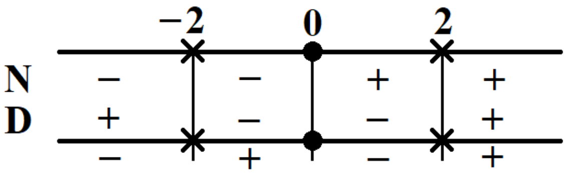
Traccia sintetica di soluzione – settembre 2019

N. 1

- DOMINIO: $x \neq \pm 2$
- PARITÀ: $f(-x) = \dfrac{5(-x)}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{5x}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ dispari
- SEGNO ED INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2-4} \geq 0$

  $f(0) = 0 \Rightarrow$ il grafico taglia gli assi cartesiani nell'origine



- LIMITI ED ASINTOTI:

  $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x}{x^2-4} = \infty \Rightarrow x = 2$ è asintoto verticale; per disparità della funzione, anche $x=-2$ è asintoto verticale

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5}{x - \frac{4}{x}} = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale (per $x \to +\infty$); per disparità della funzione, è asintoto anche per $x \to -\infty$

- CRESCENZA:

  $$f'(x) = 5 \cdot \frac{(x^2-4) - 2x \cdot x}{(x^2-4)^2} = -5\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} < 0 \text{ per ogni } x \in D$$

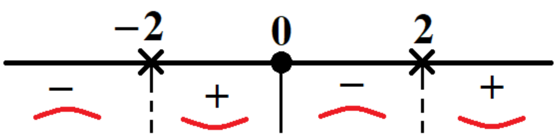
  $\Rightarrow$ la funzione è sempre crescente (e non ammette né massimi né minimi)

- CONCAVITÀ:

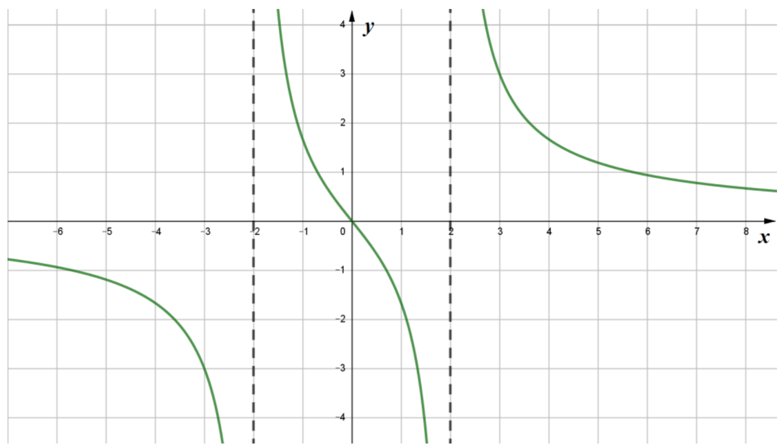
  $$f''(x) = -5 \cdot \frac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)(2x)(x^2+4)}{(x^2-4)^4} = -10x \cdot \frac{(x^2-4) - 2(x^2+4)}{(x^2-4)^3} = \ldots =$$

  $$= 10x\frac{x^2+12}{(x^2-4)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10x}{x^2-4} \geq 0$$

  Flesso nell'origine.



GRAFICO



Dal momento che $f'(0) = -5 \cdot \dfrac{4}{4^2} = -\dfrac{5}{4}$, l'equazione della tangente al grafico nell'origine è $y = -\dfrac{5}{4}x$

N. 2

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^3+1\right)}{x^2\left(1-e^x\right)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(x^3+1\right)}{x^3}}_{\downarrow \atop 1}\cdot\underbrace{\frac{x}{1-e^x}}_{\downarrow \atop -1}=-1$. In questo caso il limite non può essere calcolato mediante il Teorema di de l'Hospital dal momento che è ottenuto mediante il prodotto di due limiti notevoli.

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x+2}=_H\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=+\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\ln x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\ln x}{x^2}=_H\lim_{x\to+\infty}\frac{2\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

N. 3

a) $N_0=N(0)=1600\left(1+19e^0\right)^{-1}=\frac{1600}{20}=80$ numero di caprioli immessi nel parco

Il valore limite della popolazione è:

$$N_\infty=\lim_{t\to+\infty}N(t)=\lim_{t\to+\infty}1600\left(1+19\underbrace{e^{-\frac{t}{5}}}_{\downarrow \atop 0}\right)^{-1}=1600$$

b) Derivando l'espressione $N(t)=1600\left(1+19e^{-\frac{t}{5}}\right)^{-1}$ otteniamo:

$$N'(t)=1600\left[-\left(1+19e^{-\frac{t}{5}}\right)^{-2}\left(-\frac{19}{5}e^{-\frac{t}{5}}\right)\right]=6080e^{-\frac{t}{5}}\left(1+14e^{-\frac{t}{5}}\right)^{-2}$$

La rapidità di crescita della popolazione dopo 10 anni è:

$$N'(10)=6080e^{-2}\left(1+19e^{-2}\right)^{-2}\simeq 65\frac{caprioli}{anno}$$

c) Risolviamo la disequazione

$$N(t)>400\Leftrightarrow 1600\left(1+19e^{-\frac{t}{5}}\right)^{-1}>400\Leftrightarrow 4>1+19e^{-\frac{t}{5}}\Leftrightarrow 3>19e^{-\frac{t}{5}}\Leftrightarrow e^{\frac{t}{5}}>\frac{19}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{t}{5}>\ln\frac{19}{3}\Leftrightarrow t>5\ln\frac{19}{3}$$

Dal momento che $5\ln\frac{19}{3}\simeq 9.2291$ e che $0.2291\cdot 12\simeq 2.7$ possiamo affermare che servono circa 9 anni e 3 mesi perché la popolazione raggiunga i 400 esemplari.

d) Risolviamo la disequazione

$$N(t)>1590\Leftrightarrow 1600\left(1+19e^{-\frac{t}{5}}\right)^{-1}>1590\Leftrightarrow\frac{160}{159}>1+19e^{-\frac{t}{5}}\Leftrightarrow\frac{1}{159}>19e^{-\frac{t}{5}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t}{5}}>3021\Leftrightarrow\frac{t}{5}>\ln 3021\Leftrightarrow t>5\ln 3021$$

Dal momento che $5\ln 3021\simeq 40.0667$ e che $0.0667\cdot 12\simeq 0.8$ possiamo affermare che servono circa 40 anni e 1 mese perché la popolazione raggiunga i 1590 esemplari.

N. 4

Osserviamo che:

$$f(x) = \left|x^3 - 3x^2\right| = x^2\left|x-3\right| = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ 3x^2 - x^3 & x < 3 \end{cases}$$

Derivando otteniamo:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ 6x - 3x^2 & x < 3 \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti:

- $\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 3x^2 - 6x = 27 - 18 = 9$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 6x - 3x^2 = 18 - 27 = -9$

$\Rightarrow$ la funzione ha un punto angoloso in $x = 3$

N. 5

Sostituendo i dati ed approssimando alla 3° cifra decimale otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 0.993 = A + 3.509B \\ 0.875 = A + 3.343B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0.993 - 3.509B \\ 0.161B = 0.118 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \simeq 0.993 - 3.509 \cdot 0.733 \simeq -1.579 \\ B \simeq 0.733 \end{cases}$$

Partendo ora dalla relazione:

$$\ln P_s = -1.579 + 0.733 \cdot \ln P$$

ed applicando le proprietà dei logaritmi otteniamo:

$$\ln P_s = -1.579 + \ln P^{0.733}$$

D'altra parte $1 = \ln e \Rightarrow -1.579 = -1.579 \ln e = \ln e^{-1.579} \simeq \ln 0.206 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln P_s = \ln 0.206 + \ln P^{0.733} = \ln\left(0.206 \cdot P^{0.733}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.206 \\ \beta = 0.733 \end{cases}$

Quindi:

$P_s = 0.206 \cdot 37.4^{0.733} \simeq 2.9\,kg$

N. 6

Ricordiamo che per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$, dobbiamo:

- ***determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata*** $y'' + y' - 2y = 0$***:***

  equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

  $$\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2 = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -3 \end{matrix}$$

  $\Rightarrow$ L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è:

  $$\varphi = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

- ***trovare una soluzione particolare dell'equazione data:***

  consideriamo la funzione $\psi = ke^{2x}$ ed imponiamo che sia soluzione dell'equazione data.

- $\psi' = 2ke^{2x}$
- $\psi'' = 4ke^{2x}$

Sostituendo nell'equazione data otteniamo:

$$4ke^{2x} + 4ke^{2x} - 3ke^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 5ke^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

- ***sommare le funzioni così ottenute:***
  La soluzione dell'equazione differenziale data è:

$$y = \varphi + \psi = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + \frac{e^{2x}}{5}$$

N. 7

a) $\dfrac{1}{x^2 + 2x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{Ax + 2A + Bx}{x^2 + 2x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 2x} = \dfrac{(A+B)x + 2A}{x^2 + 2x}$

Dal principio di identità dei polinomi otteniamo ora:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto:

$$A(k) = \int_1^k f(x)dx = \int_1^k \frac{1}{x^2 + 2x}dx = \frac{1}{2}\int_1^k \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x| - \ln|x+2|\right]_1^k =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln|k| - \ln|k+2|\right) - \left(\ln 1 - \ln 3\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3k}{k+2}\right|$$

b) $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3k}{k+2}\right| = \dfrac{\ln 3}{2}$

c) La funzione data ha dominio $D = [0, 4]$, corrispondente all'intervallo di integrazione.
Il volume richiesto si può ottenere integrando l'elemento di volume

$$dV = \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left(4x - x^2\right)dx$$

Quindi:

$$V = \pi\int_0^4 4x - x^2 dx = \pi\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \pi\left(32 - \frac{64}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi\, u^3$$

N. 8

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - 4z = -5 \\ x - 5y - 7z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$ sottraendo membro a membro la 2° equazione dalla 1° e la 3° dalla 1°

otteniamo: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = 6 \\ 6y + 6z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 2 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - 2z = 1 \\ y = 2 - z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 2 - z \end{cases}$

La soluzione generale del sistema è: $\left(2k-1, 2-k, k\right)$, per ogni $k \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} 10x - 8y - 3z = 0 \\ 13x + 6y - 8z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ sottraendo la 1° equazione dalla 3° otteniamo: $\begin{cases} -6x + 12z = 0 \\ 13x + 6y - 8z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ 13x + 6y - 16x = 0 \\ 4x + 4y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ 6y - 3x = 0 \\ 4y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4y \\ x = 2y \end{cases}$$

Quindi la soluzione del sistema è:

$$\left(2k, k, 4k\right) \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}$$

N. 9

a) La matrice di Leslie associata al diagramma è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante rispetto alla 3° colonna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{vmatrix} = 1.26 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice è invertibile.

b) $\vec{N}(t+1) = A\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 390 \\ 70 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 458 \\ 273 \\ 42 \end{pmatrix}$

Risolviamo il sistema:

$$A\vec{N}(t-1) = \vec{N}(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 \\ 70 \\ 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y + 3z = 390 \\ 0.7x = 70 \\ 0.6y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 60 \\ 5y + 3z = 390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 60 \\ 300 + 3z = 390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 60 \\ 3z = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 60 \\ z = 30 \end{cases}$$

Quindi:

$$\vec{N}(t-1) = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

N. 10

Composizione della voliera 1:

$$\overrightarrow{V_1} = 450\begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.34 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 207 \\ 153 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Composizione della voliera 2:

$$\overrightarrow{V_2} = 350\begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.4 \\ 0.24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ 140 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Dopo l'unificazione in un'unica voliera:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 207 \\ 153 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 126 \\ 140 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 333 \\ 293 \\ 174 \end{pmatrix}$$

In tutto ci sono 800 uccelli diversi.
La nuova proporzione è:

- Cardellini: $\frac{333}{800} = 0.41625 \Rightarrow$ 41.625%
- Passeri: $\frac{293}{800} = 0.36625 \Rightarrow$ 36.625%
- Cardellini: $\frac{174}{800} = 0.2175 \Rightarrow$ 21.75%