UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE VITICOLE ED ENOLOGICHE

Esame di MATEMATICA

San Floriano, 06/07/2018

Informazioni personali
Si prega di indicare il proprio nome, cognome e numero di matricola nei seguenti campi oltre che in ciascun foglio utilizzato.

Nome e cognome: _____ Matricola: _____

Si prega inoltre di compilare i seguenti campi, in base alla scelta che si intende fare.

❑ Chiedo che la mia prova d'esame venga corretta e valutata. Il voto che conseguo con questa prova annulla eventuali voti già conseguiti in appelli d'esame precedenti.

Svolgere il quesito 1 + 2 quesiti a scelta della parte A + 3 quesiti a scelta della parte B

Firma: _____ Numero di fogli consegnati: _____

❑ Intendo ritirarmi; chiedo che la mia prova non venga corretta nè valutata.

Firma: _____

INDICAZIONI PER I CANDIDATI
DURANTE LA PROVA NON È CONSENTITO AGLI STUDENTI COMUNICARE TRA LORO O CON L'ESTERNO; PERTANTO I TELEFONI CELLULARI ED I DISPOSITIVI MULTIMEDIALI DEVONO RESTARE SPENTI!
Scrivete le vostre risposte in modo ordinato, utilizzando la penna stilografica o la penna a sfera; disegnate a matita i grafici delle funzioni. In caso di errore, tracciate un segno sulla risposta scorretta e scrivete accanto ad essa quella corretta.
NON È AMMESSO L'USO DELLA CANCELLINA NÉ DELLA PENNA ROSSA! Si possono, invece, utilizzare penne di qualsiasi colore diverso dal ROSSO; è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile o grafica.
Alle risposte e alle correzioni scritte in modo illeggibile verranno assegnati 0 punti.
Utilizzate i fogli della minuta (che dovranno essere opportunamente contrassegnati) solo per l'impostazione delle soluzioni, in quanto essi non verranno sottoposti a valutazione.
Le risposte devono riportare tutto il procedimento attraverso il quale si giunge alla soluzione, con i calcoli intermedi e le vostre deduzioni.
Abbiate fiducia in voi stessi e nelle vostre capacità. **Buon lavoro!**

Lorenzo Meneghini

Testo della prova d'esame
Parte A

Svolgere il quesito 1 (studio di funzione) più 2 quesiti a scelta tra i restanti 4.

QUESITO 1 (____/6)
Si consideri la funzione $f(x)=x^3-x+6$. Dopo averne determinato il dominio e studiata la parità, se ne studi il segno, e gli eventuali asintoti. Si studi la monotonia e la concavità della funzione, determinando gli eventuali estremi ed il flesso. Si disegni il grafico della funzione studiata.

QUESITO 2 (____/5)
Scrivere l'equazione della tangente *t* al grafico della funzione $f(x)=-x^3+3x^2-x$ nel suo punto di flesso.
Verificare che la retta ottenuta è ortogonale a $2x+y+\sqrt{3}=0$

QUESITO 3 (____/5)
Verificare che la funzione $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1,5]$ e trovare le coordinate del punto del grafico della funzione che soddisfa la tesi di tale teorema.

QUESITO 4 (____/5)

Studia la crescenza della funzione $f(x)=\left(2x+x^2\right)^{10}$ determinando anche i punti di massimo/minimo.

QUESITO 5 (____/5)

Si studi la continuità della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ e se ne trovino gli asintoti.

Parte B

Svolgere 3 quesiti a scelta tra quelli proposti.

QUESITO 6 (____/5)

Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

QUESITO 7 (____/5)

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale: $y''+y'-2y=1$

QUESITO 8 (____/5)

a) Determinare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Dopo aver calcolato il prodotto $C = A \cdot B$ tra le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si calcoli il determinante della matrice C.

QUESITO 9 (____/5)

a) Integrando per parti, calcolare $\int_0^1 x \cdot e^x dx$

b) Stabilire se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} dx$ converge e, nel caso, determinarne il valore.

c) Determinare il volume del solido generato da una rotazione completa della funzione $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$ attorno all'asse *x*, nel suo dominio di definizione.

QUESITO 10 (____/5)

Risolvere i seguenti sistemi:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x+2y+z=0 \\ -x+4y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

PUNTEGGIO TOTALE: ____/30

TRACCIA SINTETICA DI SVOLGIMENTO

N. 1

$f(x)=x^3-x+6$

- $D=\mathbb{R}$
- PARITÀ:

  $f(-x)=(-x)^3-(-x)+6=-x^3+x+6 \Rightarrow$ la funzione non è né pari né dispari
- SEGNO/INTERSEZIONE CON ASSI: Fattorizzando otteniamo

  $f(x)=x^3-x+6=(x+2)(x^2-2x+3)$

  $\frac{\Delta}{4}=1-3=-2 \Rightarrow x^2-2x+3>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$

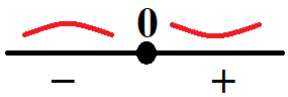
  Quindi $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$

  La curva interseca gli assi in $(-2,0)$ e $(0,6)$
- ASINTOTI: La funzione è algebrica razionale intera $\Rightarrow$ non ha alcun asintoto
- MONOTONIA:

  $f'(x)=3x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x\geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

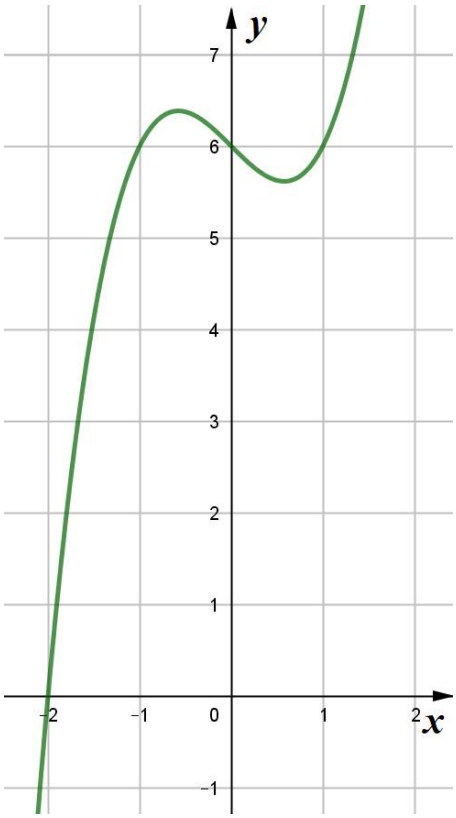
  Max: $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}+6=\frac{2\sqrt{3}}{9}+6 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{9}+6\right)$

  Min: $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}+6=6-\frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3};6-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$
- CONCAVITÀ:



  $f''(x)=6x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

  Flesso: $(0,6)$



N. 2

Cerchiamo il punto di flesso della funzione $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x$.

- $f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$
- $f''(x) = -6x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Flesso:

$$f(1) = -1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow F(1,1)$$

Coefficiente angolare della tangente di flesso:

$$m = f'(1) = -3 + 6 - 1 = 2$$

Tangente di flesso:

$$y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Il coefficiente angolare della retta $2x + y + \sqrt{3} = 0$ è $m' = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ le due rette sono ortogonali tra loro.

N. 3

La funzione $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ è polinomiale; pertanto è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. In particolare è continua in $[-1,5]$ e derivabile in $(-1,5)$.

$\Rightarrow$ valgono le ipotesi del Teorema di Lagrange

$$f(-1) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -2 \qquad f(5) = -\frac{25}{4} + \frac{15}{2} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{1 - (-2)}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} = -1 + 3 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow \left(2, \frac{7}{4}\right)$$

N. 4

Deriviamo la funzione $f(x) = (2x + x^2)^{10}$:

$$f'(x) = 10(2x + x^2)^9 (2 + 2x) = 20(x + 1)(2x + x^2)^9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)(2x + x^2) \geq 0$$

	-2		-1		0	
$x + 1$	−		−	+		+
$2x + x^2$	+		−	−		+
	−		+	−		+

Min:

- $f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$
- $f(-2) = (-4 + 4)^{10} = 0 \Rightarrow (4,0)$

Max:

- $f(-1) = (-2 + 1)^{10} = 1 \Rightarrow (-1,1)$

N. 5

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

Dominio: $x \neq \pm 1$

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=f(x)\Rightarrow$ funzione pari $\Rightarrow$ il grafico ha una simmetria rispetto all'asse y.

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=\infty\Rightarrow$ in $x=1$ c'è una singolarità di 2° specie, con asintoto verticale; per simmetria anche in $x=-1$ c'è una singolarità di 2° specie, con asintoto verticale
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=_H\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x}=1\Rightarrow y=1$ è asintoto orizzontale

N. 6

Risolviamo: $\begin{cases} y'=xy \\ y(0)=1 \end{cases}$

Separiamo le variabili:

$$y'=xy\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=xy\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=x\,dx$$

Integrando membro a membro:

$$\int\frac{dy}{y}=\int x\,dx\Leftrightarrow\ln|y|=\frac{x^2}{2}+c\Leftrightarrow|y|=e^{\frac{x^2}{2}+c}=e^c\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$y=k\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\text{, con } k\in\mathbb{R}$$

Imponiamo la condizione $y(0)=1$:

$$1=k\cdot e^0\Leftrightarrow k=1$$

Soluzione del problema di Cauchy:

$$y=e^{\frac{x^2}{2}}$$

N. 7

Risolviamo l'equazione $y''+y'-2y=1$.

L'equazione omogenea associata è $y''+y'-2y=0$ e l'equazione caratteristica è $\lambda^2+\lambda-2=0$:

$$\Delta=1+8=9\Rightarrow\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{matrix}\nearrow -2\\ \searrow 1\end{matrix}$$

Quindi la soluzione dell'equazione omogenea associata è:

$$\varphi=c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

Cerchiamo ora l'integrale particolare dell'equazione data tra le funzioni costanti: $\psi=k$

$$\psi'=\psi''=0$$

Sostituendo:

$$0-2k=1\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ la soluzione generale dell'equazione data è:

$$y=\varphi+\psi=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{1}{2}$$

N. 8

a) Determiniamo il rango della matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; la matrice è $3\times 4 \Rightarrow rg(A)\le 3$

Consideriamo il minore 3×3:

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$$

$\Rightarrow rg(A)=3$

b) $$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 3=6$$

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Per il Teorema di Binet:

$$\det C=\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B=6\cdot 1=6$$

NOTA: Per chi volesse assolutamente sviluppare tutti i calcoli:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\det C=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

N. 9

a) $$\int_0^1 x\cdot e^x dx=\left[x\cdot e^x\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x dx=\left[1\cdot e^1-0\cdot e^0\right]-\left[e^x\right]_0^1=e-\left(e^1-e^0\right)=1$$

b) $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2}dx=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^b=-\frac{1}{b+1}+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}-\frac{1}{b+1}+1=1$$

c) L'elemento di volume è: $dV=\pi\left[f(x)\right]^2dx=\pi\left(5x-x^2\right)dx$

Il dominio della funzione è $[0,5]$.

Quindi:

$$V = \pi \int_0^5 \left(5x - x^2\right) dx = \pi \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \pi\left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3}\right) = \frac{125}{6}\pi\, u^3$$

N. 10

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Sommando la 2° equazione con la 3°: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sostituendo: $\begin{cases} 1 + y + z = 1 \\ 1 - y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ Sommando la 2° equazione con la 3°: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -z \\ 2z = 1 \end{cases}$

Soluzione: $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $\begin{cases} -4x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Sottraendo la 1° equazione dalla 3°: $\begin{cases} 5x = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ sostituendo: $\begin{cases} x = 0 \\ 4y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

Osserviamo che la 2° equazione è multipla della 3°; pertanto il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$

Soluzione generale:

$(0, t, -2t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$