei gusci cilindrici"*,

$$V_y = 2\pi\int_0^2 x\left(-2x^2+4x\right)dx = 4\pi\int_0^2 -x^3+4x^2 dx = 4\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 =$$

$$= 4\pi\left(-\frac{16}{4}+\frac{16}{3}\right)= 4\pi\left(-4+\frac{16}{3}\right)=16\pi\left(-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{3}\pi\,u^3$$

N. 13

a) $\int_0^2 \frac{2\ln x}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^2 \frac{2\ln x}{x}dx$

$\int_a^2 \frac{2\ln x}{x}dx = \left[\ln^2 x\right]_a^2 = \ln^2 2-\ln^2 a \;\Rightarrow\; \int_0^2 \frac{2\ln x}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^2 \frac{2\ln x}{x}dx = \lim_{a\to 0^+} \ln^2 2-\ln^2 a = -\infty$

$\Rightarrow$ l'integrale diverge a $-\infty$

b) $\int_{-1}^{+\infty} e^{-x-1}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-1}^{b} e^{-x-1}dx = \lim_{b\to+\infty} e^{-1}\int_{-1}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} e^{-1}\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} e^{-1}\left[-e^{-b}+e\right] = \lim_{b\to+\infty} 1-e^{-b} = 1$

$\Rightarrow$ l'integrale converge a 1

N. 14

a) Consideriamo il sistema: $\begin{cases}6x+9y+10z=22\\3x+24y+5z=11\\3x+2y+5z=11\end{cases}$. La matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&10&22\\3&24&5&11\\3&2&5&11\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&10&22\\3&24&5&11\\0&22&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&10&22\\6&48&10&22\\0&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&10&22\\0&39&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}6&9&10&22\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}6&0&10&22\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&5&11\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ricaviamo, quindi, il sistema:

$$\begin{cases}3x+5z=11\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=11-5z\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{11-5z}{3}\\y=0\end{cases}$$

Soluzioni:

$$\left(\frac{11-5z}{3},0,z\right)\forall z\in\mathbb{R}$$

b) Consideriamo il sistema: $\begin{cases}x-y=2\\x-2y-z=1\\4x-7y-2z=7\end{cases}$. La matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2\\1&-2&-1&1\\4&-7&-2&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2\\0&-1&-1&-1\\0&-3&-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2\\0&1&1&1\\0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

Soluzione: $(1,-1,2)$